

Unidad Teórica C: Estudio del método de  
funciones discontinuas definidas por tramos para  
el tratamiento de ecuaciones diferenciales  
parciales elípticas

Antonio Carrillo Ledesma

9 de diciembre de 2008

## Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Análisis Funcional y Problemas Variacionales</b>                                       | <b>3</b>  |
| 1.1. Operador Lineal Elíptico . . . . .  | 3         |
| 1.2. Espacios de Sobolev . . . . .   | 4         |
| 1.2.1. Trazas de una Función en $H^m(\Omega)$ . . . . .                                      | 7         |
| 1.2.2. Espacios $H_0^m(\Omega)$ . . . . .  | 7         |
| 1.2.3. Espacios $H(\text{div}, \Omega)$ . . . . .  | 10        |
| 1.3. Formulas de Green y Problemas Adjuntos . . . . .  | 11        |
| 1.4. Adjuntos Formales para Sistemas de Ecuaciones . . . . .                                 | 19        |
| 1.5. Problemas Variacionales con Valor en la Frontera . . . . .                              | 23        |
| <br>   |           |
| <b>2. Funciones Definidas por Tramos</b>   | <b>27</b> |
| 2.1. Espacios de Sobolev de Funciones Definidas por Tramos . . . . .                         | 30        |
| 2.2. Fórmulas Green-Herrera . . . . .  | 32        |
| 2.3. Formulaciones Variacionales con Valor en la Frontera con Saltos<br>Prescritos . . . . . | 36        |
| <br>   |           |
| <b>3. Métodos de Funciones Discontinuas Definidas por Tramos</b>                             | <b>38</b> |
| 3.1. Algoritmos a Nivel Continuo . . . . .   | 39        |
| 3.1.1. Algoritmo Neumann-Neumann . . . . .   | 39        |
| 3.1.2. Algoritmo Dirichlet-Dirichlet . . . . .   | 41        |
| 3.2. Discretización Axiomática . . . . .   | 42        |
| 3.3. Esquema General . . . . .   | 45        |
| 3.4. Procedimiento para Evaluar la Transformación de Componentes .                           | 51        |
| 3.5. Métodos Dual-Primal . . . . .   | 54        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4. Apéndice A</b>                                      | <b>56</b> |
| 4.1. Nociones de Algebra Lineal . . . . .                 | 56        |
| 4.2. $\sigma$ -Algebra y Espacios Medibles . . . . .      | 57        |
| 4.3. Espacios $L^p$ . . . . .                             | 58        |
| 4.4. Distribuciones . . . . .                             | 59        |
| <b>5. Apéndice B</b>                                      | <b>63</b> |
| 5.1. Solución de Grandes Sistemas de Ecuaciones . . . . . | 63        |
| 5.1.1. Métodos Directos . . . . .                         | 63        |
| 5.1.2. Métodos Iterativos . . . . .                       | 65        |
| 5.2. Precondicionadores . . . . .                         | 70        |
| 5.2.1. Gradiente Conjugado Precondicionado . . . . .      | 72        |
| 5.2.2. Precondicionador a Posteriori . . . . .            | 74        |
| 5.2.3. Precondicionador a Priori . . . . .                | 77        |
| <b>6. Bibliografía</b>                                    | <b>80</b> |

# 1. Análisis Funcional y Problemas Variacionales

En este capítulo se detallan los conceptos básicos de análisis funcional y problemas variacionales con énfasis en problemas elípticos de orden par  $2m$ , para comenzar detallaremos lo que entendemos por un operador diferencial parcial elíptico de orden par  $2m$  en  $n$  variables, para después definir a los espacios de Sobolev para poder tratar problemas variacionales con valor en la frontera.

En donde, restringiéndonos a problemas elípticos, contestaremos una cuestión central en la teoría de problemas elípticos con valores en la frontera, y está se relaciona con las condiciones bajo las cuales uno puede esperar que el problema tenga solución y esta es única, así como conocer la regularidad de la solución, para mayor referencia de estos resultados ver [23], [29], [7], [3] y [21].

## 1.1. Operador Lineal Elíptico

**Definición 1** Entenderemos por un dominio al conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  que sea abierto y conexo.

Para poder expresar de forma compacta derivadas parciales de orden  $m$  o menor, usaremos la definición siguiente.

**Definición 2** Sea  $\mathbb{Z}_+^n$  el conjunto de todas las  $n$ -dúplas de enteros no negativos, un miembro de  $\mathbb{Z}_+^n$  se denota usualmente por  $\alpha$  ó  $\beta$  (por ejemplo  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ). Denotaremos por  $|\alpha|$  la suma  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  y por  $D^\alpha u$  la derivada parcial

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (1)$$

así, si  $|\alpha| = m$ , entonces  $D^\alpha u$  denota la  $m$ -ésima derivada parcial de  $u$ .

Sea  $\mathcal{L}$  un operador diferencial parcial de orden par  $2m$  en  $n$  variables y de la forma

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(\underline{x}) D^\beta u), \quad \underline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (2)$$

donde  $\Omega$  es un dominio en  $\mathbb{R}^n$ . Los coeficientes  $a_{\alpha\beta}$  son funciones suaves real valuadas de  $\underline{x}$ .

El operador  $\mathcal{L}$  es asumido que aparece dentro de una ecuación diferencial parcial con la forma

$$\mathcal{L}u = f, \quad (3)$$

donde  $f$  pertenece al rango del operador  $\mathcal{L}$ .

La clasificación del operador  $\mathcal{L}$  depende sólo de los coeficientes de la derivada más alta, esto es, de la derivada de orden  $2m$ , y a los términos involucrados en esa derivada son llamados la parte principal del operador  $\mathcal{L}$  denotado por  $\mathcal{L}_0$  y para el operador (2) es de la forma

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} D^{\alpha+\beta} u. \quad (4)$$

**Teorema 3** Sea  $\xi$  un vector en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_n^+$ . Entonces

i)  $\mathcal{L}$  es elíptico en  $\underline{x}_0 \in \Omega$ , si

$$\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta}(\underline{x}_0) \xi^{\alpha+\beta} \neq 0 \quad \forall \xi \neq 0; \quad (5)$$

ii)  $\mathcal{L}$  es elíptico, si es elíptico en todos los puntos de  $\Omega$ ;

iii)  $\mathcal{L}$  es fuertemente elíptico, si existe un número  $\mu > 0$  tal que

$$\left| \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta}(\underline{x}_0) \xi^{\alpha+\beta} \right| \geq \mu |\xi|^{2m} \quad (6)$$

satisfaciéndose en todo punto  $\underline{x}_0 \in \Omega$ , y para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Aquí  $|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Para el caso en el cual  $\mathcal{L}$  es un operador de 2do orden ( $m = 1$ ), la notación se simplifica, tomando la forma

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(\underline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u = f \quad (7)$$

en  $\Omega$ .

Para coeficientes adecuados  $a_{ij}$ ,  $a_j$  y  $a_0$  la condición para conocer si el operador es elíptico, es examinado por la condición

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\underline{x}_0) \xi_i \xi_j \neq 0 \quad \forall \xi \neq 0 \quad (8)$$

y para conocer si el operador es fuertemente elíptico, es examinado por la condición

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\underline{x}_0) \xi_i \xi_j > \mu |\xi|^2. \quad (9)$$

## 1.2. Espacios de Sobolev

En esta subsección detallaremos algunos resultados de los espacios de Sobolev sobre el conjunto de números reales, en estos espacios son sobre los cuales trabajaremos tanto para plantear el problema elíptico como para encontrar la solución al problema. Primeramente definiremos lo que entendemos por un espacio  $L^2$ .

**Definición 4** Una función medible  $u(\underline{x})$  definida sobre  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  se dice que pertenece al espacio  $L^2(\Omega)$  si

$$\int_{\Omega} |u(\underline{x})|^2 d\underline{x} < \infty \quad (10)$$

es decir, es integrable.

La definición de los espacios medibles, espacios  $L^p$ , distribuciones y derivadas de distribuciones están dados en el apéndice, estos resultados son la base para poder definir a los espacios de Sobolev.

**Definición 5** *El espacio de Sobolev de orden  $m$ , denotado por  $H^m(\Omega)$ , es definido*

$$H^m(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}. \quad (11)$$

*El producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de dos elementos  $u$  y  $v \in H^m(\Omega)$  esta dado por*

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u)(D^\alpha v) d\underline{x} \text{ para } u, v \in H^m(\Omega). \quad (12)$$

Nota: Es común que el espacio  $L^2(\Omega)$  sea denotado por  $H^0(\Omega)$ .

Un espacio completo con producto interior es llamado un espacio de Hilbert, un espacio normado y completo es llamado espacio de Banach. Y como todo producto interior define una norma, entonces todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach.

**Definición 6** *La norma  $\|\cdot\|_{H^m}$  inducida a partir del producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m}$  queda definida por*

$$\|u\|_{H^m}^2 = \langle u, u \rangle_{H^m} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u)^2 d\underline{x}. \quad (13)$$

Ahora, con norma  $\|\cdot\|_{H^m}$ , el espacio  $H^m(\Omega)$  es un espacio de Hilbert, esto queda plasmado en el siguiente resultado.

**Teorema 7** *El espacio  $H^m(\Omega)$  con la norma  $\|\cdot\|_{H^m}$  es un espacio de Hilbert.*

Ya que algunas de las propiedades de los espacios de Sobolev sólo son validas cuando la frontera del dominio es suficientemente suave. Para describir al conjunto donde los espacios de Sobolev están definidos, es común pedirle algunas propiedades y así definimos lo siguiente.

**Definición 8** *Una función  $f$  definida sobre un conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  es llamada Lipschitz continua si existe una constante  $L > 0$  tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in \Gamma. \quad (14)$$

*Notemos que una función Lipschitz continua es uniformemente continua.*

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) un dominio con frontera  $\partial\Omega$ , sea  $x_0 \in \partial\Omega$  y construyamos la bola abierta con centro en  $x_0$  y radio  $\varepsilon$ , i.e.  $B(x_0, \varepsilon)$ , entonces definiremos el sistema coordenado  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  tal que el segmento  $\partial\Omega \cap B(x_0, \varepsilon)$  pueda expresarse como una función

$$\xi_n = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \quad (15)$$

entonces definimos.

**Definición 9** La frontera  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$  es llamada de Lipschitz si  $f$  definida como en la Ec. (15) es una función Lipschitz continua.

El siguiente teorema resume las propiedades más importantes de los espacios de Sobolev  $H^m(\Omega)$ .

**Teorema 10** Sea  $H^m(\Omega)$  el espacio de Sobolev de orden  $m$  y sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado con frontera Lipschitz. Entonces

- i)  $H^r(\Omega) \subset H^m(\Omega)$  si  $r \geq m$
- ii)  $H^m(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{H^m}$
- iii)  $H^m(\Omega)$  es la cerradura con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{H^m}$  del espacio  $C^\infty(\overline{\Omega})$ .

De la parte iii) del teorema anterior, se puede hacer una importante interpretación: Para toda  $u \in H^m(\Omega)$  es siempre posible encontrar una función infinitamente diferenciable  $f$ , tal que este arbitrariamente cerca de  $u$  en el sentido que

$$\|u - f\|_{H^m} < \varepsilon \quad (16)$$

para algún  $\varepsilon > 0$  dado.

Cuando  $m = 0$ , se deduce la propiedad  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  a partir del teorema anterior.

**Corolario 11** El espacio  $L^2(\Omega)$  es la cerradura, con respecto a la norma  $L^2$ , del espacio  $C^\infty(\overline{\Omega})$ .

Otra propiedad, se tiene al considerar a cualquier miembro de  $u \in H^m(\Omega)$ , este puede ser identificado con una función en  $C^m(\overline{\Omega})$ , después de que posiblemente sean cambiados algunos valores sobre un conjunto de medida cero, esto queda plasmado en los dos siguientes resultados.

**Teorema 12** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios de Banach, con  $X \subset Y$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(u) = u$ . Si el espacio  $X$  tiene definida la norma  $\|\cdot\|_X$  y el espacio  $Y$  tiene definida la norma  $\|\cdot\|_Y$ , decimos que  $X$  está inmersa continuamente en  $Y$  si

$$\|f(u)\|_Y = \|u\|_Y \leq K \|u\|_X \quad (17)$$

para alguna constante  $K > 0$ .

**Teorema 13** (Inmersión de Sobolev)

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado con frontera  $\partial\Omega$  de Lipschitz. Si  $(m - k) > n/2$ , entonces toda función en  $H^m(\Omega)$  pertenece a  $C^k(\overline{\Omega})$ , es decir, hay un miembro que pertenece a  $C^k(\overline{\Omega})$ . Además, la inmersión

$$H^m(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}) \quad (18)$$

es continua.

### 1.2.1. Trazas de una Función en $H^m(\Omega)$ .

Una parte fundamental en los problemas con valores en la frontera definidos sobre el dominio  $\Omega$ , es definir de forma única los valores que tomará la función sobre la frontera  $\partial\Omega$ , en este apartado veremos bajo que condiciones es posible tener definidos de forma única los valores en la frontera  $\partial\Omega$  tal que podamos definir un operador  $tr(\cdot)$  continuo que actúe en  $\overline{\Omega}$  tal que  $tr(u) = u|_{\partial\Omega}$ .

El siguiente lema nos dice que el operador  $tr(\cdot)$  es un operador lineal continuo de  $C^1(\overline{\Omega})$  a  $C(\partial\Omega)$ , con respecto a las normas  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  y  $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$ .

**Lema 14** Sea  $\Omega$  un dominio con frontera  $\partial\Omega$  de Lipschitz. La estimación

$$\|tr(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (19)$$

se satisface para toda función  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , para alguna constante  $C > 0$ .

Ahora, para el caso  $tr(\cdot) : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ , se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 15** Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  con frontera  $\partial\Omega$  de Lipschitz. Entonces:

i) Existe un único operador lineal acotado  $tr(\cdot) : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ , tal que

$$\|tr(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad (20)$$

con la propiedad que si  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , entonces  $tr(u) = u|_{\partial\Omega}$ .

ii) El rango de  $tr(\cdot)$  es denso en  $L^2(\partial\Omega)$ .

El argumento anterior puede ser generalizado para los espacios  $H^m(\Omega)$ , de hecho, cuando  $m > 1$ , entonces para toda  $u \in H^m(\Omega)$  tenemos que

$$D^\alpha u \in H^1(\Omega) \quad \text{para } |\alpha| \leq m - 1, \quad (21)$$

por el teorema anterior, el valor de  $D^\alpha u$  sobre la frontera está bien definido y pertenece a  $L^2(\Omega)$ , es decir

$$tr(D^\alpha u) \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m - 1. \quad (22)$$

Además, si  $u$  es  $m$ -veces continuamente diferenciable, entonces  $D^\alpha u$  es al menos continuamente diferenciable para  $|\alpha| \leq m - 1$  y

$$tr(D^\alpha u) = (D^\alpha u)|_{\partial\Omega}. \quad (23)$$

### 1.2.2. Espacios $H_0^m(\Omega)$ .

Los espacio  $H_0^m(\Omega)$  surgen comúnmente al trabajar con problemas con valor en la frontera y serán aquellos espacios que se nulifiquen en la frontera del dominio, es decir

**Definición 16** Definimos a los espacios  $H_0^m(\Omega)$  como la cerradura, en la norma de Sobolev  $\|\cdot\|_{H^m}$ , del espacio  $C_0^m(\Omega)$  de funciones con derivadas continuas del orden menor que  $m$ , todas las cuales tienen soporte compacto en  $\Omega$ , es decir  $H_0^m(\Omega)$  es formado al tomar la unión de  $C_0^m(\Omega)$  y de todos los límites de sucesiones de Cauchy en  $C_0^m(\Omega)$  que no pertenecen a  $C_0^m(\Omega)$ .

Las propiedades básicas de estos espacios están contenidas en el siguiente resultado.

**Teorema 17** Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  con frontera  $\partial\Omega$  suficientemente suave y sea  $H_0^m(\Omega)$  la cerradura de  $C_0^\infty(\Omega)$  en la norma  $\|\cdot\|_{H^m}$ , entonces

- a)  $H_0^m(\Omega)$  es la cerradura de  $C_0^\infty(\Omega)$  en la norma  $\|\cdot\|_{H^m}$ ;
- b)  $H_0^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ ;
- c) Si  $u \in H^m(\Omega)$  pertenece a  $H_0^m(\Omega)$ , entonces

$$D^\alpha u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, |\alpha| \leq m - 1. \quad (24)$$

**Teorema 18** (Desigualdad de Poincaré-Friedrichs)

Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (25)$$

para toda  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Introduciendo ahora una familia de semi-normas sobre  $H^m(\Omega)$  (una semi-norma  $|\cdot|$  satisface casi todos los axiomas de una norma excepto el de positivo definido), de la siguiente forma:

**Definición 19** La semi-norma  $|\cdot|_m$  sobre  $H^m(\Omega)$ , se define como

$$|u|_m^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx. \quad (26)$$

Esta es una semi-norma, ya que  $|u|_m = 0$  implica que  $D^\alpha u = 0$  para  $|\alpha| = m$ , lo cual no implica que  $u = 0$ .

La relevancia de esta semi-norma está al aplicar la desigualdad de Poincaré-Friedrichs ya que es posible demostrar que  $|\cdot|_1$  es de hecho una norma sobre  $H_0^1(\Omega)$ .

**Corolario 20** La semi-norma  $|\cdot|_1$  es una norma sobre  $H_0^1(\Omega)$ , equivalente a la norma estándar  $\|\cdot\|_{H^1}$ .

Es posible extender el teorema anterior y su corolario a los espacios  $H_0^m(\Omega)$  para cualquier  $m \geq 1$ , de la siguiente forma:

**Teorema 21** Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C |u|_m^2 \quad (27)$$

para toda  $u \in H_0^m(\Omega)$ , además,  $|\cdot|_m$  es una norma sobre  $H_0^m(\Omega)$  equivalente a la norma estándar  $\|\cdot\|_{H^m}$ .

**Definición 22** Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ . Definimos por  $H^{-m}(\Omega)$  al espacio de todas las funcionales lineales acotadas sobre  $H_0^m(\Omega)$ , es decir,  $H^{-m}(\Omega)$  será el espacio dual del espacio  $H_0^m(\Omega)$ .

**Teorema 23**  $q$  será una distribución de  $H^{-m}(\Omega)$  si y sólo si  $q$  puede ser expresada en la forma

$$q = \sum_{|\alpha| < m} D^\alpha q_\alpha \quad (28)$$

donde  $q_\alpha$  son funcionales en  $L^2(\Omega)$ .

**Algunos Comentarios y Precisiones** Sea  $\Omega$  un dominio tal que la frontera  $\partial\Omega$  es suficientemente suave (considerando sólo frontera Lipschitz continua), entonces existe un operador  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  lineal y continuo, tal que  $\gamma_0 v = \text{tr}(v)$  sobre  $\partial\Omega$  para toda  $v$  suave (por ejemplo  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ ), un análisis más profundo muestra que tomando las trazas de todas las funciones de  $H^1(\Omega)$  uno no obtiene el espacio completo de  $L^2(\Omega)$ , sólo obtiene un subespacio de este. Tenemos entonces

$$H^1(\partial\Omega) \subset \gamma_0(H^1(\Omega)) \subset L^2(\partial\Omega) \equiv H^0(\partial\Omega) \quad (29)$$

donde cada inclusión es estricta.

Finalmente reconocemos que el espacio  $\gamma_0(H^1(\Omega))$  pertenece a la familia de espacios  $H^s(\partial\Omega)$  y corresponde exactamente a el valor de  $s = 1/2$ . De tal forma que

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega)) \quad (30)$$

con

$$\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{v \in H^1(\Omega) \text{ y } \gamma_0 v = g} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (31)$$

de forma similar, se ve que las trazas de las funciones en  $H^2(\Omega)$  pertenecen a el espacio  $H^s(\partial\Omega)$  para  $s = 3/2$ , por lo tanto tenemos que

$$H^{3/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^2(\Omega)) \quad (32)$$

$$\|g\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} = \inf_{v \in H^2(\Omega) \text{ y } \gamma_0 v = g} \|v\|_{H^2(\Omega)}. \quad (33)$$

Esto puede generalizarse a las trazas de derivadas de orden alto. Por ejemplo, si la frontera  $\partial\Omega$  es suficientemente suave, podemos definir  $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  para  $v \in H^2(\Omega)$ .

Por otro lado, para ejemplificar algunos casos de  $H_0^m$  notemos que

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{v \mid v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\} \\ H_0^2(\Omega) &= \left\{v \mid v \in H^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ y } \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0\right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Además, en algunas ocasiones necesitamos considerar funciones que se nulifican en alguna parte de la frontera, supongamos que  $\partial\Omega = D \cup N$ , donde  $D$  es frontera tipo Dirichlet y  $N$  es frontera tipo Neumann y  $D \cap N = \emptyset$ , entonces podemos definir

$$H_{0,D}^1(\Omega) = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v|_D = 0\} \quad (35)$$

y donde tenemos que  $H_0^1(\Omega) \subset H_{0,D}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ .

### 1.2.3. Espacios $H(\operatorname{div}, \Omega)$

**Definición 24** Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ . Definimos a  $(L^2(\Omega))^n$  al espacio

$$(L^2(\Omega))^n = \{\operatorname{grad} H^1(\Omega)\} \oplus \{\operatorname{rot} H_0^1(\Omega)\}. \quad (36)$$

**Definición 25** Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ . Definimos por  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  al espacio

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\underline{q} \mid \underline{q} \in (L^2(\Omega))^n, \operatorname{div} \underline{q} \in L^2(\Omega)\}. \quad (37)$$

**Definición 26** La norma  $\|\cdot\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2$  de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ , se define como

$$\|\underline{q}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 = \|\underline{q}\|_{0, \Omega}^2 + \|\operatorname{div} \underline{q}\|_{0, \Omega}^2. \quad (38)$$

Cuando  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  es equipada con la norma  $\|\cdot\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}$  el correspondiente producto interior se convierte en un espacio de Hilbert.

Notemos que, si  $\Omega$  es un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ , con frontera suave  $\partial\Omega$ , si  $\underline{n}$  es un vector normal a  $\partial\Omega$  y sea  $\underline{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ , entonces los vectores de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  admiten una norma de la traza sobre  $\partial\Omega$ . Esta norma de la traza  $\underline{q} \cdot \underline{n}$  pertenece a  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  y esto se sigue de la fórmula de integración por partes

$$\int_{\Omega} \underline{q} \cdot \operatorname{grad} v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{q} v \, dx = \langle v, \underline{q} \cdot \underline{n} \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)} \quad (39)$$

para toda  $\underline{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  y cualquier  $v \in H^1(\Omega)$ . Pudiendo escribir formalmente  $\int_{\partial\Omega} v \underline{q} \cdot \underline{n} \, ds$  en lugar del producto dual  $\langle v, \underline{q} \cdot \underline{n} \rangle$ .

**Lema 27** Sea  $\underline{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ , podemos definir  $\underline{q} \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  y por la fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{q} v \, dx + \int_{\Omega} \underline{q} \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \langle v, \underline{q} \cdot \underline{n} \rangle \quad (40)$$

para toda  $v \in H^1(\Omega)$ .

**Lema 28** La traza del operador  $\underline{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow \underline{q} \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  es suprayectivo.

Sea  $\Omega$  un dominio con frontera suave  $\partial\Omega$ , además supongamos que es frontera tipo Neumann  $N = \partial\Omega$ , entonces podemos definir

$$H_{0,N}(\operatorname{div}, \Omega) = \{\underline{q} \mid \underline{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \langle v, \underline{q} \cdot \underline{n} \rangle = 0, \forall v \in H_{0,D}^1(\Omega)\}. \quad (41)$$

este espacio contiene funciones del espacio  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  cuyas trazas normales se nulifican en la frontera  $N$ .

**Definición 29** Un subespacio importante de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  es  $N^0(\operatorname{div}, \Omega)$ , que se define como

$$N^0(\operatorname{div}, \Omega) = \{\underline{q} \mid \underline{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \operatorname{div} \underline{q} = 0\}. \quad (42)$$

**Lema 30** El operador de traza normal  $\underline{q} \rightarrow \underline{q} \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega}$  es una forma suprayectiva  $N^0(\operatorname{div}, \Omega)$  sobre  $\{\mu \mid \mu \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \langle \mu, 1 \rangle = 0\}$ .

### 1.3. Formulas de Green y Problemas Adjuntos

Una cuestión central en la teoría de problemas elípticos con valores en la frontera se relaciona con las condiciones bajo las cuales uno puede esperar una única solución a problemas de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f_\Omega \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ &\left. \begin{aligned} B_0 u &= g_0 \\ B_1 u &= g_1 \\ &\vdots \\ B_{m-1} u &= g_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (43)$$

donde  $\mathcal{L}$  es un operador elíptico de orden  $2m$ , de forma

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left( \sum_{|\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(\underline{x}) D^\beta u \right), \quad \underline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (44)$$

donde los coeficientes  $a_{\alpha\beta}$  son funciones de  $\underline{x}$  suaves y satisfacen las condiciones para que el operador sea elíptico, el conjunto  $B_0, B_1, \dots, B_{m-1}$  de operadores de frontera son de la forma

$$B_j u = \sum_{|\alpha| \leq q_j} b_\alpha^{(j)} D^\alpha u = g_j \quad (45)$$

y constituyen un conjunto de condiciones de frontera que cubren a  $\mathcal{L}$ . Los coeficientes  $b_\alpha^{(j)}$  son asumidos como funciones suaves.

En el caso de problemas de segundo orden la Ec. (45) puede expresarse como una sola condición de frontera

$$Bu = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = g \quad \text{en } \partial\Omega. \quad (46)$$

Antes de poder ver las condiciones bajo las cuales se garantice la existencia y unicidad es necesario introducir el concepto de formula de Green asociada con el operador  $\mathcal{L}^*$ , para ello definimos:

**Definición 31** Con el operador dado como en la Ec. (44), denotaremos por  $\mathcal{L}^*$  al operador definido por

$$\mathcal{L}^*u = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left( \sum_{|\beta| \leq m} a_{\beta\alpha}(\underline{x}) D^\beta u \right) \quad (47)$$

y nos referiremos a  $\mathcal{L}^*$  como el adjunto formal del operador  $\mathcal{L}$ .

La importancia del adjunto formal es que si aplicamos el teorema de Green (102) a la integral

$$\int_{\Omega} v \mathcal{L}u d\underline{x} \quad (48)$$

obtenemos

$$\int_{\Omega} v \mathcal{L}u d\underline{x} = \int_{\Omega} u \mathcal{L}^*v d\underline{x} + \int_{\partial\Omega} F(u, v) d\underline{s} \quad (49)$$

en la cual  $F(u, v)$  representa términos de frontera que se nulifican al aplicar el teorema ya que la función  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Si  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ ; i.e.  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$  el operador es llamado de manera formal el auto-adjunto.

En el caso de problemas de segundo orden, dos sucesivas aplicaciones del teorema de Green (102) y obtenemos, para  $i$  y  $j$  fijos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) d\underline{x} &= - \int_{\partial\Omega} v a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i d\underline{s} + \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\underline{x} \quad (50) \\ &= - \int_{\partial\Omega} \left[ v a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i - u a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} n_j \right] d\underline{s} \\ &\quad - \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\underline{x}. \end{aligned}$$

Pero sumando sobre  $i$  y  $j$ , obtenemos de la Ec. (49)

$$\mathcal{L}^*v = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ji}(\underline{x}) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \quad (51)$$

y

$$F(u, v) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left( v \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i - u \frac{\partial v}{\partial x_i} n_j \right) \quad (52)$$

tal que  $\mathcal{L}$  es formalmente el auto-ajunto si  $a_{ji} = a_{ij}$ .

Para hacer el tratamiento más simple, restringiremos nuestra atención al problema homogéneo, es decir, en el cual  $g_0, g_1, \dots, g_{m-1} = 0$  (esta no es una restricción real, ya que se puede demostrar que cualquier problema no-homogéneo con condiciones de frontera puede convertirse en uno con condiciones de frontera homogéneo de una manera sistemática), asumiremos también que  $\Omega$  es suave y la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  es de clase  $C^\infty$ .

Así, en lo que resta de la sección, daremos los pasos necesarios para poder conocer bajo que condiciones el problema elíptico con valores en la frontera del tipo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f_\Omega \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ &\left. \begin{aligned} B_0u &= 0 \\ B_1u &= 0 \\ &\vdots \\ B_{m-1}u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (53)$$

donde el operador  $\mathcal{L}$  y  $B_j$  estan dados como en (44) y (45), con  $s \geq 2m$  tiene solución y esta es única. Para ello, necesitamos adoptar el lenguaje de la teoría de operadores lineales, algunos resultados clave de algebra lineal están detallados en el apéndice.

Primeramente denotemos  $N(B_j)$  al espacio nulo del operador de frontera  $B_j : H^s(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , entonces

$$N(B_j) = \{u \in H^s(\Omega) \mid B_j u = 0 \text{ en } \partial\Omega\} \quad (54)$$

para  $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ .

Adicionalmente definimos al dominio del operador  $\mathcal{L}$ , como el espacio

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}) &= H^s(\Omega) \cap N(B_0) \cap \dots \cap N(B_{m-1}) \\ &= \{u \in H^s(\Omega) \mid B_j u = 0 \text{ en } \partial\Omega, j = 0, 1, \dots, m-1\}. \end{aligned} \quad (55)$$

Entonces el problema elíptico con valores en la frontera de la Ec. (53) con  $s \geq 2m$ , puede reescribirse como, dado  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow H^{s-2m}(\Omega)$ , hallar  $u$  que satisfaga

$$\mathcal{L}u = f_\Omega \quad \text{en } \Omega. \quad (56)$$

Lo primero que hay que determinar es el conjunto de funciones  $f_\Omega$  en  $H^{s-2m}(\Omega)$  para las cuales la ecuación anterior se satisface, i.e. debemos identificar el rango  $R(\mathcal{L})$  del operador  $\mathcal{L}$ . Pero como nos interesa conocer bajo que condiciones la solución  $u$  es única, entonces podemos definir el núcleo  $N(\mathcal{L})$  del operador  $\mathcal{L}$  como sigue

$$\begin{aligned} N(\mathcal{L}) &= \{u \in D(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L}u = 0\} \\ &= \{u \in H^s(\Omega) \mid \mathcal{L}u = 0 \text{ en } \Omega, B_j u = 0 \text{ en } \partial\Omega, j = 0, 1, \dots, m-1\}. \end{aligned} \quad (57)$$

Si el  $N(\mathcal{L}) \neq \{0\}$ , entonces no hay una única solución, ya que si  $u_0$  es una solución, entonces  $u_0 + w$  también es solución para cualquier  $w \in N(\mathcal{L})$ , ya que

$$\mathcal{L}(u_0 + w) = \mathcal{L}u_0 + \mathcal{L}w = \mathcal{L}u_0 = f_\Omega. \quad (58)$$

Así, los elementos del núcleo  $N(\mathcal{L})$  de  $\mathcal{L}$  deberán ser excluidos del dominio  $D(\mathcal{L})$  del operador  $\mathcal{L}$ , para poder asegurar la unicidad de la solución  $u$ .

Si ahora, introducimos el complemento ortogonal  $N(\mathcal{L})^\perp$  del núcleo  $N(\mathcal{L})$  del operador  $\mathcal{L}$  con respecto al producto interior  $L^2$ , definiéndolo como

$$N(\mathcal{L})^\perp = \{v \in D(\mathcal{L}) \mid (v, w) = 0 \ \forall w \in N(\mathcal{L})\}. \quad (59)$$

De esta forma tenemos que

$$D(\mathcal{L}) = N(\mathcal{L}) \oplus N(\mathcal{L})^\perp \quad (60)$$

i.e. para toda  $u \in D(\mathcal{L})$ ,  $u$  se escribe como  $u = v + w$  donde  $v \in N(\mathcal{L})^\perp$  y  $w \in N(\mathcal{L})$ . Además  $N(\mathcal{L}) \cap N(\mathcal{L})^\perp = \{0\}$ .

De forma similar, podemos definir los espacios anteriores para el problema adjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*u &= f_\Omega \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ &\left. \begin{array}{l} B_0^*u = 0 \\ B_1^*u = 0 \\ \vdots \\ B_{m-1}^*u = 0 \end{array} \right\} \text{ en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (61)$$

y definimos

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}^*) &= H^s(\Omega) \cap N(B_0^*) \cap \dots \cap N(B_{m-1}^*) \\ &= \{u \in H^s(\Omega) \mid B_j^*u = 0 \text{ en } \partial\Omega, j = 0, 1, \dots, m-1\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Entonces el problema elíptico con valores en la frontera de la Ec. (53) con  $s \geq 2m$ , puede reescribirse como, dado  $\mathcal{L}^* : D(\mathcal{L}^*) \rightarrow H^{s-2m}(\Omega)$ , hallar  $u$  que satisfaga

$$\mathcal{L}^*u = f_\Omega \text{ en } \Omega. \quad (63)$$

Definiendo para el operador  $\mathcal{L}^*$

$$\begin{aligned} N(\mathcal{L}^*) &= \{u \in D(\mathcal{L}^*) \mid \mathcal{L}^*u = 0\} \\ &= \{u \in H^s(\Omega) \mid \mathcal{L}^*u = 0 \text{ en } \Omega, B_j^*u = 0 \text{ en } \partial\Omega, j = 0, 1, \dots, m-1\}. \end{aligned} \quad (64)$$

y

$$N(\mathcal{L}^*)^\perp = \{v \in D(\mathcal{L}^*) \mid (v, w)_{L^2} = 0 \ \forall w \in N(\mathcal{L}^*)\}. \quad (65)$$

Así, con estas definiciones, es posible ver una cuestión fundamental, esta es, conocer bajo que condiciones el problema elíptico con valores en la frontera de la Ec. (53) con  $s \geq 2m$  tiene solución y esta es única, esto queda resuelto en el siguiente teorema cuya demostración puede verse en [7] y [23].

**Teorema 32** Considerando el problema elíptico con valores en la frontera de la Ec. (53) con  $s \geq 2m$  definido sobre un dominio  $\Omega$  acotado con frontera  $\partial\Omega$  suave. Entonces

i) Existe al menos una solución si y sólo si  $f \in N(\mathcal{L}^*)^\perp$ , esto es, si

$$(f, v)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in N(\mathcal{L}^*). \quad (66)$$

ii) Asumiendo que la solución  $u$  existe, esta es única si  $u \in N(\mathcal{L})^\perp$ , esto es, si

$$(u, w)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall w \in N(\mathcal{L}). \quad (67)$$

iii) Si existe una única solución, entonces existe una única constante  $C > 0$ , independiente de  $u$ , tal que

$$\|u\|_{H^s} \leq C \|f\|_{H^{s-2m}}. \quad (68)$$

**Observación 33** i) El teorema afirma que el operador  $\mathcal{L}$  es un operador suprayectivo de  $D(\mathcal{L})$  sobre el subespacio de funciones en  $H^{s-2m}$  que satisface (67). Además el operador  $\mathcal{L}$  es inyectivo si el dominio es restringido al espacio de funciones que satisfagan a (66).

ii) La parte (iii) del teorema puede interpretarse como un resultado de regularidad, en el sentido en que se muestra

$$u \in H^{s-2m}(\Omega) \quad \text{si } f \in H^s(\Omega). \quad (69)$$

Así, formalmente podemos definir el adjunto formal de la siguiente manera

**Definición 34** Sea  $\mathcal{L}$  un Operador Diferencial, decimos que un operador  $\mathcal{L}^*$  es su adjunto formal si satisface la siguiente condición

$$w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w = \nabla \cdot \underline{\mathcal{Q}}(u, w) \quad (3.1)$$

tal que las funciones  $u$  y  $w$  pertenecen a un espacio lineal. Aquí  $\underline{\mathcal{Q}}(u, w)$  es una funcional bilineal que representa términos de frontera.

**Ejemplos de Operadores Adjuntos Formales** A continuación se muestra mediante ejemplos el uso de la definición de operadores adjuntos formales y la parte correspondiente a términos de frontera [3].

#### A) Operador de la derivada de orden cero

La derivada de orden cero de una función  $u$  es tal que

$$\frac{d^n u}{dx^n} = u \quad (70)$$

es decir,  $n = 0$ , sea el operador

$$\mathcal{L}u = u \quad (71)$$

de la definición de operador adjunto tenemos que

$$w\mathcal{L}u = u\mathcal{L}^*w + \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}(u, w) \quad (72)$$

entonces el término izquierdo es

$$w\mathcal{L}u = wu \quad (73)$$

de aquí

$$u\mathcal{L}^*w = uw \quad (74)$$

por lo tanto el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^*w = w \quad (75)$$

nótese que el operador es auto-adjunto.

### B) Operador de la derivada de primer orden

La derivada de primer orden en términos del operador es

$$\mathcal{L}u = c \frac{du}{dx} \quad (76)$$

de la definición de operador adjunto tenemos

$$w\mathcal{L}u = u\mathcal{L}w + \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}(u, w) \quad (77)$$

desarrollando el lado izquierdo

$$\begin{aligned} w\mathcal{L}u &= wc \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d(wcu)}{dx} - u \frac{d(cw)}{dx} \\ &= \frac{d(wcu)}{dx} - uc \frac{dw}{dx} \end{aligned} \quad (78)$$

por lo tanto, el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^*w = -c \frac{dw}{dx} \quad (79)$$

y los términos de frontera son

$$\mathfrak{D}(u, w) = wcu \quad (80)$$

### C) Operador Elíptico

El operador elíptico más sencillo es el Laplaciano

$$\mathcal{L}u \equiv -\Delta u = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \quad (81)$$

de la ecuación del operador adjunto formal tenemos

$$\begin{aligned}
w\mathcal{L}u &= -w\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(w\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(w\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) - u\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial w}{\partial x_i} - w\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - u\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)
\end{aligned} \tag{82}$$

entonces, el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^*w = -u\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) \tag{83}$$

es decir, el operador es autoadjunto. Notemos que la función bilineal  $\underline{\mathcal{D}}(u, w)$  es

$$\underline{\mathcal{D}}(u, w) = u\frac{\partial w}{\partial x_i} - w\frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{84}$$

D) Consideremos el operador diferencial elíptico más general de segundo orden

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu \tag{85}$$

de la definición de operador adjunto formal tenemos que

$$w\mathcal{L}u = u\mathcal{L}^*w + \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}}(u, w) \tag{86}$$

desarrollando el lado derecho de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
w\mathcal{L}u &= w(-\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu) \\
&= -w\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + w\nabla \cdot (\underline{b}u) + wcu
\end{aligned} \tag{87}$$

aplicando la igualdad de divergencia a los dos primeros sumandos se tiene que la ecuación anterior es

$$\begin{aligned}
w\mathcal{L}u &= -\nabla \cdot (w\underline{a} \cdot \nabla u) + \underline{a} \cdot \nabla u \cdot \nabla w + \nabla \cdot (w\underline{b}u) \\
&\quad - \underline{b}u \cdot \nabla w + wcu \\
&= -\nabla \cdot (w\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (u\underline{a}\nabla w) - u\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) + \nabla \cdot (w\underline{b}u) \\
&\quad - \underline{b}u \cdot \nabla w + wcu \\
&= \nabla \cdot [\underline{a}(u\nabla w - w\nabla u)] + \nabla \cdot (w\underline{b}u) - u\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) \\
&\quad - \underline{b}u \cdot \nabla w + wcu
\end{aligned} \tag{88}$$

reordenando términos se tiene

$$\begin{aligned}
w\mathcal{L}u &= -u\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) - \underline{b}u \cdot \nabla w + wcu + \\
&\quad \nabla \cdot [\underline{a}(u\nabla w - w\nabla u) + (w\underline{b}u)]
\end{aligned} \tag{89}$$

por lo tanto, el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^*w = -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) - \underline{b} \cdot \nabla w + cw \quad (90)$$

y el término correspondiente a valores en la frontera es

$$\underline{\mathcal{D}}(u, w) = \underline{a} \cdot (u\nabla w - w\nabla u) + (w\underline{b}u). \quad (91)$$

#### E) La ecuación bi-armónica

Consideremos el operador diferencial bi-armónico

$$\mathcal{L}u = \Delta^2 u \quad (92)$$

entonces se tiene que

$$w\mathcal{L}u = u\mathcal{L}^*w + \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}}(u, w) \quad (93)$$

desarrollemos el término del lado derecho

$$\begin{aligned} w\mathcal{L}u &= w\Delta^2 u \\ &= w\nabla \cdot (\nabla \Delta u) \end{aligned} \quad (94)$$

utilizando la igualdad de divergencia

$$\nabla \cdot (sV) = s\nabla \cdot V + V \cdot \nabla s \quad (95)$$

tal que  $s$  es función escalar y  $V$  vector, entonces sea  $w = s$  y  $\nabla \Delta u = V$ , se tiene

$$\begin{aligned} w\nabla \cdot (\nabla \Delta u) \\ &= \nabla \cdot (w\nabla \Delta u) - \nabla \Delta u \cdot \nabla w \end{aligned} \quad (96)$$

ahora sea  $s = \Delta u$  y  $V = \nabla w$ , entonces

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (w\nabla \Delta u) - \nabla \Delta u \cdot \nabla w \\ &= \nabla \cdot (w\nabla \Delta u) + \Delta u \nabla \cdot \nabla w - \nabla \cdot (\Delta u \nabla w) \\ &= \Delta w \nabla \cdot \nabla u + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u - \Delta u \nabla w) \end{aligned} \quad (97)$$

sea  $s = \Delta w$  y  $V = \nabla u$ , entonces

$$\begin{aligned} &\Delta w \nabla \cdot \nabla u + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u - \Delta u \nabla w) \\ &= \nabla \cdot (\Delta w \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla (\Delta w) + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u - \Delta u \nabla w) \\ &= -\nabla u \cdot \nabla (\Delta w) + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u + \Delta w \nabla u - \Delta u \nabla w) \end{aligned} \quad (98)$$

por último sea  $s = u$  y  $V = \nabla (\Delta w)$  y obtenemos

$$\begin{aligned} &-\nabla u \cdot \nabla (\Delta w) + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u + \Delta w \nabla u - \Delta u \nabla w) \\ &= u \nabla \cdot (\nabla (\Delta w)) - \nabla \cdot (u \nabla (\Delta w)) + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u + \Delta w \nabla u - \Delta u \nabla w) \end{aligned} \quad (99)$$

reordenando términos

$$w\mathcal{L}u = u\Delta^2 w + \nabla \cdot (w\nabla\Delta u + \Delta w\nabla u - \Delta u\nabla w - u\nabla\Delta w) \quad (100)$$

entonces se tiene que el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^* w = \Delta^2 w \quad (101)$$

y los términos de frontera son

$$\underline{\mathcal{D}}(u, w) = w\nabla\Delta u + \Delta w\nabla u - \Delta u\nabla w - u\nabla\Delta w. \quad (102)$$

#### 1.4. Adjuntos Formales para Sistemas de Ecuaciones

En esta sección trabajaremos con funciones vectoriales [3]; para ello necesitamos plantear la definición de operadores adjuntos formales para este tipo de funciones.

**Definición 35** Sea  $\underline{\mathcal{L}}$  un operador diferencial, decimos que un operador  $\underline{\mathcal{L}}^*$  es su adjunto formal si satisface la siguiente condición

$$\underline{w} \underline{\mathcal{L}} \underline{u} - \underline{u} \underline{\mathcal{L}}^* \underline{w} = \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}}(\underline{u}, \underline{w}) \quad (103)$$

tal que las funciones  $\underline{u}$  y  $\underline{w}$  pertenecen a un espacio lineal. Aquí  $\underline{\mathcal{D}}(\underline{u}, \underline{w})$  representa términos de frontera.

Por lo tanto se puede trabajar con funciones vectoriales utilizando operadores matriciales.

##### A) Operador diferencial vector-valuado con elasticidad estática

Sea

$$\underline{\mathcal{L}} \underline{u} = -\nabla \cdot \underline{\underline{C}} : \nabla \underline{u} \quad (104)$$

de la definición de operador adjunto formal tenemos que

$$\underline{w} \underline{\mathcal{L}} \underline{u} = \underline{u} \underline{\mathcal{L}}^* \underline{w} + \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}}(\underline{u}, \underline{w}) \quad (105)$$

para hacer el desarrollo del término del lado derecho se utilizará notación indicial, es decir, este vector  $\underline{w}\underline{\mathcal{L}}\underline{u}$  tiene los siguientes componentes

$$-w_i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) \right); \quad i = 1, 2, 3 \quad (106)$$

utilizando la igualdad de divergencia tenemos

$$\begin{aligned} & -w_i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) \right) \\ &= C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( w_i C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i C_{ijpq} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijpq} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( w_i C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) \end{aligned} \quad (107)$$

reordenado términos tenemos que la ecuación anterior es

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i C_{ijpq} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_i C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{ijpq} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \quad (108)$$

en notación simbólica tenemos que

$$\underline{w} \underline{\underline{\mathcal{L}}} \underline{u} = -\underline{u} \nabla \cdot \left( \underline{\underline{\underline{C}}} : \nabla \underline{w} \right) + \nabla \cdot \left( \underline{u} \cdot \underline{\underline{\underline{C}}} : \nabla \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\underline{\underline{C}}} : \nabla \underline{u} \right) \quad (109)$$

por lo tanto el operador adjunto formal es

$$\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}^* \underline{w} = -\nabla \cdot \left( \underline{\underline{\underline{C}}} : \nabla \underline{w} \right) \quad (110)$$

y los términos de frontera son

$$\underline{\mathcal{D}}(\underline{u}, \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{\underline{\underline{C}}} : \nabla \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\underline{\underline{C}}} : \nabla \underline{u} \quad (111)$$

El operador de elasticidad es **auto-adjunto formal**.

## B) Métodos Mixtos a la Ecuación de Laplace

Operador Laplaciano

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}} \underline{u} = \Delta \underline{u} = \underline{f} \quad (112)$$

escrito en un sistema de ecuaciones se obtiene

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}} \underline{u} = \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (113)$$

consideraremos campos vectoriales de 4 dimensiones, estos son denotados por :

$$\underline{u} \equiv \{ \underline{p}, u \} \text{ y } \underline{w} = \{ \underline{q}, w \} \quad (114)$$

ahora el operador diferencial vector-valuado es el siguiente

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathcal{L}}} \underline{u} &= \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{p} \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{p} - \nabla u \\ \nabla \cdot \underline{p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (115)$$

entonces

$$\underline{w} \underline{\underline{\mathcal{L}}} \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{p} \\ u \end{bmatrix} \quad (116)$$

utilizando la definición de operador adjunto

$$\underline{w} \underline{\underline{\mathcal{L}}} \underline{u} = \underline{u} \underline{\underline{\mathcal{L}}} \underline{w} + \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}}(\underline{u}, \underline{w}) \quad (117)$$

haciendo el desarrollo del término izquierdo se tiene que

$$\begin{aligned}
\underline{w}\underline{\mathcal{L}}\underline{u} &= \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{u} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{p} - \nabla \underline{u} \\ \nabla \cdot \underline{p} \end{bmatrix} \\
&= \underline{q}\underline{p} - \underline{q}\nabla \cdot \underline{u} + \underline{w}\nabla \cdot \underline{p}
\end{aligned} \tag{118}$$

aquí se utiliza la igualdad de divergencia en los dos términos del lado derecho y obtenemos

$$\begin{aligned}
&\underline{q}\underline{p} - \underline{q}\nabla \cdot \underline{u} + \underline{w}\nabla \cdot \underline{p} \\
&= \underline{q}\underline{p} + \underline{u}\nabla \cdot \underline{q} - \nabla \cdot (\underline{q}\underline{u}) - \underline{p} \cdot \nabla \underline{w} + \nabla \cdot (\underline{w}\underline{p}) \\
&= \underline{p}(\underline{q} - \nabla \underline{w}) + \underline{u}\nabla \cdot \underline{q} + \nabla \cdot (\underline{w}\underline{p} - \underline{u}\underline{q})
\end{aligned} \tag{119}$$

si se agrupa los dos primeros términos en forma matricial, se tiene

$$\begin{aligned}
&\underline{p}(\underline{q} - \nabla \underline{w}) + \underline{u}\nabla \cdot \underline{q} + \nabla \cdot (\underline{w}\underline{p} - \underline{u}\underline{q}) \\
&= \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q} - \nabla \underline{w} \\ \underline{w} \end{bmatrix} + \nabla \cdot (\underline{w}\underline{p} - \underline{u}\underline{q}) \\
&= \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{w} \end{bmatrix} + \nabla \cdot (\underline{w}\underline{p} - \underline{u}\underline{q})
\end{aligned} \tag{120}$$

por lo tanto, el operador adjunto formal es

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{L}}^*\underline{w} &= \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{w} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{q} - \nabla \underline{w} \\ \nabla \cdot \underline{q} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{121}$$

y el término correspondiente a valores en la frontera es

$$\underline{\mathcal{D}}(\underline{u}, \underline{w}) = \underline{w}\underline{p} - \underline{u}\underline{q}. \tag{122}$$

### C) Problema de Stokes

El problema de Stokes es derivado de la ecuación de Navier-Stokes, la cual es utilizada en dinámica de fluidos viscosos. En este caso estamos suponiendo que el fluido es estacionario, la fuerza gravitacional es nula y el fluido incompresible. Entonces el sistema de ecuaciones a ser considerado es

$$\begin{aligned}
-\Delta \underline{u} + \nabla p &= \underline{f} \\
-\nabla \cdot \underline{u} &= 0
\end{aligned} \tag{123}$$

se considerará un campo vectorial de 4 dimensiones. Ellos serán denotados por

$$\underline{U} = \{\underline{u}, p\} \text{ y } \underline{W} = \{\underline{w}, q\} \tag{124}$$

ahora el operador diferencial vector-valuado es el siguiente

$$\underline{\underline{\mathcal{L}U}} = \begin{bmatrix} -\Delta & \nabla \\ -\nabla \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ p \end{bmatrix} \quad (125)$$

el desarrollo se hará en notación indicial, entonces tenemos que

$$W\underline{\underline{\mathcal{L}U}} = \begin{cases} -\underline{w}\Delta\underline{u} + \underline{w}\nabla p \\ -q\nabla \cdot \underline{u} \end{cases} \quad (126)$$

usando notación indicial se obtiene

$$\begin{aligned} w_i \left( -\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) &= -\sum_j w_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + w_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ &= \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j^2} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \\ &\quad p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i p) \end{aligned} \quad (127)$$

desarrollando la primera suma como la derivada de dos funciones se tiene

$$\begin{aligned} -\sum_j u_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \\ -\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i p) \end{aligned} \quad (128)$$

reordenando términos tenemos

$$\begin{aligned} -\sum_j u_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \\ \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i p) \end{aligned} \quad (129)$$

Ahora consideremos la ecuación 2 en Ec. (126), tenemos

$$-q\nabla \cdot \underline{u} \quad (130)$$

en notación indicial se tiene

$$\begin{aligned} -q \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= -\sum_i q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ &= \sum_i u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (q u_i) \end{aligned} \quad (131)$$

en la ecuación anterior se utilizó la igualdad de divergencia, entonces agrupando las ecuaciones Ec. (129) y Ec. (131) se tiene

$$\begin{aligned}
& w_i \left( -\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - q \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\
&= -\sum_j u_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \\
&\quad \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i p) + \\
&\quad \sum_i u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (q u_i)
\end{aligned} \tag{132}$$

ordenando los términos tenemos

$$\begin{aligned}
& -\sum_j u_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} + \sum_i u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \\
&+ \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i p) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (q u_i)
\end{aligned} \tag{133}$$

escribiendo la ecuación anterior en notación simbólica, se obtiene

$$-\underline{u}\Delta\underline{w} + \underline{u}\nabla q - p\nabla \cdot \underline{w} + \nabla \cdot (\underline{u}\nabla\underline{w} - \underline{w}\nabla\underline{u} + \underline{w}p - \underline{u}q) \tag{134}$$

por lo tanto, el operador adjunto formal es

$$\underline{\mathcal{L}}^* \underline{W} = \begin{bmatrix} -\Delta & \nabla \\ -\nabla \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{w} \\ q \end{bmatrix} \tag{135}$$

y el término de valores de frontera es

$$\underline{\mathcal{D}}(\underline{u}, \underline{w}) = \underline{u}\nabla\underline{w} - \underline{w}\nabla\underline{u} + \underline{w}p - \underline{u}q. \tag{136}$$

## 1.5. Problemas Variacionales con Valor en la Frontera

Restringiéndonos ahora en problemas elípticos de orden 2 (problemas de orden mayor pueden ser tratados de forma similar), reescribiremos este en su forma variacional. La formulación variacional es más débil que la formulación convencional ya que esta demanda menor suavidad de la solución  $u$ , sin embargo cualquier problema variacional con valores en la frontera corresponde a un problema con valor en la frontera y viceversa.

Además, la formulación variacional facilita el tratamiento de los problemas al usar métodos numéricos de ecuaciones diferenciales parciales, en esta sección veremos algunos resultados clave como es la existencia y unicidad de la solución de este tipo de problemas, para mayores detalles, ver [7] y [23].

Si el operador  $\mathcal{L}$  está definido por

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot \underline{a} \cdot \nabla u + cu \quad (137)$$

con  $\underline{a}$  una matriz positiva definida, simétrica y  $c \geq 0$ , el problema queda escrito como

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \underline{a} \cdot \nabla u + cu &= f_\Omega \quad \text{en } \Omega \\ u &= g \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (138)$$

Si multiplicamos a la ecuación  $-\nabla \cdot \underline{a} \cdot \nabla u + cu = f_\Omega$  por  $v \in V = H_0^1(\Omega)$ , obtenemos

$$-v (\nabla \cdot \underline{a} \cdot \nabla u + cu) = v f_\Omega \quad (139)$$

aplicando el teorema de Green (102) obtenemos la Ec. (50), que podemos reescribir como

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \underline{a} \cdot \nabla u + cuv) d\underline{x} = \int_{\Omega} v f_\Omega d\underline{x}. \quad (140)$$

Definiendo el operador bilineal

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \underline{a} \cdot \nabla u + cuv) d\underline{x} \quad (141)$$

y la funcional lineal

$$l(v) = \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} v f_\Omega d\underline{x} \quad (142)$$

podemos reescribir el problema dado por la Ec. (43) de orden 2, haciendo uso de la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  y la funcional lineal  $l(\cdot)$ .

Entonces entenderemos en el presente contexto un problema variacional con valores de frontera (VBVP) por uno de la forma: hallar una función  $u$  que pertenezca a un espacio de Hilbert  $V = H_0^1(\Omega)$  y que satisfaga la ecuación

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (143)$$

para toda función  $v \in V$  donde  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal y  $l(\cdot)$  es una funcional lineal.

**Definición 36** Sea  $V$  un espacio de Hilbert y sea  $\|\cdot\|_V$  la norma asociada a dicho espacio, decimos que una forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es continua si existe una constante  $M > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \quad (144)$$

y es  $V$ -elíptico si existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \quad (145)$$

donde  $\|\cdot\|_V$  es la norma asociada al espacio  $V$ .

Esto significa que una forma  $V$ -elíptico es una que siempre es no negativa y toma el valor de 0 sólo en el caso de que  $v = 0$ , i.e. es positiva definida.

Notemos que el problema (138) definido en  $V = H_0^1(\Omega)$  reescrito como el problema (143) genera una forma bilineal  $V$ -elíptico cuyo producto interior sobre  $V$  es simétrico y positivo definido ya que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 > 0, \quad \forall v \in V, v \neq 0 \quad (146)$$

reescribiéndose el problema (143), en el cual debemos encontrar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle - a(u_0, v) \quad (147)$$

donde  $u_0 = g$  en  $\partial\Omega$ , para toda  $v \in V$ .

Entonces, la cuestión fundamental, es conocer bajo que condiciones el problema anterior tiene solución y esta es única, el teorema de Lax-Milgram nos da las condiciones bajo las cuales el problema (138) reescrito como el problema (143) tiene solución y esta es única, esto queda plasmado en el siguiente resultado.

**Teorema 37** (*Lax-Milgram*)

Sea  $V$  un espacio de Hilbert y sea  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal continua  $V$ -elíptico sobre  $V$ . Además, sea  $l(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional lineal continua sobre  $V$ . Entonces

i) El VBVP de encontrar  $u \in V$  que satisfaga

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V \quad (148)$$

tiene una y sólo una solución;

ii) La solución depende continuamente de los datos, en el sentido de que

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{V^*} \quad (149)$$

donde  $\|\cdot\|_{V^*}$  es la norma en el espacio dual  $V^*$  de  $V$  y  $\alpha$  es la constante de la definición de  $V$ -elíptico.

Más específicamente, considerando ahora  $V$  un subespacio cerrado de  $H^m(\Omega)$  las condiciones para la existencia, unicidad y la dependencia continua de los datos queda de manifiesto en el siguiente resultado.

**Teorema 38** Sea  $V$  un subespacio cerrado de  $H^m(\Omega)$ , sea  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal continua  $V$ -elíptico sobre  $V$  y sea  $l(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$  una funcional lineal continua sobre  $V$ . Sea  $P$  un subespacio cerrado de  $V$  tal que

$$a(u + p, v + \bar{p}) = a(u, v) \quad \forall u, v \in V \text{ y } p, \bar{p} \in P. \quad (150)$$

También denotando por  $Q$  el subespacio de  $V$  consistente de las funciones ortogonales a  $P$  en la norma  $L^2$ ; tal que

$$Q = \left\{ v \in V \mid \int_{\Omega} v p \, d\underline{x} = 0 \quad \forall p \in P \right\}, \quad (151)$$

y asumiendo que  $a(\cdot, \cdot)$  es  $Q$ -elíptico: existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$a(q, q) \geq \alpha \|q\|_Q^2 \quad \text{para } q \in Q, \quad (152)$$

la norma sobre  $Q$  será la misma que sobre  $V$ . Entonces

i) Existe una única solución al problema de encontrar  $u \in Q$  tal que

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (153)$$

si y sólo si las condiciones de compatibilidad

$$\langle l, p \rangle = 0 \quad \text{para } p \in P \quad (154)$$

se satisfacen.

ii) La solución  $u$  satisface

$$\|u\|_Q \leq \alpha^{-1} \|l\|_{Q^*} \quad (155)$$

(dependencia continua de los datos).

Otro aspecto importante es la regularidad de la solución, si la solución  $u$  al VBVP de orden  $2m$  con  $f \in H^{s-2m}(\Omega)$  donde  $s \geq 2m$ , entonces  $u$  pertenecerá a  $H^s(\Omega)$  y esto queda de manifiesto en el siguiente resultado.

**Teorema 39** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio suave y sea  $u \in V$  la solución al VBVP

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad v \in V \quad (156)$$

donde  $V \subset H^m(\Omega)$ . Si  $f \in H^{s-2m}(\Omega)$  con  $s \geq 2m$ , entonces  $u \in H^s(\Omega)$  y la estimación

$$\|u\|_{H^s} \leq C \|f\|_{H^{s-2m}} \quad (157)$$

se satisface.

## 2. Funciones Definidas por Tramos

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio, y  $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$  una partición o descomposición en subdominios  $\Omega_i$  sin traslape del dominio  $\Omega$  -también conocida como malla gruesa  $\mathcal{T}_H$ . Un ejemplo de un dominio  $\Omega$  y su descomposición en subdominios  $\Omega_i$  y cada  $\Omega_i$  a su vez descompuesto en  $\Omega_e$  subdominios se muestra en la figura:

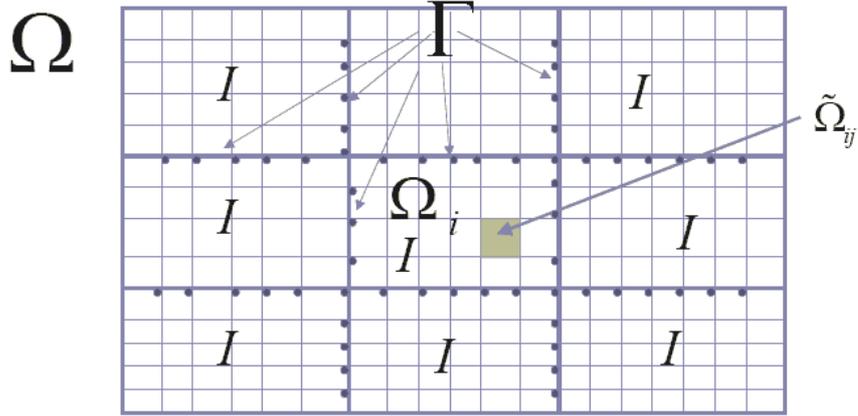


Figura 1: El dominio  $\Omega$ , su frontera externa  $\partial\Omega$  y la frontera interna  $\Gamma$ .

Se asume que:

- 1.-  $\Omega_i$ , para  $i = 1, \dots, E$  es un subdominio de  $\Omega$ ,
- 2.-  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ , siempre que  $i \neq j$ .
- 3.-  $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^E \overline{\Omega_i}$ .

La notación  $\partial\Omega$  y  $\partial\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, E$  es tomada de la frontera del dominio  $\Omega$  y la frontera del subdominio  $\Omega_i$  respectivamente, claramente

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^E \partial\Omega_i. \quad (158)$$

Adicionalmente definimos a la frontera interior como

$$\Gamma = \bigcup_{i \neq j} \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \quad (159)$$

y a  $\partial\Omega$  como la frontera exterior del dominio  $\Omega$ , denotamos por  $H$  al diámetro  $H_i = \text{Diam}(\Omega_i)$  de cada  $\Omega_i$  que satisface  $\text{Diam}(\Omega_i) \leq H$  para cada  $i =$

$1, 2, \dots, E$ , además, cada subdominio  $\Omega_i$  es descompuesto en un mallado fino  $\mathcal{T}_h$  de  $K$  subdominios mediante una triangulación  $\Omega_e$  de modo que esta sea conforme, denotamos por  $h$  al diámetro  $h_i = \text{Diam}(\Omega_e)$  de cada  $\Omega_e$  que satisface  $\text{Diam}(\Omega_e) \leq h$  para cada  $e = 1, 2, \dots, K$  de cada  $i = 1, 2, \dots, E$ .

También asumimos que salvo en un conjunto de medida cero sobre  $\Gamma$  se define un único vector normal denotado por  $\underline{n}$  cuyo sentido se elige arbitrariamente y el lado positivo de  $\Gamma$  es definido hacia el sentido positivo del vector normal.

Sea  $D(\Omega)$  un espacio lineal de funciones definidas en  $\Omega$ , entonces

**Definición 40** *Identificamos como una sola función, a dos funciones  $u, w \in D(\Omega)$  cuyo dominio de definición está contenido en  $\Omega$ , cuando se satisface la condición de que el conjunto de puntos en los cuales  $u \neq w$  tiene medida de Lebesgue cero.*

Dada una partición  $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$  del dominio  $\Omega$ , entonces

**Definición 41** *Una función definida por pedazos es una sucesión de funciones  $\{w_1, \dots, w_E\}$ , tal que para cada  $i = 1, \dots, E$ , la función  $w_i$  esta definida en  $\Omega_i$ . Dada una función  $w$  definida en  $\Omega$  esta tiene una única función definida por pedazos  $\{w_1, \dots, w_E\}$ , tal que*

$$w_i = w|_{\Omega_i} \quad \text{con } i = 1, \dots, E \quad (160)$$

donde  $w|_{\Omega_i}$  es la restricción de  $w$  a  $\Omega_i$ .

Esto establece una correspondencia biunívoca entre las funciones definidas en  $\Omega$  y las funciones definidas por pedazos.

**Definición 42** *Identificaremos a la función  $w$  definida en casi todos lados salvo un conjunto de medida cero en  $\Omega$  y la correspondiente sucesión  $\{w_1, \dots, w_E\}$ .*

Así, dada una función  $w$  contenida en  $\Omega$ , la sucesión  $\{w_1, \dots, w_E\}$  será referida como la representación definida por pedazos de  $w$  y las funciones  $w_i, i = 1, \dots, E$  como componentes locales de  $w$ . También, establecemos una correspondencia biunívoca entre los espacios  $\{D(\Omega_1), \dots, D(\Omega_E)\}$  y  $\hat{D}(\Omega)$  en  $\Omega$ .

**Definición 43** *Dada una familia  $\{D(\Omega_1), \dots, D(\Omega_E)\}$  de espacios lineales definidos en  $\Omega_1, \dots, \Omega_E$  respectivamente, definimos el espacio lineal  $\hat{D}(\Omega)$  contenido en  $\Omega$  por*

$$\hat{D}(\Omega) \equiv D(\Omega_1) \oplus \dots \oplus D(\Omega_E). \quad (161)$$

**Teorema 44** *Sea  $\{w_1, \dots, w_E\}$  la representación en pedazos de cualquier función  $w$ , entonces  $w \in \hat{D}(\Omega)$  si y sólo si  $w_i \in D(\Omega_i)$  para todo  $i = 1, \dots, E$ .*

**Definición 45** *El espacio lineal de funciones definidas por pedazos  $\hat{D}(\Omega)$  por el espacio cuyos elementos son la restricción a  $\Omega_i$  de las funciones pertenecientes a  $D(\Omega_i)$ .*

En cuyo caso la función de  $D(\Omega)$  a  $\hat{D}(\Omega)$  la cual asocia a cada  $w \in D(\Omega)$  una representación en pedazos de

$$\{w_1, \dots, w_E\} \in D(\Omega_1) \oplus \dots \oplus D(\Omega_E) \quad (162)$$

es una biyección la cual es referida como la inmersión natural de  $D(\Omega)$  sobre  $D(\Omega_1) \oplus \dots \oplus D(\Omega_E)$ . En lo sucesivo identificaremos los dos espacios lineales y escribiremos

$$D(\Omega) \subset D(\Omega_1) \oplus \dots \oplus D(\Omega_E). \quad (163)$$

En vista de las definiciones anteriores, para cada función  $v \in \hat{D}(\Omega)$ , existe una sucesión de funciones  $\{v_1, \dots, v_E\}$  tal que  $v_i = v|_{\Omega_i}; i = 1, \dots, E$ , donde  $v|_{\Omega_i}$  es la restricción de  $v$  a  $\Omega_i$ .

Puesto que una función  $v \in \hat{D}(\Omega)$  se forma por las restricciones de funciones definidas de manera independiente en cada subdominio  $\Omega_i$ , esta es en general totalmente discontinua en la frontera interior  $\Gamma$ , así, las funciones que pertenecen a este espacio pueden tener discontinuidades de salto finitas tanto en el valor de la función como en el valor de sus derivadas normales en  $\Gamma$ .

Cuando se califica a una función como continua, se entiende que la función es continua en su valor, sin asumir nada acerca de la continuidad en sus derivadas. Aunque es claro que la función es continua en todo  $\Omega$ , esto es, en cada subdominio  $\Omega_i$  y en la frontera interior  $\Gamma$ , se pondrá énfasis en la continuidad a través de  $\Gamma$ . Cuando se califica a una función como totalmente continua, se entiende que la función es continua tanto en su valor como en sus derivadas normales a través de  $\Gamma$ . Cuando se califica a una función como totalmente discontinua, se entiende que la función puede presentar discontinuidades tanto en su valor como en sus derivadas normales a través de  $\Gamma$ .

Sea  $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$  donde  $\partial\Omega_i$  y  $\partial\Omega_j$  son las fronteras de dos subregiones adyacentes, entonces definimos como la traza a la restricción de  $v^i$  a  $\Gamma_{ij}$ .

Pero como  $\Gamma_{ij}$ , para dos subregiones vecinas hay dos trazas definidas una que corresponde a  $v^i$  y otra a  $v^j$ , entonces se requiere introducir la siguiente notación para poderlas distinguir entre si:

$$v_+ \equiv Tr(v^i) \quad (164)$$

cuando  $\Omega_i$  cae del lado positivo de  $\Gamma_{ij}$  y

$$v_- \equiv Tr(v^j) \quad (165)$$

en caso contrario. Aquí  $Tr(v)$  designa al operador traza de la función  $v$ . En general  $v_+ \neq v_-$  ya que se trabaja con espacios de funciones definidas por tramos.

**Observación 46** *Notemos que al considerar una función  $w$  en  $\Omega$ , su definición en  $\Gamma$  es innecesaria, ya que la medida de Lebesgue de  $\Gamma$  es cero. Si la traza de*

$w_\alpha$  es definida en casi todos lados salvo un conjunto de medida cero sobre  $\partial\Omega_\alpha$  para  $\alpha = 1, \dots, E$ , entonces tal traza es también definida en  $\Gamma$ . En particular, si la traza de  $w_\alpha$  esta definida sobre  $\partial\Omega_\alpha$  para cada  $\alpha = 1, \dots, E$ , entonces ellas definen dos funciones definidas en casi todos lados salvo un conjunto de medida cero sobre  $\Gamma$ , denotadas por  $(w_+, w_-)$  correspondientes a los lados de trazas positivas y negativas de  $\Gamma$  respectivamente.

**Definición 47** El salto de  $v$  sobre  $\Gamma$  de funciones definidas por pedazos como

$$[[w]] \equiv w_+ - w_- \quad (166)$$

y el promedio como

$$\dot{w} \equiv \frac{1}{2}(w_+ + w_-) \quad (167)$$

respectivamente.

Observemos que tanto el promedio de una función  $\dot{w}$ , como el producto  $[w] \cdot \underline{n}$  no depende de como se elija el sentido del vector normal unitario  $\underline{n}$  en  $\Gamma$ , además las siguientes identidades se satisfacen

$$w_+ = \dot{w} + \frac{1}{2} [[w]] \quad \text{y} \quad w_- = \dot{w} - \frac{1}{2} [[w]]. \quad (168)$$

La discontinuidad de una función en la frontera interior  $\Gamma$  se puede expresar ya sea especificando los valores de sus trazas en  $\Gamma$ , o bien, especificando los valores de su promedio y de su salto en  $\Gamma$ . Además, si la función  $v$  es continua a través de  $\Gamma$  se tiene que

$$v = v_+ = v_- = \dot{v} \quad \text{y que} \quad [[v]] = 0.$$

## 2.1. Espacios de Sobolev de Funciones Definidas por Tramos

Dada una familia de espacios lineales  $\{D(\Omega_1), \dots, D(\Omega_E)\}$ , tal que  $D(\Omega_i)$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, E$ , es un espacio lineal de funciones definido en casi todos lados salvo un conjunto de medida cero en  $\Omega_i$ , se puede considerar el espacio

$$D(\Omega) = D(\Omega_1) \oplus \dots \oplus D(\Omega_E) \quad (169)$$

entonces, los elementos de  $D(\Omega)$  son funciones definidas por tramos,  $(w_1, \dots, w_E)$ , con  $w_i \in D(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, E$ .

**Definición 48** El espacio de Sobolev de orden  $p \geq 0$  para funciones definidas por tramos esta dado por

$$\hat{H}^p(\Omega, \Pi) = H^p(\Omega_1) \oplus \dots \oplus H^p(\Omega_E) \quad (170)$$

aquí,  $H^p(\Omega_i)$  es el espacio de Sobolev de orden  $p$ , de funciones definidas en  $\Omega_i$ . Cada función  $w \in \hat{H}^p(\Omega)$  es una sucesión,  $w \equiv (w_1, \dots, w_E)$ , con  $w_i \in H^p(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, E$ .

Observemos que cuando  $w \in H^p(\Omega)$ , entonces la restricción,  $w_i$  de  $w$  a  $\Omega_i$  tiene la propiedad que  $w_i \in H^p(\Omega_i)$ . Por lo tanto

$$H^p(\Omega) \subset \hat{H}^p(\Omega) \quad (171)$$

Para  $p > 0$ , esta es una inclusión propia. Sin embargo para  $p = 0$ ,  $H^0(\Omega) \equiv \hat{H}^0(\Omega) \equiv L^2(\Omega)$ . Además

$$H^0(\Omega) \equiv \hat{H}^0(\Omega) \supset \hat{H}^p(\Omega) \quad \forall p \geq 0 \quad (172)$$

Aquí las funciones definidas en  $\Omega$  han sido identificadas con sus representaciones por partes. Todos los espacios  $\hat{H}^p(\Omega)$ , para  $p = 0, 1, 2, \dots$ , están hechos de funciones las cuales pertenecen a  $H^0(\Omega) \equiv L^2(\Omega)$ .

**Teorema 49** Para cada  $p \geq 0$ , una función  $\hat{u} = (u_1, \dots, u_E) \in H^0(\Omega)$  pertenecen a  $\hat{H}^p(\Omega)$  si y sólo si la norma

$$\|\hat{u}\|_{p,\Omega,\Pi} = \left( \sum_{i=1}^E \|v_i\|_{p,\Omega_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (173)$$

está bien definida.

Cuando  $\hat{H}^p(\Omega)$  es equipada con esta norma el correspondiente producto interior  $(\cdot, \cdot)$ , se convierte en un espacio de Hilbert.

**Observación 50** Las siguientes propiedades se satisfacen:

1.- Cuando  $w \in H^p(\Omega)$ , entonces la restricción de  $w$  a  $\Omega_\alpha$ ,  $w_\alpha$  tiene la propiedad de que  $w_\alpha \in H^p(\Omega_p)$ . Por lo tanto

$$H^p(\Omega) \subset \hat{H}^p(\Omega) \quad (174)$$

2.- Cuando  $u \in \hat{H}^1(\Omega)$  entonces

$$[[u]] = 0 \text{ sobre } \Gamma \Leftrightarrow u \in H^1(\Omega) \quad (175)$$

3.- Cuando  $u \in \hat{H}^2(\Omega)$  entonces

$$[[u]] = \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ sobre } \Gamma \Leftrightarrow u \in H^2(\Omega). \quad (176)$$

La identidad

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^E \int_{\partial\Omega_\alpha} u_\alpha w_\alpha n_i dx &= \int_{\partial\Omega} u w n_i dx - \int_{\Gamma} (u w) n_i dx \\ &= \int_{\partial\Omega} u w n_i dx - \int_{\Gamma} \left( \dot{u} [[w]] + \dot{w} [[u]] \right) n_i dx \end{aligned} \quad (177)$$

puede ser fácilmente verificada. Aquí  $n_i$  es cualquier componente del vector normal unitario.

## 2.2. Fórmulas Green-Herrera

Sea  $\Omega$  un dominio y  $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$  una partición o descomposición en subdominios del dominio  $\Omega$ . Sea una ecuación diferencial en forma general

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}u_\Omega \equiv f_\Omega, \text{ en } \Omega_i, i = 1, \dots, E \quad (178)$$

con condiciones de frontera

$$B_j u = B_j u_\partial \equiv g_\partial, \text{ en } \partial\Omega \quad (179)$$

y saltos prescritos

$$J_k u = J_k u_\Gamma \equiv j_\Gamma, \text{ en } \Gamma \quad (180)$$

donde  $B_j$  y  $J_k$  son  $k$  operadores diferenciales. Aquí,  $u_\Omega = (u_\Omega^1, \dots, u_\Omega^E)$ ,  $u_\partial$ , y  $u_\Gamma$  son funciones dadas en  $\widehat{D}_1(\Omega)$ , que definen los datos del problema. De manera tal que tenemos un problema bien planteado, es decir, se garantiza la existencia y la unicidad de la solución. El problema enunciado se denomina *Problema con Valores en la Frontera con Saltos Prescritos*.

Si  $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ , entonces la ecuación diferencial  $\mathcal{L}u$  está definida en el interior de cada  $\Omega_i$  para  $i = 1, \dots, E$ . De igual forma, si  $w \in \widehat{D}_2(\Omega)$  entonces  $\mathcal{L}^*w$  está definida en el interior de cada  $\Omega_i$ , para  $i = 1, \dots, E$ . Ambos operadores diferenciales podrían no estar definidas en  $\Gamma \cup \partial\Omega$ .

Y como por definición del operador diferencial  $\mathcal{L}$  y su operador diferencial adjunto formal  $\mathcal{L}^*$  satisfacen la condición

$$w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w = \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}}(u, w) \quad (181)$$

donde  $\underline{\mathcal{D}}(u, w)$  es una función bilineal definida en  $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$  apropiada para el operador  $\mathcal{L}$ . Además asumimos que existen funcionales bilineales  $\mathcal{B}(u, w)$ ,  $\mathcal{C}(w, u)$ ,  $\mathcal{J}(u, w)$  y  $\mathcal{K}(w, u)$  donde las primeras dos están definidas en  $\partial\Omega$  y las dos últimas sobre  $\Gamma$ , tal que

$$\underline{\mathcal{D}}(u, w) \cdot \underline{n} = \mathcal{B}(u, w) - \mathcal{C}(w, u) \quad \text{en } \partial\Omega \quad (182)$$

y

$$-[[\underline{\mathcal{D}}(u, w)]] \cdot \underline{n} = \mathcal{J}(u, w) - \mathcal{K}(w, u) \quad \text{en } \Gamma \quad (183)$$

generalmente, las definiciones de  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{J}$  depende de las condiciones de frontera y de criterios de suavidad del problema en particular de que se trate, si los coeficientes del operador diferencial son continuos, las formulas de Herrera para  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{K}$  satisfacen

$$[[\underline{\mathcal{D}}(u, w)]] = \underline{\mathcal{D}}(\dot{u}, [[w]]) + \underline{\mathcal{D}}([[u]], \dot{w}) \quad (184)$$

i.e.

$$\mathcal{J}(u, w) \equiv -\underline{\mathcal{D}}([[u]], \dot{w}) \cdot \underline{n} \text{ y } \mathcal{K}(w, u) \equiv \underline{\mathcal{D}}(\dot{u}, [[w]]) \cdot \underline{n}. \quad (185)$$

Si integramos la ecuación (181) cada  $\Omega_i$  para  $i = 1, 2, \dots, E$ , y se considera  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^E \bar{\Omega}_i$ , se tiene que

$$\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} (w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathfrak{D}(u, w) d\mathbf{x} \quad (186)$$

aplicando la teorema generalizado de la divergencia

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathfrak{D}(u, w) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathfrak{D}(u, w) \cdot \underline{n}_{\partial\Omega} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} [[\mathfrak{D}(u, w)]] \cdot \underline{n}_{\Gamma} d\mathbf{x} \quad (187)$$

en el lado derecho de la Ec. (186) obtenemos

$$\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w\mathcal{L}u d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} u\mathcal{L}^*w d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathfrak{D}(u, w) \cdot \underline{n} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} [[\mathfrak{D}(u, w)]] \cdot \underline{n} d\mathbf{x} \quad (188)$$

desarrollando el algebra de saltos en el segundo sumando del lado derecho de la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w\mathcal{L}u d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} u\mathcal{L}^*w d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \mathfrak{D}(u, w) \cdot \underline{n} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} [[\mathfrak{D}(\dot{u}, [w])]] \cdot \underline{n} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} [[\mathfrak{D}([u], \dot{w})]] \cdot \underline{n} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (189)$$

Ahora, para poder usar las formulas de Green se introducen las siguientes funcionales bilineales reales definidas en  $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ . Sean las funcionales bilineales  $\mathcal{B}(u, w)$ ,  $\mathcal{C}^*(u, w)$ ,  $\mathcal{J}(u, w)$  y  $\mathcal{K}^*(u, w)$  tales que producen las siguientes descomposiciones

$$\mathfrak{D}(u, w) \cdot \underline{n} = \mathcal{B}(u, w) - \mathcal{C}^*(u, w) \quad \text{en } \partial\Omega \quad (190)$$

$$\mathfrak{D}(\dot{u}, [[w]]) \cdot \underline{n} \equiv \mathcal{K}^*(u, w) \quad \text{en } \Gamma \quad (191)$$

$$-\mathfrak{D}([u], \dot{w}) \cdot \underline{n} \equiv \mathcal{J}(u, w) \quad \text{en } \Gamma \quad (192)$$

donde  $\mathcal{C}^*(u, w)$  es el transpuesto de la funcional bilineal  $\mathcal{C}(w, u)$  y se define como

$$\mathcal{C}^*(u, w) \equiv \mathcal{C}(w, u) \quad (193)$$

de igual manera para

$$\mathcal{K}^*(u, w) \equiv \mathcal{K}(w, u). \quad (194)$$

La funcional bilineal  $\mathcal{B}(u, w)$  está en función de los valores de frontera (condiciones de frontera y condiciones iniciales), mientras que la funcional  $\mathcal{C}^*(u, w)$  involucra los valores desconocidos en  $\partial\Omega$  (información desconocida).

Por otra parte, la funcional  $\mathcal{K}^*(u, w)$  involucra los valores relacionados con los promedios  $\hat{u}$  en  $\Gamma$  mientras que la funcional  $\mathcal{J}(u, w)$  involucra los valores relacionados con los saltos  $[[u]]$  en  $\Gamma$ .

Adicionalmente, consideramos las funcionales bilineales reales definidas en  $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ :

$$\mathcal{P}(u, w) \equiv w\mathcal{L}u, \quad \text{en } \Omega_i \text{ para } i = 1, \dots, E \quad (195)$$

$$\mathcal{J}^*(u, w) \equiv w\mathcal{L}^*u, \quad \text{en } \Omega_i \text{ para } i = 1, \dots, E \quad (196)$$

Sustituyendo las Ecs. (190) a (196) en Ec. (189) y reordenando los términos, se obtiene la fórmula de Green-Herrera

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^E \int_{\widehat{\Omega}_i} \mathcal{P}(u, w) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}(u, w) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \mathcal{J}(u, w) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^E \int_{\widehat{\Omega}_i} \mathcal{J}^*(u, w) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^*(u, w) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \mathcal{K}^*(u, w) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (197)$$

Ahora, sean las funcionales bilineales reales

$$\langle \mathcal{P}u, w \rangle, \langle \mathcal{B}u, w \rangle, \langle \mathcal{J}u, w \rangle, \langle \mathcal{Q}^*u, w \rangle, \langle \mathcal{C}^*u, w \rangle \text{ y } \langle \mathcal{K}^*u, w \rangle \quad (198)$$

definidas en  $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$  tales que

$$\langle \mathcal{P}u, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^E \int_{\widehat{\Omega}_i} \mathcal{P}(u, w) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\widehat{\Omega}_i} w\mathcal{L}u d\mathbf{x} \quad \text{en } \Omega_i \text{ para } i = 1, \dots, E \quad (199)$$

$$\langle \mathcal{B}u, w \rangle \equiv \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}(u, w) d\mathbf{x} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (200)$$

$$\langle \mathcal{J}u, w \rangle \equiv \int_{\Gamma} \mathcal{J}(u, w) d\mathbf{x} \quad \text{en } \Gamma \quad (201)$$

$$\langle \mathcal{Q}^*u, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^E \int_{\widehat{\Omega}_i} \mathcal{J}^*(u, w) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\widehat{\Omega}_i} w\mathcal{L}^*u d\mathbf{x} \quad \text{en } \Omega_i \text{ para } i = 1, \dots, E \quad (202)$$

$$\langle \mathcal{C}^*u, w \rangle \equiv \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^*(u, w) d\mathbf{x} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (203)$$

$$\langle \mathcal{K}^*u, w \rangle \equiv \int_{\Gamma} \mathcal{K}^*(u, w) d\mathbf{x} \quad \text{en } \Gamma. \quad (204)$$

Si se sustituye las Ecs. (199) a (204) en (197), se tiene

$$\langle \mathcal{P}u, w \rangle - \langle \mathcal{B}u, w \rangle - \langle \mathcal{J}u, w \rangle = \langle \mathcal{Q}^*u, w \rangle - \langle \mathcal{C}^*u, w \rangle - \langle \mathcal{K}^*u, w \rangle \quad (205)$$

que se satisface para todo  $(u, w) \in \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ , o bien, por la propiedad de linealidad

$$\langle (\mathcal{P} - \mathcal{B} - \mathcal{J})u, w \rangle = \langle (Q^* - \mathcal{C}^* - \mathcal{K}^*)u, w \rangle \quad (206)$$

o de manera compacta

$$\mathcal{P} - \mathcal{B} - \mathcal{J} = Q^* - \mathcal{C}^* - \mathcal{K}^* \quad (207)$$

esta expresión representa la fórmula Green-Herrera para operadores en campos discontinuos.

Las funcionales bilineales

$$\langle \mathcal{P}u, w \rangle, \langle \mathcal{B}u, w \rangle, \langle \mathcal{J}u, w \rangle, \langle Q^*u, w \rangle, \langle \mathcal{C}^*u, w \rangle \text{ y } \langle \mathcal{K}^*u, w \rangle \quad (208)$$

también se pueden considerar como operadores funcionales lineales definidos en  $\widehat{D}_1(\Omega)$  y valuadas en  $\widehat{D}_2^*(\Omega)$ , i.e., valuados en el dual algebraico de  $\widehat{D}_2(\Omega)$ . Por ejemplo,  $\mathcal{P} : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$  donde  $\mathcal{P}u \in \widehat{D}_2^*(\Omega)$  y  $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ . De igual modo, los transpuestos de las funcionales bilineales

$$\langle \mathcal{P}^*u, w \rangle, \langle \mathcal{B}^*u, w \rangle, \langle \mathcal{J}^*u, w \rangle, \langle Qu, w \rangle, \langle \mathcal{C}u, w \rangle \text{ y } \langle \mathcal{K}u, w \rangle \quad (209)$$

se pueden considerar como operadores funcionales lineales definidos en  $\widehat{D}_2(\Omega)$  y valuados en  $\widehat{D}_1^*(\Omega)$ , i.e., valuados en el espacio dual algebraico de  $\widehat{D}_1(\Omega)$ , por ejemplo  $\mathcal{P}^* : \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_1^*(\Omega)$  donde  $\mathcal{P}w \in \widehat{D}_1^*(\Omega)$  y  $w \in \widehat{D}_2(\Omega)$ .

Finalmente, sean las funciones  $u_\partial \in \widehat{D}_1(\Omega)$  y  $u_\Gamma \in \widehat{D}_1(\Omega)$ . Entonces las funcionales lineales  $g_\partial \in \widehat{D}_2^*(\Omega)$  y  $j_\Gamma \in \widehat{D}_2^*(\Omega)$  se define como

$$g_\partial(w) \equiv \langle \mathcal{B}u_\partial, w \rangle \text{ para todo } w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (210)$$

$$j_\Gamma(w) \equiv \langle \mathcal{J}u_\Gamma, w \rangle \text{ para todo } w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (211)$$

o brevemente:

$$g_\partial j_\Gamma \mathcal{B}u_\partial \quad (212)$$

$$j_\Gamma \equiv \mathcal{J}u_\Gamma. \quad (213)$$

**Formula de Green** La formula de Green es un caso particular de las formulas de Green-Herrera cuando  $\langle \mathcal{J}u, w \rangle = 0$  y  $\langle \mathcal{K}^*u, w \rangle = 0$ , lo cual implica la continuidad de la función  $u$  y de sus derivadas normales a través de  $\Gamma$ .

Supóngase que las condiciones de salto en  $\Gamma$  son nulas, entonces al aplicar el teorema de la divergencia (187) en el lado derecho de Ec. (186) se obtienen

$$\sum_{i=1}^E \int_{\widehat{\Omega}_i} w \mathcal{L}u - \sum_{i=1}^E \int_{\widehat{\Omega}_i} u \mathcal{L}^* w dx = \int_{\partial\Omega} \underline{\mathcal{D}}(u, w) \cdot \underline{n} dx. \quad (214)$$

Si se compara con la Ec. (188) se observa que  $[\underline{\mathcal{Q}}(u, w)] = 0$ . Ahora, si se introduce las funcionales bilineales previamente definidas se tiene

$$\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \mathcal{P}(u, w) d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \mathcal{J}^*(u, w) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} (\mathcal{B}(u, w) - \mathcal{C}^*(u, w)) d\underline{x} \quad (215)$$

de esta forma se obtiene

$$\langle \mathcal{P}u, w \rangle - \langle \mathcal{B}u, w \rangle = \langle \mathcal{Q}^*u, w \rangle - \langle \mathcal{C}^*u, w \rangle \quad (216)$$

y más compactamente

$$\mathcal{P} - \mathcal{B} = \mathcal{Q}^* - \mathcal{C}^* \quad (217)$$

para todo  $(u, w) \in \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ . Esta última formula, es la llamada formula de Green convencional.

### 2.3. Formulaciones Variacionales con Valor en la Frontera con Saltos Prescritos

**Definición 51** Se dice que las condiciones de frontera  $g_\partial \in \widehat{D}_2^*(\Omega)$  en  $\partial\Omega$  y las condiciones de salto prescrito  $j_\Gamma \in \widehat{D}_2^*(\Omega)$  son condiciones compatibles cuando existe una función  $u_{\partial\Gamma} \in \widehat{D}_1(\Omega)$  tal que

$$\begin{aligned} g_\partial &= \mathcal{B}u_{\partial\Gamma}, \text{ en } \partial\Omega \\ j_\Gamma &= \mathcal{J}u_{\partial\Gamma}, \text{ en } \Gamma. \end{aligned} \quad (218)$$

Es decir, que ambas condiciones se pueden derivar de una única función, de modo que realmente no imponen condiciones contradictorias.

**Definición 52** El problema de contorno con valores en la frontera con saltos prescritos (BVPJ) consiste en buscar una función  $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ , tal que satisfaga:

1) El operador

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}u_\Omega = f_\Omega, \text{ en } \Omega \quad (219)$$

2) Condiciones de frontera

$$\mathcal{B}(u, \cdot) = \mathcal{B}(u_\partial, \cdot) = g_\partial, \text{ en } \partial\Omega \quad (220)$$

3) Saltos prescritos

$$\mathcal{J}(u, \cdot) = \mathcal{J}(u_\Gamma, \cdot) = j_\Gamma, \text{ en } \Gamma \quad (221)$$

donde  $u_\Omega$ ,  $u_\partial$ , y  $u_\Gamma$  son funciones dadas en  $\widehat{D}_1(\Omega)$ , que definen los datos del problema, además las condiciones de frontera en  $\partial\Omega$  y las condiciones de salto en  $\Gamma$  deben de ser compatibles.

Además se usa la convención de que la Ec. (??) que se satisface solamente en los puntos interiores de cada una de las subregiones  $\Omega_i, i = 1, \dots, E$ .

Si definimos las siguientes funcionales  $f, g$  y  $j$  que pertenecen a  $\widehat{D}_2^*(\Omega)$  como

$$\langle f, w \rangle \equiv \langle \mathcal{P}u_\Omega, w \rangle, \text{ para todo } w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (222)$$

$$\langle g, w \rangle \equiv \langle \mathcal{B}u_\partial, w \rangle, \text{ para todo } w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (223)$$

$$\langle j, w \rangle \equiv \langle \mathcal{J}u_\Gamma, w \rangle, \text{ para todo } w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (224)$$

entonces

**Definición 53** Una formulación débil del problema con valores en la frontera con saltos prescritos se puede escribir como

$$\mathcal{P}u = f; \quad \mathcal{B}u = g; \quad \mathcal{J}u = j. \quad (225)$$

**Definición 54** Llamaremos solución de un problema con valores en la frontera con saltos prescritos, a una función  $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$  que satisfaga la formulación débil del problema con valores en la frontera con saltos prescritos.

En lo sucesivo se supondrá que existe al menos una solución del problema con valores en la frontera con saltos prescritos además la Ec. (225) es equivalente a la siguiente ecuación simple:

$$(\mathcal{P} - \mathcal{B} - \mathcal{J})u = f - g - j. \quad (226)$$

Una condición suficiente para que la Ec. (226) sea equivalente a la Ec. (225) es que  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{J}$  sean operadores de frontera para  $\mathcal{P} : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$ .

Si escribimos la Ec. (226) de manera más explícita resulta

$$\langle (\mathcal{P} - \mathcal{B} - \mathcal{J})u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle \quad \text{para todo } w \in \widehat{D}_2^*(\Omega) \quad (227)$$

la cual representa la formulación variacional del problema con valores en la frontera con saltos prescritos y nos referiremos a ella como la ecuación variacional en términos de los datos del problema.

Haciendo uso de la fórmula Green-Herrera Ec. (207) se obtiene la siguiente formulación variacional equivalente en términos de la información complementaria:

$$\langle (Q - \mathcal{C} - \mathcal{K})^*u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle \quad \text{para todo } w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (228)$$

cuando se aplica el método de residuos pesados, la solución aproximada  $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$  satisface

$$\langle (Q - \mathcal{C} - \mathcal{K})^*\tilde{u}, w^\alpha \rangle = \langle f - g - j, w^\alpha \rangle \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, E \quad (229)$$

donde  $\{w^1, \dots, w^E\} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$  es un sistema de funciones de peso.

Como la solución exacta satisface la Ec. (228) entonces se cumple que

$$\langle (Q - \mathcal{C} - \mathcal{K})^*(u - \tilde{u}), w^\alpha \rangle = 0 \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, E \quad (230)$$

este resultado puede ser usado para analizar la información acerca de la solución exacta que está contenida en la solución aproximada.

### 3. Métodos de Funciones Discontinuas Definidas por Tramos

Consideremos la ecuación de Poisson en un dominio  $\Omega$  y  $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$  una descomposición en subdominios del dominio  $\Omega$  y asumiendo condiciones de frontera tipo Dirichlet igual a cero, i.e.

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{u} &= f_\Omega \text{ en } \Omega \\ \bar{u} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (231)$$

el espacio  $\overline{D}$ , donde la solución  $\bar{u}$  es buscada, se define como

$$\overline{D} = \{v \in H^2(\Omega) \mid \text{traza } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \quad (232)$$

otro espacio que usaremos en lo sucesivo es

$$\tilde{D} = \left\{ v \in \hat{H}^2(\Omega, \Pi) \mid \text{traza } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}. \quad (233)$$

Cuando el dato  $f_\Omega$  es tal que la solución  $\bar{u}$  pertenece a  $\overline{D}$ , entonces este problema es equivalente a el siguiente problema con valores en la frontera con saltos prescritos (BVPJ):

Encontrar  $\tilde{u} \in \tilde{D}$  tal que

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u} &= f_\Omega \text{ en } \Omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, E \\ [[\tilde{u}]] &= \left[ \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ en } \Gamma. \end{aligned} \quad (234)$$

aquí las condiciones de frontera no aparecen ya que estas fueron incorporadas en la definición del espacio  $\tilde{D}$ , más precisamente,  $\tilde{u} \in \tilde{D}$  satisface la ecuación (235) si y sólo si  $\tilde{u} = u$ .

Se desarrollarán dos maneras de aproximar el problema dado por la Ec. (234):

A.- Una manera es introducir una función auxiliar  $\tilde{u}_p \in \tilde{D}$  que satisfaga

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u}_p &= f_\Omega \text{ en } \Omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, E \\ [[\tilde{u}_p]] &= 0 \text{ y } \hat{u}_p = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{aligned} \quad (235)$$

entonces, si  $u \equiv \tilde{u} - \tilde{u}_p$  obtenemos para  $u \in \tilde{D}$  las ecuaciones

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ en } \Omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, E \\ [[u]] &= 0 \text{ y } \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] = - \left[ \left[ \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial n} \right] \right] \text{ en } \Gamma. \end{aligned} \quad (236)$$

B.- Otra opción es remplazar la ecuación (235) por

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u}_p &= f_\Omega \text{ en } \Omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, E & (237) \\ \left[ \left[ \frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial n} \right] \right] &= 0 \text{ y } \widehat{\frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial n}} = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{aligned}$$

en cuyo caso

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ en } \Omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, E & (238) \\ [[u]] &= -[[\tilde{u}_p]] \text{ y } \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ en } \Gamma. \end{aligned}$$

La primera aproximación da lugar al algoritmo Neumann-Neumann y la segunda aproximación da lugar al algoritmo Dirichlet-Dirichlet. Independientemente de la aproximación elegida, se están buscando funciones en el espacio lineal

$$D \equiv \left\{ u \in \tilde{D} \mid -\Delta u = 0 \text{ en } \Omega_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots, E \right\}. \quad (239)$$

### 3.1. Algoritmos a Nivel Continuo

En esta sección, los algoritmos mostrados en la sección anterior, serán presentados a nivel discreto en una manera en que pueden ser aplicados a cualquier número de dimensiones y a cualquier número de particiones del subdominio  $\Omega$ , incluyendo particiones con vértices y operadores diferenciales que sean positivos pero no positivos definidos. Aprovechando la ventaja del tipo de sistema discreto que se obtiene se usará en el algoritmo el método para resolución de sistemas lineales Gradiente Conjugado, ver sección (5.1.2).

#### 3.1.1. Algoritmo Neumann-Neumann

Construir:

1.-  $\tilde{u}_p \in \tilde{D}$  que satisfaga

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u}_p &= f_\Omega \text{ en } \Omega_\alpha; \alpha = 1, \dots, E & (240) \\ [[\tilde{u}_p]] &= 0 \text{ y } \widehat{\tilde{u}_p} = 0 \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

$\tilde{u} \in \tilde{D}$  que satisfaga

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u} &= f_\Omega \text{ en } \Omega_\alpha; \alpha = 1, \dots, E & (241) \\ [[\tilde{u}]] &= \left[ \left[ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

y definimos  $u = \tilde{u} - \tilde{u}_p$ , donde  $u = u_{21} \oplus u_{22}$ .

2.- Construir  $u_{21} \in D$ , tal que

$$\left[ \left[ \frac{\partial u_{21}}{\partial n} \right] \right] = - \left[ \left[ \frac{\partial \hat{u}_p}{\partial n} \right] \right] \text{ y } \frac{\partial \hat{u}_{21}}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma \quad (242)$$

3.- Definiendo  $r^0 \in D$  tal que

$$[[r^0]] = 0 \text{ y } \hat{r}^0 = \hat{u}_{21} \text{ en } \Gamma \quad (243)$$

sea  $p^0 = r^0$  y  $u^0 = 0$ .

Usando el método de Gradiente Conjugado, entonces para  $n = 0, 1, 2, \dots$

4.- Construir  $\psi^n \in D$  tal que

$$\left[ \left[ \frac{\partial \psi^n}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ y } \frac{\partial \hat{\psi}^n}{\partial n} = \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial n} \text{ en } \Gamma \quad (244)$$

5.-

$$\alpha^n = \frac{p^n \cdot p^n}{p^n \cdot p^n + \psi^n \cdot \psi^n} \quad (245)$$

6.-

$$u^{n+1} = u^n + \alpha^n p^n \quad (246)$$

7.- Además, construir  $q^n \in D$  tal que

$$[[q^n]] = 0 \text{ y } \hat{q}^n = \hat{\psi}^n \text{ en } \Gamma \quad (247)$$

8.-

$$r^{n+1} = r^n - \alpha^n q^n \quad (248)$$

9.-

$$\beta^n = \frac{r^{n+1} \cdot r^{n+1}}{r^n \cdot r^n} \quad (249)$$

10.-

$$p^{n+1} = r^{n+1} + \beta^n p^n \quad (250)$$

11.-

$$n = n + 1, \quad (251)$$

y regresar a 4.

### 3.1.2. Algoritmo Dirichlet-Dirichlet

Construir:

1.-  $\tilde{u}_p \in \tilde{D}$  que satisfaga

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u}_p &= f_\Omega \text{ en } \Omega_\alpha; \alpha = 1, \dots, E & (252) \\ \left[ \left[ \frac{\tilde{u}_p}{\partial n} \right] \right] &= 0 \text{ y } \widehat{\frac{\tilde{u}_p}{\partial n}} = 0 \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

$\tilde{u} \in \tilde{D}$  que satisfaga

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u} &= f_\Omega \text{ en } \Omega_\alpha; \alpha = 1, \dots, E & (253) \\ [[u]] &= -[[\tilde{u}_p]] \text{ y } \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ en } \Gamma. \end{aligned}$$

y definimos  $u = \tilde{u} - \tilde{u}_p$ , donde  $u = u_{11} \oplus u_{12}$ .

2.- Construir  $u_{11} \in D$ , tal que

$$[[u_{11}]] = -[[\tilde{u}_p]] \text{ y } \widehat{u_{11}} = 0 \text{ en } \Gamma \quad (254)$$

3.- Definiendo  $r^0 \in D$  tal que

$$\left[ \left[ \frac{\partial r^0}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ y } \widehat{\frac{\partial r^0}{\partial n}} = \widehat{\frac{\partial u_{11}}{\partial n}} \text{ en } \Gamma \quad (255)$$

sea  $p^0 = r^0$  y  $u^0 = 0$ .

Usando el método de Gradiente Conjugado, entonces para  $n = 0, 1, 2, \dots$

4.- Construir  $\psi^n \in D$  tal que

$$[[\psi^n]] = 0 \text{ y } \widehat{\psi^n} = \widehat{p^n} \text{ en } \Gamma \quad (256)$$

5.-

$$\alpha^n = \frac{p^n \cdot p^n}{p^n \cdot p^n + \psi^n \cdot \psi^n} \quad (257)$$

6.-

$$u^{n+1} = u^n + \alpha^n p^n \quad (258)$$

7.- Además, construir  $q^n \in D$  tal que

$$\left[ \left[ \frac{\partial q^n}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ y } \widehat{\frac{\partial q^n}{\partial n}} = \widehat{\frac{\partial \psi^n}{\partial n}} \text{ en } \Gamma \quad (259)$$

$$8.- \quad r^{n+1} = r^n - \alpha^n q^n \quad (260)$$

$$9.- \quad \beta^n = \frac{r^{n+1} \cdot r^{n+1}}{r^n \cdot r^n} \quad (261)$$

$$10.- \quad p^{n+1} = r^{n+1} + \beta^n p^n \quad (262)$$

$$11.- \quad n = n + 1, \quad (263)$$

y regresar a 4.

**Observación 55** *Notemos que en estas formulaciones son tales que de manera directa se obtienen transformaciones positivo definidas sin recurrir a los multiplicadores de Lagrange.*

### 3.2. Discretización Axiomática

Sea  $\overline{D}$  un espacio de Hilbert de funciones de dimensión finita definido en  $\Omega$  de dimensión  $\overline{N}$ , sea  $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$  una partición, definiendo, para cada  $\alpha = 1, \dots, E$ ,

$$D(\Omega_\alpha) = \{v \mid v = u|_{\Omega_\alpha} \text{ y } u \in \overline{D}\} \quad (264)$$

entonces, escribimos

$$\tilde{D} = D(\Omega_1) \oplus \dots \oplus D(\Omega_E) \quad (265)$$

por lo tanto,  $\tilde{D}$  es un espacio de funciones definidas por pedazos y bajo la inmersión natural de  $\overline{D}$  dentro de  $\tilde{D}$ , tenemos que  $\overline{D} \subset \tilde{D}$ . Una función  $\tilde{w} \in \tilde{D}(\Omega)$  se dice que tiene soporte local cuando existe un  $\alpha \in \{1, \dots, E\}$  tal que el soporte de  $\tilde{w}$  esta contenido en la clausura de  $\Omega_\alpha$ .

Dada cualquier función  $\overline{w} \in \overline{D}$ , decimos que una función  $\tilde{w} \in \tilde{D}$  es hija de  $\overline{w}$ , cuando  $\tilde{w}$  es la restricción de  $\overline{w}$  a un subdominio de la partición, claramente, todas las hijas de una función  $\overline{w} \in \overline{D}$  tienen soporte local. En cuanto al producto interior en estos espacios, asumiremos que ellos satisfacen

$$u \cdot w = \sum_{\alpha=1}^E u_\alpha \cdot w_\alpha \quad (266)$$

donde,  $u = \{u^1, \dots, u^E\}$  y  $w = \{w^1, \dots, w^E\}$ .

Sea  $\overline{\mathcal{B}} \subset \overline{D}$  una base de  $\overline{D}$

$$\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{w}^1, \dots, \overline{w}^{\overline{N}}\} \quad (267)$$

entonces para cada  $i = 1, \dots, \overline{N}$ ,  $\mathcal{B}^i \subset \tilde{D}$  es una colección de hijas de  $\overline{w}^i$ . Además escribimos

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\overline{N}} \mathcal{B}^i \subset \tilde{D} \quad (268)$$

claramente, los elementos de  $\mathcal{B}$  tienen soporte local, y también asumimos que  $\mathcal{B}$ , como fue definida es una base linealmente independiente de  $\overline{D}$ .

La colección de conjuntos  $\{\mathcal{B}^1, \dots, \mathcal{B}^{\overline{N}}\}$  es clasificada en dos subfamilias  $\{\mathcal{B}_I^1, \dots, \mathcal{B}_I^{\overline{N}_I}\} \subset \{\mathcal{B}^1, \dots, \mathcal{B}^{\overline{N}}\}$  y  $\{\mathcal{B}_\Gamma^1, \dots, \mathcal{B}_\Gamma^{\overline{N}_\Gamma}\} \subset \{\mathcal{B}^1, \dots, \mathcal{B}^{\overline{N}}\}$ ; ellos han sido definidos por las siguientes condiciones  $\mathcal{B}^i \in \{\mathcal{B}_I^1, \dots, \mathcal{B}_I^{\overline{N}_I}\}$  si y sólo si la cardinalidad de  $\mathcal{B}^i$  es uno,  $\mathcal{B}^i \in \{\mathcal{B}_\Gamma^1, \dots, \mathcal{B}_\Gamma^{\overline{N}_\Gamma}\}$  si y sólo si la cardinalidad de  $\mathcal{B}^i$  es más grande que uno. Entonces

$$\{\mathcal{B}^1, \dots, \mathcal{B}^{\overline{N}}\} = \{\mathcal{B}_I^1, \dots, \mathcal{B}_I^{\overline{N}_I}\} \cup \{\mathcal{B}_\Gamma^1, \dots, \mathcal{B}_\Gamma^{\overline{N}_\Gamma}\} \quad (269)$$

definiendo

$$\mathcal{B}_I = \bigcup_{i=1}^{\overline{N}_I} \mathcal{B}_I^i \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\overline{N}_\Gamma} \mathcal{B}_\Gamma^i \quad (270)$$

tal que

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}_\Gamma. \quad (271)$$

Ahora definimos una familia de conjuntos  $\mathcal{B}_\Gamma^i$ ,  $i = 1, \dots, \overline{N}_\Gamma$ , donde cada conjunto  $\overline{\mathcal{B}}_\Gamma^i$  es definido al remplazar el conjunto  $\mathcal{B}_\Gamma^i$  por un conjunto equivalente linealmente independiente (en el sentido que cada uno de  $\mathcal{B}_\Gamma^i$  y  $\overline{\mathcal{B}}_\Gamma^i$  generan el mismo espacio lineal). La notación siguiente es adoptada

$$\mathcal{B}_\Gamma^i = \{w_M^i, w_{J_1}^i, \dots, w_{J_{m(i)}}^i\} \quad (272)$$

donde  $w_M^i$  es definida como la función madre de la función  $\overline{w}_M^i \in \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{D}$ , i.e.

$$w_M^i \equiv \overline{w}^i \in \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{D} \quad (273)$$

además, el conjunto

$$\mathcal{B}_J^i = \{w_{J_1}^i, \dots, w_{J_{m(i)}}^i\} \quad (274)$$

es un complemento algebraico del conjunto  $\{\overline{w}^i\}$ , con la propiedad que  $\overline{\mathcal{B}}_\Gamma^i$  cuando es definida por la Ec. (272), genera el mismo espacio lineal que  $\overline{\mathcal{B}}_\Gamma^i$ , otras definiciones son

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\Gamma M} &= \{w_M^1, \dots, w_M^{\overline{N}_\Gamma}\} \\ \mathcal{B}_{\Gamma J} &= \bigcup_{i=1}^{\overline{N}_\Gamma} \mathcal{B}_J^i \\ \mathcal{B}_\Gamma &= \mathcal{B}_{\Gamma M} \cup \mathcal{B}_{\Gamma J} \end{aligned} \quad (275)$$

notemos que  $\mathcal{B}_{\Gamma M} \subset \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{D}$ . Con esta definición  $\overline{\mathcal{B}}_\Gamma$  y  $\mathcal{B}_\Gamma$  generan el mismo espacio lineal, sin embargo la diferencia significativa entre  $\overline{\mathcal{B}}_\Gamma$  y  $\mathcal{B}_\Gamma$  es que todos

los elementos de  $\mathcal{B}_\Gamma$  tienen soporte local, lo cual no es cierto para  $\overline{\mathcal{B}}_\Gamma$ . Además una propiedad adicional es

$$\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{\Gamma M} + \mathcal{B}_I. \quad (276)$$

Los subespacios generados por las funciones  $\mathcal{B}_I, \mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{B}_{\Gamma J}$  y  $\mathcal{B}_{\Gamma M}$  serán denotados por  $\tilde{D}_I, \tilde{D}_\Gamma, \tilde{D}_{\Gamma_1}$ , y  $\tilde{D}_{\Gamma_2}$  respectivamente y cuyas dimensiones de los espacios  $\tilde{D}_I, \tilde{D}_\Gamma$  y  $\tilde{D}$  son  $N_I, N_\Gamma$  y  $\tilde{N}$  respectivamente y satisfacen  $\tilde{N} = N_I + N_\Gamma$ .

Además

$$\left. \begin{aligned} \tilde{D} &= \tilde{D}_I + \tilde{D}_\Gamma & \text{con } \tilde{D}_I \cap \tilde{D}_\Gamma &= \{0\} \\ \tilde{D}_\Gamma &= \tilde{D}_{\Gamma_1} + \tilde{D}_{\Gamma_2} & \text{con } \tilde{D}_{\Gamma_1} \cap \tilde{D}_{\Gamma_2} &= \{0\} \end{aligned} \right\} \quad (277)$$

y

$$\overline{D} = \tilde{D}_I + \tilde{D}_{\Gamma_2}, \quad (278)$$

la Ec. (277) implica que cualquier función  $\tilde{v} \in \tilde{D}$  y cualquier función  $\tilde{v}_\Gamma \in \tilde{D}_\Gamma$  puede ser escrita de forma única de las siguientes maneras

$$\tilde{v} = \tilde{v}_\Gamma + \tilde{v}_I, \quad \text{con } \tilde{v}_\Gamma \in \tilde{D}_\Gamma \text{ y } \tilde{v}_I \in \tilde{D}_I \quad (279)$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}_J + \tilde{v}_M, \quad \text{con } \tilde{v}_J \in \tilde{D}_{\Gamma_1} \text{ y } \tilde{v}_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2} \quad (280)$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}_J + \tilde{v}_M + \tilde{v}_I, \quad \text{con } \tilde{v}_J \in \tilde{D}_{\Gamma_1}, \tilde{v}_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2} \text{ y } \tilde{v}_I \in \tilde{D}_I. \quad (281)$$

Por otro lado, si el espacio  $D \subset \tilde{D}$  es definido como el complemento ortogonal, con respecto a  $\tilde{D}$ , de  $\tilde{D}_I \subset \tilde{D}$ , i.e.  $D = \{v \in \tilde{D} \mid v \cdot w = 0, \forall w \in \tilde{D}_I\}$ , entonces

$$\tilde{D} = D + \tilde{D}_I \text{ y } D \cap \tilde{D}_I = \{0\} \quad (282)$$

introduciendo la notación  $Proy_D : \tilde{D} \rightarrow D$  es introducida por el operador proyección de vectores de  $\tilde{D}$  sobre  $D$ , recordando que  $\tilde{D} = \tilde{D}_\Gamma + \tilde{D}_I$  y  $\tilde{D}_\Gamma \cap \tilde{D}_I = \{0\}$ , entonces la

$$Proy_D \tilde{D}_\Gamma = D \quad (283)$$

además la función  $Proy_D : \tilde{D} \rightarrow D$  es una biyección.

En lo que sigue de este capítulo, el complemento ortogonal de los subespacios de  $D$  serán tomados con respecto a  $D$ . Usando tal notación, adicionalmente definimos

$$D_{11} \equiv Proj_D \tilde{D}_{\Gamma_1} \quad \text{y} \quad D_{12} \equiv Proj_D \tilde{D}_{\Gamma_2} \quad (284)$$

junto con

$$D_{21} \equiv (D_{11})^\perp \quad \text{y} \quad D_{22} \equiv (D_{12})^\perp. \quad (285)$$

Entonces

$$D = D_{11} + D_{12} \quad \text{y} \quad D_{11} \cap D_{12} = \{0\} \quad (286)$$

ya que

$$D = Proj_D \tilde{D}_{\Gamma_1} + Proj_D \tilde{D}_{\Gamma_2} \quad (287)$$

por la Ec. (277).

### 3.3. Esquema General

En esta sección, se establecerá el esquema general en términos de los distintos métodos de subestructuración pueden ser formulados.

**Axiom 56** *La única suposición de este esquema es que existe un espacio de Hilbert  $D$  y un par de subespacios cerrados de  $D$ ,  $\{D_{11}, D_{12}\}$  con la propiedad de que*

$$D = D_{11} + D_{12} \quad y \quad D_{11} \cap D_{12} = \{0\}. \quad (288)$$

**Definición 57** *Sea*

$$D_{21} \equiv (D_{11})^\perp \quad y \quad D_{22} \equiv (D_{12})^\perp. \quad (289)$$

**Teorema 58** *Asumiendo el axioma y definición anteriores se tiene*

$$\left. \begin{aligned} D &= D_{11} + D_{21} & y & & D_{11} \cap D_{21} &= \{0\} \\ D &= D_{12} + D_{22} & y & & D_{12} \cap D_{22} &= \{0\} \\ D &= D_{21} + D_{22} & y & & D_{21} \cap D_{22} &= \{0\} \end{aligned} \right\} \quad (290)$$

De las formulaciones dadas por las Ecs(288 y 290) implican que cualquier función  $u \in D$  puede ser escrita de forma única como

$$u = u_{11} + u_{12} = u_{21} + u_{22} \quad (291)$$

con

$$u_{\alpha\beta} \in D_{\alpha\beta} \quad \text{con } \alpha, \beta = 1, 2. \quad (292)$$

Múltiples métodos iterativos de subestructuración pueden ser formulados en términos de los siguientes dos problemas abstractos que se formulan a continuación:

**Problema 1:** En este problema  $u_{21} \in D_{21}$  es un dato: Entonces, dado  $u_{21} \in D_{21}$ , encontrar  $u \in D_{12}$  tal que  $u = u_{21} + u_{22}$ , para alguna  $u_{22} \in D_{22}$ .

**Problema 2:** En este problema  $u_{11} \in D_{11}$  es un dato: Entonces, dado  $u_{11} \in D_{11}$ , encontrar  $u \in D_{22}$  tal que  $u = u_{11} + u_{12}$ , para alguna  $u_{12} \in D_{12}$ .

Dependiendo de la forma en que los subespacios de  $D$  sean escogidos, entonces estos problemas llevan a una generalización de versiones de aproximaciones tipo Neumann-Neumann y Dirichlet-Dirichlet.

De la Ec.(291), se deduce lo siguiente

$$u_{2\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 (u_{1\beta})_{2\alpha} \quad y \quad u_{1\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 (u_{2\beta})_{1\alpha} \quad (293)$$

con  $\alpha = 1, 2$ . Definiendo para cada  $\alpha, \beta = 1, 2$  y para cada  $u \in D$ , la función  $\tau_{\alpha\beta} : D_{1\alpha} \rightarrow D_{2\beta}$  y  $\mu_{\alpha\beta} : D_{2\alpha} \rightarrow D_{1\beta}$  por

$$\tau_{\alpha\beta} u \equiv (u_{1\alpha})_{2\beta} \quad y \quad \mu_{\alpha\beta} u \equiv (u_{2\alpha})_{1\beta}. \quad (294)$$

**Lema 59** Cuando  $u \in D_{12}$  y  $w \in D_{22}$  se tiene que

$$w \cdot \tau_{22}u = -u \cdot \mu_{22}w \quad (295)$$

**Corolario 60** Definiendo la transformación  $T_D : D_{12} \rightarrow D_{12}$ , para toda  $u \in D_{12}$  por

$$T_D u \equiv -\mu_{22}\tau_{22}u \quad (296)$$

y la transformación  $T_N : D_{22} \rightarrow D_{22}$ , para toda  $u \in D_{22}$  por

$$T_N u \equiv -\tau_{22}\mu_{22}u \quad (297)$$

entonces, cada una de estas transformaciones es no-negativa definida.

**Teorema 61** Dadas las formulaciones de los problemas 1 y 2, sea  $I$  la transformación identidad, entonces:

A) Una función  $u \in D_{12}$  es la solución del Problema 1, si y sólo si

$$(I + T_D)u = \mu_{12}u_{21} \quad (298)$$

B) Una función  $u \in D_{22}$  es la solución del Problema 2, si y sólo si

$$(I + T_N)u = \tau_{12}u_{11}. \quad (299)$$

Aquí las transformaciones  $(I + T_D) : D_{12} \rightarrow D_{12}$  y  $(I + T_N) : D_{22} \rightarrow D_{22}$  son positivas definida. Ya que ambas  $I + T_D$  y  $I + T_N$  son transformaciones positivas definida, el método de Gradiente Conjugado (5.1.2) es aplicable a este tipo de problemas. Para obtener los nuevos algoritmos se usa la siguiente secuencia de pasos:

### Algoritmo 1

Sea  $u^0$  dado, se calcula  $r^0 = b - Au^0$ ,  $p^0 = r^0$ .

Para  $n = 0, 1, \dots$

1.-

$$\alpha^n = \frac{p^n \cdot p^n}{p^n \cdot Ap^n} \quad (300)$$

2.-

$$u^{n+1} = u^n + \alpha^n p^n \quad (301)$$

3.-

$$r^{n+1} = r^n - \alpha^n Ap^n \quad (302)$$

4.-

$$\beta^n = \frac{r^{n+1} \cdot r^{n+1}}{r^n \cdot r^n} \quad (303)$$

5.- 
$$p^{n+1} = r^{n+1} + \beta^n p^n \quad (304)$$

6.- 
$$n = n + 1 \quad (305)$$

y regresar a 1.

Cuando se aplica la Ec.(298) y se usa

$$(I - \mu_{22}\tau_{22})u = \mu_{12}u_{21}$$

tal que  $A = I - \mu_{12}u_{21} = I + T_D$  y  $b = \mu_{12}u_{21}$ , entonces el esquema general toma la forma:

### Algoritmo 2

Sea  $p^0 = r^0 = b = \mu_{12}u_{21}$  y  $u^0 = 0$ .

Para  $n = 0, 1, \dots$

1.- 
$$\psi^n = \tau_{22}p^n \quad (306)$$

2.- 
$$\alpha = \frac{p^n \cdot p^n}{p^n \cdot p^n + \psi^n \cdot \psi^n} \quad (307)$$

3.- 
$$u^{n+1} = u^n + \alpha^n p^n \quad (308)$$

4.- 
$$q^n = \mu_{22}\psi^n \quad (309)$$

5.- 
$$r^{n+1} = r^n - \alpha^n q^n \quad (310)$$

6.- 
$$\beta^n = \frac{r^{n+1} \cdot r^{n+1}}{r^n \cdot r^n} \quad (311)$$

7.- 
$$p^{n+1} = r^{n+1} + \beta^n p^n \quad (312)$$

8.- 
$$n = n + 1 \quad (313)$$

y regresar a 1.

El algoritmo para la ecuación

$$(I - \tau_{22}\mu_{22})u = \tau_{12}u_{11} \quad (314)$$

se obtiene de forma similar.

Ahora, Consideremos el operador diferencial de segundo orden en un dominio  $\Omega$  y sin pérdida de generalidad consideramos  $\Pi = \{\Omega_1, \Omega_2\}$  una descomposición en subdominios del dominio  $\Omega$  y asumiendo condiciones de frontera tipo Dirichlet igual a cero, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= -\Delta u + u, & \text{en } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2 \\ u &= 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (315)$$

Entonces tenemos la siguiente formula de Green-Herrera

$$\begin{aligned} G(u, w) &= \int_{\Omega} w \mathcal{L}u d\underline{x} + \int_{\Gamma} \left\{ [[u]] \frac{\widehat{\partial w}}{\partial n} - \dot{w} \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] \right\} d\underline{x} = \\ &= \int_{\Omega} u \mathcal{L}w d\underline{x} + \int_{\Gamma} \left\{ [[w]] \frac{\widehat{\partial u}}{\partial n} - \dot{u} \left[ \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] \right\} d\underline{x} = G(w, u) \end{aligned} \quad (316)$$

con las siguientes propiedades

$$G(u, w) = \int_{\Omega} \{\nabla u \cdot \nabla w + uw\} d\underline{x} + \int_{\Gamma} \left\{ [[u]] \frac{\widehat{\partial w}}{\partial n} + [[w]] \frac{\widehat{\partial u}}{\partial n} \right\} d\underline{x} \quad (317)$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{\nabla u \cdot \nabla w + uw\} d\underline{x} &= \int_{\Omega} w \mathcal{L}u d\underline{x} - \int_{\Gamma} \left\{ \dot{w} \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] + [[w]] \frac{\widehat{\partial u}}{\partial n} \right\} d\underline{x} \quad (318) \\ &= \int_{\Omega} u \mathcal{L}w d\underline{x} - \int_{\Gamma} \left\{ \dot{u} \left[ \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] + [[u]] \frac{\widehat{\partial w}}{\partial n} \right\} d\underline{x} \end{aligned}$$

reescribiendo estas en términos de funciones discontinuas, se tiene que

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f_{\Omega}, & \text{en } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2 \\ u &= 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (319)$$

$$\left. \begin{aligned} [[u]] &= 0 \\ \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{en } \Gamma$$

cuya formulación débil es:  $u$  es solución si y sólo si

$$G(u, w) = \int_{\Omega} w f_{\Omega} d\mathbf{x}, \quad \text{para toda } w \in \hat{H}(\Omega). \quad (320)$$

considerando ahora a las funciones armónicas definidas como

$$\mathcal{L}u = 0, \quad \text{en } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2. \quad (321)$$

Entonces

$$G(u, w) = \int_{\Gamma} \left\{ [[u]] \frac{\widehat{\partial w}}{\partial n} - \dot{w} \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] \right\} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \left\{ [[w]] \frac{\widehat{\partial u}}{\partial n} - \dot{u} \left[ \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] \right\} d\mathbf{x} \quad (322)$$

con las siguientes propiedades

$$G(u, w) = \int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla w + uw \} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \left\{ [[u]] \frac{\widehat{\partial w}}{\partial n} + [[w]] \frac{\widehat{\partial u}}{\partial n} \right\} d\mathbf{x} \quad (323)$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla w + uw \} d\mathbf{x} &= - \int_{\Gamma} \left\{ \dot{w} \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] + [[w]] \frac{\widehat{\partial u}}{\partial n} \right\} d\mathbf{x} = \\ &= - \int_{\Gamma} \left\{ \dot{u} \left[ \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] + [[u]] \frac{\widehat{\partial w}}{\partial n} \right\} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (324)$$

expresando estas últimas como una formulación harmónica usando funciones discontinuas tenemos

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f_{\Omega}, & \text{en } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2 \\ u &= 0, & \text{en } \partial\Omega. \\ \left. \begin{aligned} [[u]] &= j_{\Gamma}^0 \\ \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] &= j_{\Gamma}^1 \end{aligned} \right\}, & \text{en } \Gamma \end{aligned} \quad (325)$$

donde  $j_{\Gamma}^0$  y  $j_{\Gamma}^1$  son dadas, cuya formulación débil es:  $u$  es solución si y sólo si

$$G(u, w) = \int_{\Gamma} \left\{ j_{\Gamma}^0 \frac{\widehat{\partial w}}{\partial n} + j_{\Gamma}^1 \dot{w} \right\} d\mathbf{x}, \quad \text{para toda } w \in \hat{H}(\Omega). \quad (326)$$

**Definición 62** Sea  $\overline{D}$  el espacio donde la solución  $u$  es buscada y se define como

$$\overline{D} = \{ v \in H^2(\Omega) \mid \text{traza } v = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \} \quad (327)$$

así también definimos al espacio  $\tilde{D}$  como

$$\tilde{D} = \left\{ v \in \hat{H}^2(\Omega, \Pi) \mid \text{traza } v = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \right\}. \quad (328)$$

**Definición 63** Definimos al espacio de las funciones armónicas como

$$D \equiv \left\{ u \in \tilde{D} \mid -\Delta u = 0, \quad \text{en } \Omega_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots, E \right\}. \quad (329)$$

**Definición 64** Usando el espacio de las funciones armónicas definimos ahora los siguientes subespacios

$$\begin{aligned} D_{11} &\equiv \{ w \in D \mid \dot{w} = 0, \quad \text{en } \Gamma \} \\ D_{12} &\equiv \{ w \in D \mid [[w]] = 0, \quad \text{en } \Gamma \} \\ D_{21} &\equiv \left\{ w \in D \mid \widehat{\frac{\partial w}{\partial n}} = 0, \quad \text{en } \Gamma \right\} \\ D_{22} &\equiv \left\{ w \in D \mid \left[ \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] = 0, \quad \text{en } \Gamma \right\} \end{aligned} \quad (330)$$

donde  $D_{11} \perp D_{12}$  y  $D_{21} \perp D_{22}$  en el producto interior euclidiano y  $D_{22} \perp D_{12}$  y  $D_{11} \perp D_{21}$  en el producto interior de energía.

Entonces, cada función  $w \in D$  puede ser escrita de una única forma como

$$w = w_{11} + w_{12} \text{ con } w_{11} \in D_{11} \text{ y } w_{12} \in D_{12} \quad (331)$$

además,  $D_{21}$  y  $D_{11}$  como también  $D_{22}$  y  $D_{12}$  son ortogonales con respecto al producto interior

$$u \cdot w \equiv \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_\alpha} \nabla w \cdot \nabla u dx \quad (332)$$

esto puede verse usando la relación

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_\alpha} \nabla w \cdot \nabla u dx = - \int_{\Gamma} \left\{ \dot{w} \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] + [[w]] \widehat{\frac{\partial u}{\partial n}} \right\} dx \quad (333)$$

la cual se demuestra usando la Ec.(177). La transformación  $\tau_{22} : D_{12} \rightarrow D_{22}$  es caracterizada por: Dada una función  $w \in D$  tal que

$$[[w]] = 0 \text{ sobre } \Gamma \quad (334)$$

entonces  $(\tau_{22}w) \in D$  es tal que

$$\left[ \left[ \frac{\partial (\tau_{22}w)}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ y } \frac{\partial (\tau_{22}w)}{\partial n} = \widehat{\frac{\partial w}{\partial n}} \text{ sobre } \Gamma \quad (335)$$

similarmente, la transformación  $\mu_{22} : D_{22} \rightarrow D_{12}$  es caracterizada por: Dada una función  $w \in D$  tal que

$$\left[ \left[ \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] = 0 \text{ sobre } \Gamma \quad (336)$$

entonces  $(\mu_{22}w) \in D$  es tal que

$$[[\mu_{22}w]] = 0 \text{ y } \mu_{22}w = \dot{w} \text{ sobre } \Gamma. \quad (337)$$

Nótese que la evaluación de  $\tau_{22}w$  requiere resolver un problema con condiciones Neumann sobre  $\Gamma$  en cada una de las particiones del subdominio  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , mientras que la evaluación de  $\mu_{22}w$  requiere resolver un problema con condiciones Dirichlet sobre  $\Gamma$  en cada una de las particiones del subdominio  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Entonces la evaluación de  $T_D = -\mu_{22}\tau_{22}$  involucra la resolución de un problema Neumann seguido de uno Dirichlet, mientras que la evaluación de  $T_N = -\tau_{22}\mu_{22}$  involucra la resolución de un problema Dirichlet seguido de un problema Neumann.

### 3.4. Procedimiento para Evaluar la Transformación de Componentes

Para aplicar el esquema general de la sección anterior, necesitamos un procedimiento efectivo de evaluación de las transformaciones

$$\tau_{\alpha\beta} : D_{1\alpha} \rightarrow D_{2\beta} \quad \text{y} \quad \mu_{\alpha\beta} : D_{2\alpha} \rightarrow D_{1\beta} \quad (338)$$

requeridas. Esto queda totalmente establecido si  $\mu_{\alpha\beta} \in D_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$  tal que

$$u = u_{11} + u_{12} = u_{21} + u_{22} \quad (339)$$

y puede ser evaluado efectivamente cuando  $u \in D$  es dado.

Considerando las suposiciones de la sección anterior, entonces existen subconjuntos linealmente independientes

$$\left. \begin{array}{lll} \mathcal{B} \subset \tilde{D}, & \mathcal{B}_I \subset \tilde{D}_I, & \mathcal{B}_\Gamma \subset \tilde{D}_\Gamma \\ \bar{\mathcal{B}}_\Gamma \subset \tilde{D}_\Gamma, & \mathcal{B}_{\Gamma M} \subset \tilde{D}_{\Gamma_2}, & \mathcal{B}_{\Gamma J} \subset \tilde{D}_{\Gamma_1} \end{array} \right\} \quad (340)$$

los cuales satisfacen

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}_\Gamma \quad \text{y} \quad \bar{\mathcal{B}}_\Gamma = \mathcal{B}_{\Gamma M} \cup \mathcal{B}_{\Gamma J} \quad (341)$$

el espacio generado por cada uno de los subconjuntos  $\mathcal{B}_\Gamma$  y  $\bar{\mathcal{B}}_\Gamma$ , es  $\tilde{D}_\Gamma$ , sin embargo una propiedad distintiva de  $\mathcal{B}_\Gamma$  es que sus miembros tienen soporte local, a continuación se detalla un procedimiento para calcular  $u_{11} \in D_{11}$  y  $u_{12} \in D_{12}$ .

De acuerdo a la Ec.(281), podemos escribir

$$u = \tilde{u}_j + \tilde{u}_M + \tilde{u}_I \quad (342)$$

donde  $\tilde{u}_j \in \tilde{D}_{\Gamma_1}$ ,  $\tilde{u}_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2}$  y  $\tilde{u}_I \in \tilde{D}_I$ , además

$$\begin{aligned} u_{11} &= (\tilde{u}_{11})_J + (\tilde{u}_{11})_I, \text{ donde } (\tilde{u}_{11})_J \in \tilde{D}_{\Gamma_1} \text{ y } (\tilde{u}_{11})_I \in \tilde{D}_I \\ u_{12} &= (\tilde{u}_{12})_M + (\tilde{u}_{12})_I, \text{ donde } (\tilde{u}_{12})_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2} \text{ y } (\tilde{u}_{12})_I \in \tilde{D}_I \end{aligned} \quad (343)$$

las Ecs.(339) y (343) juntas implican que

$$(\tilde{u}_{11})_J = \tilde{u}_J \quad \text{y} \quad (\tilde{u}_{12})_M = \tilde{u}_M \quad (344)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} u_{11} &= \tilde{u}_J + (\tilde{u}_{11})_I \text{ donde } (\tilde{u}_{11})_I \in \tilde{D}_I \\ u_{12} &= \tilde{u}_M + (\tilde{u}_{12})_I, \text{ donde } (\tilde{u}_{12})_I \in \tilde{D}_I \end{aligned} \quad (345)$$

entonces  $(\tilde{u}_{11})_I \in \tilde{D}_I$  puede ser determinada por el sistema de ecuaciones

$$(\tilde{u}_{11})_I \cdot \tilde{w} = -\tilde{u}_J \cdot \tilde{w}, \quad \forall \tilde{w} \in \mathcal{B}_I \quad (346)$$

mientras  $(\tilde{u}_{12})_I \in \tilde{D}_I$  se determina por

$$(\tilde{u}_{12})_I \cdot \tilde{w} = -\tilde{u}_M \cdot \tilde{w}, \quad \forall \tilde{w} \in \mathcal{B}_I \quad (347)$$

ya que  $u_{11} \in D$  y  $u_{12} \in D$  son ortogonales a  $\tilde{D}_I$ . Cada una de las Ecs(346) y (347) constituyen una sistema de "E" problemas locales independientes.

por otro lado, cuando  $u \in D$  es dado, la función  $u_{21} \in D_{21}$  es caracterizada por

$$\begin{aligned} u_{21} \cdot \tilde{w} &= 0, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{D}_I \\ (u_{21} - u) \cdot \tilde{w} &= 0, \quad \forall \tilde{w} \in D_{12} \\ u_{21} \cdot \tilde{w} &= 0, \quad \forall \tilde{w} \in D_{11} \end{aligned} \quad (348)$$

usando el hecho de que cualquier  $w \in D_{12}$  es

$$w = \tilde{w}_M + \tilde{w}_I, \text{ donde } \tilde{w}_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2} \text{ y } \tilde{w}_I \in \tilde{D}_I \quad (349)$$

y que cada  $w \in D_{11}$  es

$$w = \tilde{w}_J + \tilde{w}_I, \text{ donde } \tilde{w}_J \in \tilde{D}_{\Gamma_1} \text{ y } \tilde{w}_I \in \tilde{D}_I \quad (350)$$

y se ve en el sistema de Ecs.(348) es equivalente a

$$\begin{aligned} u_{21} \cdot \tilde{w}_I &= 0, \quad \forall \tilde{w}_I \in \tilde{D}_I \\ u_{21} \cdot \tilde{w}_M &= u \cdot \tilde{w}_M, \quad \forall \tilde{w}_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2} \\ u_{21} \cdot \tilde{w}_J &= 0, \quad \forall \tilde{w}_J \in \tilde{D}_{\Gamma_1} \end{aligned} \quad (351)$$

además,  $\tilde{D}_\Gamma = \tilde{D}_{\Gamma_1} + \tilde{D}_{\Gamma_2}$  y por lo tanto las Ecs.(351) se satisface si y sólo si

$$\begin{aligned} u_{21} \cdot \tilde{w}_I &= 0, \quad \forall \tilde{w}_I \in \tilde{D}_I \\ u_{21} \cdot \tilde{w}_\Gamma &= u \cdot (\tilde{w}_\Gamma)_M, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{D}_\Gamma \end{aligned} \quad (352)$$

aquí, se sobreentiende que cada  $\tilde{w}_\Gamma \in \tilde{D}_\Gamma$  se puede escribir como

$$\tilde{w}_\Gamma = (\tilde{w}_\Gamma)_J + (\tilde{w}_\Gamma)_M, \text{ con } (\tilde{w}_\Gamma)_J \in \tilde{D}_{\Gamma_1} \text{ y } (\tilde{w}_\Gamma)_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2} \quad (353)$$

finalmente, introduciendo las bases  $\mathcal{B}_I$  y  $\mathcal{B}_\Gamma$  de  $\tilde{D}_I$  y  $\tilde{D}_\Gamma$  respectivamente, las Ecs.(352) pueden ser remplazadas por

$$\begin{aligned} u_{21} \cdot \tilde{w}_I &= 0, \forall \tilde{w}_I \in \mathcal{B}_I \\ u_{21} \cdot \tilde{w}_\Gamma &= u \cdot (\tilde{w}_\Gamma)_M, \forall \tilde{w}_\Gamma \in \mathcal{B}_\Gamma \end{aligned} \quad (354)$$

usando el hecho de que todas las funciones de  $\tilde{w}_\Gamma \in \mathcal{B}_\Gamma$  tienen soporte local, se ve que las Ecs.(354) constituyen un sistema de "E" ecuaciones locales independientes. De forma similar, se muestra que  $u_{22} \in D_{22}$  satisface

$$\begin{aligned} u_{22} \cdot \tilde{w}_I &= 0, \forall \tilde{w}_I \in \mathcal{B}_I \\ u_{22} \cdot \tilde{w}_\Gamma &= u \cdot (\tilde{w}_\Gamma), \forall \tilde{w}_\Gamma \in \mathcal{B}_\Gamma \end{aligned} \quad (355)$$

aquí, nuevamente las Ecs.(355) constituyen un sistema de "E" ecuaciones locales independientes. Finalmente, observamos que generalmente solo una de los dos sistemas (354) y (355) necesitan ser resueltos ya que  $u = u_{21} + u_{22}$ . Un comentario similar aplica en el caso del par de sistemas (346) y (347).

Aplicando el algoritmo de Gradiente Conjugado de la sección (3.3), también requieren el cálculo de  $u_{11}$  o de  $u_{21}$ . La versión discreta estándar del problema original, usando funciones continuas exclusivamente es: Encontrar  $\bar{u} \in \bar{D}$  tal que

$$\bar{u} \cdot \bar{w} = \int_{\Omega} \bar{w} f_{\Omega} dx, \forall \bar{w} \in \bar{D} \quad (356)$$

es equivalente a: Encontrar  $\bar{u} \in \bar{D}$  tal que

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \tilde{w}_I &= \int_{\Omega} \tilde{w}_I f_{\Omega} dx, \forall \tilde{w}_I \in \tilde{D}_I \\ \bar{u} \cdot \tilde{w}_M &= \int_{\Omega} \tilde{w}_M f_{\Omega} dx, \forall \tilde{w}_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2} \\ (\bar{u})_J &= 0 \end{aligned} \quad (357)$$

sea  $\tilde{u}_p \in \tilde{D}$  cualquier función que satisface

$$\begin{cases} \tilde{u}_p \cdot \tilde{w}_I = \int_{\Omega} \tilde{w}_I f_{\Omega} dx, \forall \tilde{w}_I \in \tilde{D}_I \\ (\tilde{u}_p)_J = 0 \end{cases} \quad (358)$$

y definiendo  $u = \bar{u} - \tilde{u}_p$ , entonces tenemos que

$$\begin{cases} u \in D \\ u \cdot \tilde{w}_M = \int_{\Omega} \tilde{w}_M f_{\Omega} dx - \tilde{u}_p \cdot \tilde{w}_M, \forall \tilde{w}_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2} \\ \dot{u}_J = -(\tilde{u}_p)_J = 0 \end{cases} \quad (359)$$

entonces,  $u \in D_{12}$  y aplicando Ecs.(354) para obtener  $u_{21}$ . Una segunda opción es definir  $\tilde{u}_p \in \tilde{D}$  como una función que satisface

$$\begin{cases} \tilde{u}_p \cdot \tilde{w}_I = \int_{\Omega} \tilde{w}_I f_{\Omega} dx, \forall \tilde{w}_I \in \tilde{D}_I \\ \tilde{u}_p \cdot \tilde{w}_{\Gamma} = \int_{\Omega} \tilde{w}_{\Gamma} f_{\Omega} dx, \forall \tilde{w}_{\Gamma} \in \tilde{D}_{\Gamma} \end{cases} \quad (360)$$

en este caso

$$u \cdot \tilde{w}_M = 0, \forall \tilde{w}_M \in \tilde{D}_{\Gamma_2} \text{ y } \tilde{u}_J = -(\tilde{u}_p)_J \quad (361)$$

tal que  $u \in D_{22}$ , en virtud de que las Ecs.(352), mientras que las Ecs.(345) y (346) pueden ser usadas para obtener  $u_{11}$ .

### 3.5. Métodos Dual-Primal

Los métodos Dual-Primal son procedimientos que permiten tratar con particiones de vértices. La idea básica de tales métodos consiste en mantener sin dividir las funciones asociadas con los vértices y tratarlas como nodos internos. Un efecto de tal procedimiento es, sin embargo, un acoplamiento de los sistemas de ecuaciones correspondientes a la partición de los subdominios que comparten un vértice, lo cual puede ser un inconveniente en algunas circunstancias. Por completes, en esta sección se incorpora los métodos Dual-Primal en nuestro esquema.

La colección de conjuntos  $\{\mathcal{B}_{\Gamma}^1, \dots, \mathcal{B}_{\Gamma}^{\overline{N}_{\Gamma}}\} \subset \{\mathcal{B}^1, \dots, \mathcal{B}^{\overline{N}}\}$  de la sección (3.2) es dividido en dos subfamilias  $\{\mathcal{B}_{\Delta}^1, \dots, \mathcal{B}_{\Delta}^{N_{\Delta}}\} \subset \{\mathcal{B}_{\Gamma}^1, \dots, \mathcal{B}_{\Gamma}^{\overline{N}_{\Gamma}}\}$  y  $\{\mathcal{B}_{\Pi}^1, \dots, \mathcal{B}_{\Pi}^{N_{\Pi}}\} \subset \{\mathcal{B}_{\Gamma}^1, \dots, \mathcal{B}_{\Gamma}^{\overline{N}_{\Gamma}}\}$ , ellas son definidas por las siguientes condiciones:  $\mathcal{B}_{\Gamma}^i \in \{\mathcal{B}_{\Delta}^1, \dots, \mathcal{B}_{\Delta}^{N_{\Delta}}\}$  si y sólo si la cardinalidad de  $\mathcal{B}_{\Gamma}^i$  es dos, y  $\mathcal{B}_{\Gamma}^i \in \{\mathcal{B}_{\Pi}^1, \dots, \mathcal{B}_{\Pi}^{N_{\Pi}}\}$  si y sólo si la cardinalidad de  $\mathcal{B}_{\Gamma}^i$  es mayor de dos. Uno de estos conjuntos  $\{\mathcal{B}_{\Delta}^1, \dots, \mathcal{B}_{\Delta}^{N_{\Delta}}\}$  es llamado en conjunto "Dual" el otro conjunto  $\{\mathcal{B}_{\Pi}^1, \dots, \mathcal{B}_{\Pi}^{N_{\Pi}}\}$  es llamado el conjunto "Primal". Claramente las funciones del conjunto primal corresponden a las funciones asociadas con los vértices.

Sea  $\mathcal{B}_{\Pi}^i$  el conjunto primal, entonces definimos  $\overline{\mathcal{B}}_{\Pi}^i = \{\tilde{w}_M\}$  donde  $\tilde{w}_M^i \in \overline{D}$  es una función madre del conjunto primal  $\mathcal{B}_{\Pi}^i$ . Además

$$\mathcal{B}_{\Pi} = \bigcup_{i=1}^{\overline{N}_{\Pi}} \overline{\mathcal{B}}_{\Pi}^i = \{\tilde{w}_M^1, \dots, \tilde{w}_M^{\overline{N}_{\Pi}}\} \quad (362)$$

y

$$\mathcal{B}_{\mathcal{J}} = \mathcal{B}_{\Pi} \cup \mathcal{B}_I \quad (363)$$

por otro lado, cuando la cardinalidad de  $\mathcal{B}_{\Gamma}^i$  es dos, definimos

$$\mathcal{B}_{\Delta} = \bigcup_{i=1}^{N_{\Delta}} \mathcal{B}_{\Delta}^i, \overline{\mathcal{B}}_{\Pi}^i = \{w_M^i, w_J^i\}, \overline{\mathcal{B}}_{\Delta} = \bigcup_{i=1}^{N_{\Delta}} \overline{\mathcal{B}}_{\Delta}^i \quad (364)$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\Delta} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{J}} \quad (365)$$

como también

$$\mathcal{B}_{\Delta M} = \{w_M^1, \dots, w_M^N\} \text{ y } \mathcal{B}_{\Delta J} = \{w_J^1, \dots, w_J^N\} \quad (366)$$

entonces  $\mathcal{B}_{\Delta M} \subset \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{D}$ , cada conjunto  $\overline{\mathcal{B}}_{\Delta}$  y  $\mathcal{B}_{\Delta}$  generan el mismo subespacio lineal y tienen una propiedad evidente y es que todos los elementos de  $\mathcal{B}_{\Delta}$  tienen soporte local, lo cual no es cierto en  $\overline{\mathcal{B}}_{\Delta}$ . Además

$$\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{\Delta M} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{J}}. \quad (367)$$

El subespacio generado por el conjunto de funciones  $\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathcal{J}}, \mathcal{B}_{\Delta}, \mathcal{B}_{\Delta J}$  y  $\mathcal{B}_{\Delta M}$  será denotado por  $\tilde{D}, \tilde{D}_{\mathcal{J}}, \tilde{D}_{\Sigma}, \tilde{D}_{\Sigma_1}$  y  $\tilde{D}_{\Sigma_2}$  respectivamente. Haciendo las siguientes sustituciones

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{D}_{\mathcal{J}} \rightarrow \tilde{D}_I, \quad \tilde{D}_{\Sigma} \rightarrow \tilde{D}_{\Gamma}, \quad \tilde{D}_{\mathcal{J}} \rightarrow \tilde{D}_{\mathcal{J}} \\ \tilde{D}_{\Sigma_1} \rightarrow \tilde{D}_{\Gamma_1}, \quad \tilde{D}_{\Sigma_2} \rightarrow \tilde{D}_{\Gamma_2} \end{array} \right\} \quad (368)$$

ya que corresponden con las suposiciones hechas anteriormente en este capítulo

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{D} = \tilde{D}_{\mathcal{J}} + \tilde{D}_{\Sigma} \quad \text{y} \quad \tilde{D}_{\mathcal{J}} \cap \tilde{D}_{\Sigma} = \{0\} \\ \tilde{D}_{\Sigma} = \tilde{D}_{\Sigma_1} + \tilde{D}_{\Sigma_2} \quad \text{y} \quad \tilde{D}_{\Sigma_1} \cap \tilde{D}_{\Sigma_2} = \{0\} \\ \tilde{D} = \tilde{D}_{\Sigma_2} + \tilde{D}_{\mathcal{J}} \end{array} \right\} \quad (369)$$

por lo tanto definimos

$$D = \left( \tilde{D}_{\mathcal{J}} \right)^{\perp} \quad (370)$$

como se había hecho anteriormente, una vez  $D \subset \tilde{D}$  ha sido definido, el complemento ortogonal puede ser tomado con respecto a  $D$ . Y las siguientes definiciones son adoptadas

$$D_{11} = \text{Proy}_D \tilde{D}_{\Sigma_1} \quad \text{y} \quad D_{12} = \text{Proy}_D \tilde{D}_{\Sigma_2} \quad (371)$$

$$D_{21} = (D_{11})^{\perp} \quad \text{y} \quad D_{22} = (D_{12})^{\perp} \quad (372)$$

entonces

$$D = D_{11} + D_{12} \quad \text{y} \quad D_{11} \cap D_{12} = \{0\}. \quad (373)$$

La diferencia con respecto a lo antes desarrollado es que todas las funciones de el espacio  $\tilde{D}_I$  tienen soporte local, el cual no es el caso del espacio  $\tilde{D}_{\mathcal{J}}$  como aquí se definió. Debido a este hecho, tenemos algunos acoplamientos entre los sistemas de ecuaciones correspondientes a diferentes subdominios que comparten vértices.

## 4. Apéndice A

En este apéndice se darán algunas definiciones que se usan a lo largo del presente trabajo, así como se detallan algunos resultados generales de álgebra lineal y análisis funcional (en espacios reales) que se anuncian sin demostración pero se indica en cada caso la bibliografía correspondiente donde se encuentran estas y el desarrollo en detalle de cada resultado.

### 4.1. Nociones de Álgebra Lineal

A continuación detallaremos algunos resultados de álgebra lineal, las demostraciones de los siguientes resultados puede ser consultada en [31].

**Definición 65** Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $f(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  es llamada funcional lineal si satisface la condición

$$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) \quad \forall v, w \in V \quad y \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (374)$$

**Definición 66** Si  $V$  es un espacio vectorial, entonces el conjunto  $V^*$  de todas las funcionales lineales definidas sobre  $V$  es un espacio vectorial llamado espacio dual de  $V$ .

**Teorema 67** Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base para el espacio vectorial  $V$ , entonces existe una única base  $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$  del espacio vectorial dual  $V^*$  llamado la base dual de  $\{v_1, \dots, v_n\}$  con la propiedad de que  $V_i^* = \delta_{ij}$ . Por lo tanto  $V$  es isomorfo a  $V^*$ .

**Definición 68** Sea  $D \subset V$  un subconjunto del espacio vectorial  $V$ . El nulo de  $D$  es el conjunto  $N(D)$  de todas las funcionales en  $V^*$  tal que se nulifican en todo el subconjunto  $D$ , es decir

$$N(D) = \{f \in V^* \mid f(v) = 0 \quad \forall v \in D\}. \quad (375)$$

**Teorema 69** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $V^*$  el espacio dual de  $V$ , entonces

- a)  $N(D)$  es un subespacio de  $V^*$
- b) Si  $M \subset V$  es un subespacio de dimensión  $m$ ,  $V$  tiene dimensión  $n$ , entonces  $N(M)$  tiene dimensión  $n - m$  en  $V^*$ .

**Corolario 70** Si  $V = L \oplus M$  (suma directa) entonces  $V^* = N(L) \oplus N(M)$ .

**Teorema 71** Sean  $V$  y  $W$  espacios lineales, si  $T(\cdot) : V \rightarrow W$  es lineal, entonces el adjunto  $T^*$  de  $T$  es un operador lineal  $T^* : W^* \rightarrow V^*$  definido por

$$T^*(w^*)(u) = w^*(Tu). \quad (376)$$

**Teorema 72** Si  $H$  es un espacio completo con producto interior, entonces  $H^* = H$ .

**Definición 73** Si  $V$  es un espacio vectorial con producto interior y  $T(\cdot) : V \rightarrow V$  es una transformación lineal, entonces existe una transformación asociada a  $T$  llamada la transformación auto-adjunta  $T^*$  definida como

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle. \quad (377)$$

**Definición 74** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre los reales. Se dice que una función  $\tau(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal sobre  $V$ , si para toda  $x, y, z \in V$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\begin{aligned} \tau(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha\tau(x, z) + \beta\tau(y, z) \\ \tau(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha\tau(x, y) + \beta\tau(x, z). \end{aligned} \quad (378)$$

**Definición 75** Si  $\tau(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal sobre  $V$ , entonces la función  $q_\tau(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$q_\tau(x) = \tau(x, x) \quad \forall x \in V \quad (379)$$

se le llama la forma cuadrática asociada a  $\tau$ .

Notemos que para una forma cuadrática  $q_\tau(\cdot)$  se tiene que  $q_\tau(\alpha x) = |\alpha|^2 q_\tau(x)$   $\forall x \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Definición 76** Sea  $V \subset \mathbb{R}^n$  un subespacio,  $P \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

## 4.2. $\sigma$ -Algebra y Espacios Medibles

A continuación detallaremos algunos resultados conjuntos de espacios  $\sigma$ -algebra, conjuntos de medida cero y funciones medibles, las demostraciones de los siguientes resultados puede ser consultada en [34] y [7].

**Definición 77** Una  $\sigma$ -algebra sobre un conjunto  $\Omega$  es una familia  $\xi$  de subconjuntos de  $\Omega$  que satisface

- $\emptyset \in \xi$
- Si  $\psi_n \in \xi$  entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \psi_n \in \xi$
- Si  $\psi \in \xi$  entonces  $\psi^c \in \xi$ .

**Definición 78** Si  $\Omega$  es un espacio topológico, la familia de Borel es el conjunto  $\sigma$ -algebra más pequeño que contiene a los abiertos del conjunto  $\Omega$ .

**Definición 79** Una medida  $\mu$  sobre  $\Omega$  es una función no negativa real valuada cuyo dominio es una  $\sigma$ -algebra  $\xi$  sobre  $\Omega$  que satisface

- $\mu(\emptyset) = 0$  y

- Si  $\{\psi_n\}$  es una sucesión de conjuntos ajenos de  $\xi$  entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \psi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\psi_n). \quad (380)$$

**Teorema 80** Existe una función de medida  $\mu$  sobre el conjunto de Borel de  $\mathbb{R}$  llamada la medida de Lebesgue que satisface  $\mu([a, b]) = b - a$ .

**Definición 81** Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada medible si  $f^{-1}(U)$  es un conjunto medible para todo abierto  $U$  de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 82** Sea  $E \subset \Omega$  un conjunto, se dice que el conjunto  $E$  tiene medida cero si  $\mu(E) = 0$ .

**Teorema 83** Si  $\alpha$  es una medida sobre el espacio  $X$  y  $\beta$  es una medida sobre el espacio  $Y$ , podemos definir una medida  $\mu$  sobre  $X \times Y$  con la propiedad de que  $\mu(A \times B) = \alpha(A)\beta(B)$  para todo conjunto medible  $A \in X$  y  $B \in Y$ .

**Teorema 84 (Fubini)**

Si  $f(x, y)$  es medible en  $X \times Y$  entonces

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_X \int_Y f(x, y) d\beta d\alpha = \int_Y \int_X f(x, y) d\alpha d\beta \quad (381)$$

en el sentido de que cualquiera de las integrales existe y son iguales.

**Teorema 85** Una función  $f$  es integrable en el sentido de Riemann en  $\Omega$  si y sólo si el conjunto de puntos donde  $f(\underline{x})$  es no continua tiene medida cero.

**Observación 86** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas en  $\Omega$ , decimos que  $f$  y  $g$  son iguales salvo en un conjunto de medida cero si  $f(x) \neq g(x)$  sólo en un conjunto de medida cero.

**Definición 87** Una propiedad  $P$  se dice que se satisface en casi todos lados, si existe un conjunto  $E$  con  $\mu(E) = 0$  tal que la propiedad se satisface en todo punto de  $E^c$ .

### 4.3. Espacios $L^p$

Las definiciones y material adicional puede ser consultada en [23], [29] y [7].

**Definición 88** Una función medible  $f(\cdot)$  (en el sentido de Lebesgue) es llamada integrable sobre un conjunto medible  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  si

$$\int_{\Omega} |f| d\underline{x} < \infty. \quad (382)$$

**Definición 89** Sea  $p$  un número real con  $p \geq 1$ . Una función  $u(\cdot)$  definida sobre  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  se dice que pertenece al espacio  $L^p(\Omega)$  si

$$\int_{\Omega} |u(\underline{x})|^p d\underline{x} \quad (383)$$

es integrable.

Al espacio  $L^2(\Omega)$  se le llama cuadrado integrable.

**Definición 90** La norma  $L^2(\Omega)$  se define como

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(\underline{x})|^2 d\underline{x} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (384)$$

y el producto interior en la norma  $L^2(\Omega)$  como

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\underline{x})v(\underline{x})d\underline{x}. \quad (385)$$

**Definición 91** Si  $p \rightarrow \infty$ , entonces definimos al espacio  $L^\infty(\Omega)$  como el espacio de todas las funciones medibles sobre  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  que sean acotadas en casi todo  $\Omega$  (excepto posiblemente sobre un conjunto de medida cero), es decir,

$$L^\infty(\Omega) = \{u \mid |u(x)| \leq k\} \quad (386)$$

definida en casi todo  $\Omega$ , para algún  $k \in \mathbb{R}$ .

#### 4.4. Distribuciones

La teoría de distribuciones es la base para definir a los espacios de Sobolev, ya que permiten definir las derivadas parciales de funciones no continuas, pero esta es coincidente con las derivadas parciales clásica si las funciones son continuas, para mayor referencia de estos resultados ver [23], [29] y [7]

**Definición 92** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio, al conjunto de todas las funciones continuas definidas en  $\Omega$  se denotarán por  $C^0(\Omega)$ , o simplemente  $C(\Omega)$ .

**Definición 93** Sea  $u$  una función definida sobre un dominio  $\Omega$  la cual es no cero sólo en los puntos pertenecientes a un subconjunto propio  $K \subset \Omega$ . Sea  $\overline{K}$  la clausura de  $K$ . Entonces  $\overline{K}$  es llamado el soporte de  $u$ . Decimos que  $u$  tiene soporte compacto sobre  $\Omega$  si su soporte  $\overline{K}$  es compacto. Al conjunto de funciones continuas con soporte compacto se denota por  $C_0(\Omega)$ .

**Definición 94** Sea  $\mathbb{Z}_+^n$  el conjunto de todas las  $n$ -dúplas de enteros no negativos, un miembro de  $\mathbb{Z}_+^n$  se denota usualmente por  $\alpha$  ó  $\beta$  (por ejemplo  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ). Denotaremos por  $|\alpha|$  la suma  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  y por  $D^\alpha u$  la derivada parcial

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (387)$$

así, si  $|\alpha| = m$ , entonces  $D^\alpha u$  denota la  $m$ -ésima derivada parcial de  $u$ .

**Definición 95** Sea  $C^m(\Omega)$  el conjunto de todas las funciones  $D^\alpha u$  tales que sean funciones continuas con  $|\alpha| = m$ . Y  $C^\infty(\Omega)$  como el espacio de funciones en el cual todas las derivadas existen y sean continuas en  $\Omega$ .

**Definición 96** El espacio  $\mathcal{D}(\Omega)$  será el subconjunto de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto, algunas veces se denota también como  $C_0^\infty(\Omega)$ .

**Definición 97** Una distribución sobre un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es toda funcional lineal continua sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Definición 98** El espacio de distribuciones es el espacio de todas las funcionales lineales continuas definidas en  $\mathcal{D}(\Omega)$ , denotado como  $\mathcal{D}^*(\Omega)$ , es decir el espacio dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Definición 99** Un función  $f(\cdot)$  es llamada localmente integrable, si para todo subconjunto compacto  $K \subset \Omega$  se tiene

$$\int_K |f(x)| dx < \infty. \quad (388)$$

Ejemplo de una distribución es cualquier función  $f(\cdot)$  localmente integrable en  $\Omega$ . La distribución  $F$  asociada a  $f$  se puede definir de manera natural como  $F : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\langle F, \phi \rangle = \int_\Omega f \phi dx \quad (389)$$

con  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Si el soporte de  $\phi$  es  $K \subset \Omega$ , entonces

$$|\langle F, \phi \rangle| = \left| \int_\Omega f \phi dx \right| = \left| \int_K f \phi dx \right| \leq \sup_{x \in K} |\phi| \int_\Omega |f(x)| dx \quad (390)$$

la integral es finita y  $\langle F, \phi \rangle$  tiene sentido. Bajo estas circunstancias  $F$  es llamada una distribución generada por  $f$ .

Otro ejemplo de distribuciones es el generado por todas las funciones continuas acotadas, ya que estas son localmente integrables y por lo tanto generan una distribución.

**Definición 100** Si una distribución es generada por funciones localmente integrables es llamada una distribución regular. Si una distribución no es generada por una función localmente integrable, es llamada distribución singular (ejemplo de esta es la delta de Dirac).

Es posible definir de manera natural en producto de una función y una distribución. Específicamente, si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u$  pertenece a  $C^\infty(\Omega)$ , y si  $f(\cdot)$  es una distribución sobre  $\Omega$ , entonces entenderemos  $uf$  por la distribución que satisface

$$\langle (uf), \phi \rangle = \langle f, u\phi \rangle \quad (391)$$

para toda  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Notemos que la anterior ecuación es una generalización de la identidad

$$\int_{\Omega} [u(x) f(x)] \phi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) [u(x) \phi(x)] dx \quad (392)$$

la cual se satisface si  $f$  es localmente integrable.

**Derivadas de Distribuciones** Funciones como la delta de Dirac y la Heaviside no tienen derivada en el sentido ordinario, sin embargo, si estas funciones son tratadas como distribuciones es posible extender el concepto de derivada de tal forma que abarque a dichas funciones, para ello recordemos que:

**Teorema 101** *La versión clásica del teorema de Green es dada por la identidad*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u v n_i d\mathbf{s} - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\mathbf{x} \quad (393)$$

que se satisface para todas las funciones  $u, v$  en  $C^1(\overline{\Omega})$ , donde  $n_i$  es la  $i$ -ésima componente de la derivada normal del vector  $n$  en la frontera  $\partial\Omega$  de un dominio  $\Omega$ .

Una versión de la Ec. (393) en una dimensión se obtiene usando la fórmula de integración por partes, quedando como

$$\int_a^b u v' dx = [uv]_a^b - \int_a^b v u' dx, \quad u, v \in C^1[a, b] \quad (394)$$

como un caso particular de la Ec. (393).

Este resultado es fácilmente generalizable a un resultado usando derivadas parciales de orden  $m$  de funciones  $u, v \in C^m(\overline{\Omega})$  pero reemplazamos  $u$  por  $D^\alpha u$  en la Ec. (393) y con  $|\alpha| = m$ , entonces se puede mostrar que:

**Teorema 102** *Otra versión del teorema de Green es dado por*

$$\int_{\Omega} (D^\alpha u) v d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} h(u, v) d\mathbf{s} \quad (395)$$

donde  $h(u, v)$  es una expresión que contiene la suma de productos de derivadas de  $u$  y  $v$  de orden menor que  $m$ .

Ahora reemplazando  $v$  en la Ec. (395) por  $\phi$  perteneciente a  $\mathcal{D}(\Omega)$  y como  $\phi = 0$  en la frontera  $\partial\Omega$  tenemos

$$\int_{\Omega} (D^\alpha u) \phi d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi d\mathbf{x} \quad (396)$$

ya que  $u$  es  $m$ -veces continuamente diferenciable, esta genera una distribución denotada por  $u$ , tal que

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u \phi d\mathbf{x} \quad (397)$$

o, como  $D^\alpha \phi$  también pertenece a  $\mathcal{D}(\Omega)$ , entonces

$$\langle u, D^\alpha \phi \rangle = \int_{\Omega} u D^\alpha \phi d\underline{x} \quad (398)$$

además,  $D^\alpha u$  es continua, así que es posible generar una distribución regular denotada por  $D^\alpha u$  satisfaciendo

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = \int_{\Omega} (D^\alpha u) \phi d\underline{x} \quad (399)$$

entonces la Ec. (396) puede reescribirse como

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (400)$$

**Definición 103** *La derivada de cualquier distribución  $f(\cdot)$  se define como: La  $\alpha$ -ésima derivada parcial distribucional o derivada generalizada de una distribución  $f$  es definida por una distribución denotada por  $D^\alpha f$ , que satisface*

$$\langle D^\alpha f, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nótese que si  $f$  pertenece a  $C^m(\bar{\Omega})$ , entonces la derivada parcial distribucional coincide con la derivada parcial  $\alpha$ -ésima para  $|\alpha| \leq m$ .

**Derivadas Débiles** Supóngase que una función  $u(\cdot)$  es localmente integrable que genere una distribución, también denotada por  $u$ , que satisface

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u \phi dx \quad (401)$$

para toda  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Además la distribución  $u$  posee derivada distribucional de todos los ordenes, en particular la derivada  $D^\alpha u$  es definida por

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (402)$$

por supuesto  $D^\alpha u$  puede o no ser una distribución regular. Si es una distribución regular, entonces es generada por una función localmente integrable tal que

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \phi(x) d\underline{x} \quad (403)$$

y se sigue que la función  $u$  y  $D^\alpha u$  están relacionadas por

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(x) \phi(x) d\underline{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) d\underline{x} \quad (404)$$

para  $|\alpha| \leq m$ .

**Definición 104** *Llamamos a la función (o más precisamente, a la equivalencia de clases de funciones)  $D^\alpha u$  obtenida en la Ec. (404), la  $\alpha$ -ésima derivada débil de la función  $u$ .*

Notemos que si  $u$  pertenece a  $C^m(\bar{\Omega})$ , entonces la derivada  $D^\alpha u$  coincide con la derivada clásica para  $|\alpha| \leq m$ .

## 5. Apéndice B

### 5.1. Solución de Grandes Sistemas de Ecuaciones

Es este trabajo se mostró como proceder para transformar un problema de ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera en un sistema algebraico de ecuaciones y así poder hallar la solución resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que se pueden expresar en la forma matricial siguiente

$$\underline{A}u = \underline{b} \quad (405)$$

donde la matriz  $\underline{A}$  es bandada (muchos elementos son nulos) y en problemas reales tiene grandes dimensiones.

Los métodos de resolución del sistema algebraico de ecuaciones  $\underline{A}u = \underline{b}$  se clasifican en dos grandes grupos: los métodos directos y los métodos iterativos.

En los métodos directos la solución  $\underline{u}$  se obtiene en un número fijo de pasos y sólo están sujetos a los errores de redondeo. En los métodos iterativos, se realizan iteraciones para aproximarse a la solución  $\underline{u}$  aprovechando las características propias de la matriz  $\underline{A}$ , tratando de usar un menor número de pasos que en un método directo.

Los métodos iterativos rara vez se usan para resolver sistemas lineales de dimensión pequeña (el concepto de dimensión pequeña es muy relativo), ya que el tiempo necesario para conseguir una exactitud satisfactoria rebasa el que requieren los métodos directos. Sin embargo, en el caso de sistemas grandes con un alto porcentaje de elementos cero, son eficientes tanto en el almacenamiento en la computadora como en el tiempo que se invierte en su solución. Por ésta razón al resolver éstos sistemas algebraicos de ecuaciones es preferible aplicar métodos iterativos tal como gradiente conjugado.

Cabe hacer mención de que la mayoría del tiempo de cómputo necesario para resolver el problema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP), es consumido en la solución del sistema algebraico de ecuaciones asociado a la discretización, por ello es determinante elegir aquel método numérico que minimice el tiempo invertido en este proceso.

#### 5.1.1. Métodos Directos

En estos métodos, la solución  $\underline{u}$  se obtiene en un número fijo de pasos y sólo están sujetos a los errores de redondeo. Entre los métodos más importantes podemos encontrar: Eliminación Gaussiana, descomposición LU, eliminación bandada y descomposición de Cholesky.

Los métodos antes mencionados, se colocaron en orden descendente en cuanto al consumo de recursos computacionales y ascendente en cuanto al aumento en su eficiencia.

**Eliminación Gaussiana** Tal vez es el método más utilizado para encontrar la solución usando métodos directos. Este algoritmo sin embargo no es eficiente, ya que en general, un sistema de  $N$  ecuaciones requiere para su almacenaje

en memoria de  $N^2$  entradas para la matriz  $\underline{A}$ , pero cerca de  $N^3/3 + O(N^2)$  multiplicaciones y  $N^3/3 + O(N^2)$  adiciones para encontrar la solución siendo muy costoso computacionalmente.

La eliminación Gaussiana se basa en la aplicación de operaciones elementales a renglones o columnas de tal forma que es posible obtener matrices equivalentes.

Escribiendo el sistema de  $N$  ecuaciones lineales con  $N$  incógnitas como

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(0)} x_j = a_{i,n+1}^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (406)$$

y si  $a_{11}^{(0)} \neq 0$  y los pivotes  $a_{ii}^{(i-1)}$ ,  $i = 2, 3, \dots, N$  de las demás filas, que se obtienen en el curso de los cálculos, son distintos de cero, entonces, el sistema lineal anterior se reduce a la forma triangular superior (eliminación hacia adelante)

$$x_i + \sum_{j=i+1}^N a_{ij}^{(i)} x_j = a_{i,n+1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (407)$$

donde

$$\begin{aligned} k &= 1, 2, \dots, N; \{j = k + 1, \dots, N\} \\ a_{kj}^{(k)} &= \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; \\ i &= k + 1, \dots, N + 1\{ \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{kj}^{(k)} a_{ik}^{(k-1)} \} \} \end{aligned}$$

y las incógnitas se calculan por sustitución hacia atrás, usando las fórmulas

$$\begin{aligned} x_N &= a_{N,N+1}^{(N)}; \\ i &= N - 1, N - 2, \dots, 1 \\ x_i &= a_{i,N+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}^{(i)} x_j. \end{aligned} \quad (408)$$

En algunos casos nos interesa conocer  $\underline{A}^{-1}$ , por ello si la eliminación se aplica a la matriz aumentada  $\underline{A} \mid \underline{I}$  entonces la matriz  $\underline{A}$  de la matriz aumentada se convertirá en la matriz  $\underline{I}$  y la matriz  $\underline{I}$  de la matriz aumentada será  $\underline{A}^{-1}$ . Así, el sistema  $\underline{A}\underline{u} = \underline{b}$  se transformará en  $\underline{u} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$  obteniendo la solución de  $\underline{u}$ .

**Descomposición LU** Sea  $\underline{U}$  una matriz triangular superior obtenida de  $\underline{A}$  por eliminación bandada. Entonces  $\underline{U} = \underline{L}^{-1}\underline{A}$ , donde  $\underline{L}$  es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Las entradas de  $\underline{L}^{-1}$  pueden obtenerse de los coeficientes  $m_{ij}$  definidos en el método anterior y pueden ser almacenados estrictamente en las entradas de la diagonal inferior de  $\underline{A}$  ya que estas ya fueron

eliminadas. Esto proporciona una factorización  $\underline{LU}$  de  $\underline{A}$  en la misma matriz  $\underline{A}$  ahorrando espacio de memoria.

El problema original  $\underline{A}\underline{u} = \underline{b}$  se escribe como  $\underline{LU}\underline{u} = \underline{b}$  y se reduce a la solución sucesiva de los sistemas lineales triangulares

$$\underline{L}\underline{y} = \underline{b} \quad \text{y} \quad \underline{U}\underline{u} = \underline{y}. \quad (409)$$

La descomposición  $\underline{LU}$  requiere también  $N^3/3$  operaciones aritméticas para la matriz llena, pero sólo  $Nb^2$  operaciones aritméticas para la matriz con un ancho de banda de  $b$  siendo esto más económico computacionalmente.

Nótese que para una matriz no singular  $\underline{A}$ , la eliminación de Gaussiana (sin redondear filas y columnas) es equivalente a la factorización  $LU$ .

**Eliminación Bandada** Cuando se usa la ordenación natural de los nodos, la matriz  $\underline{A}$  que se genera es bandada, por ello se puede ahorrar considerable espacio de almacenamiento en ella. Este algoritmo consiste en triangular a la matriz  $\underline{A}$  por eliminación hacia adelante operando sólo sobre las entradas dentro de la banda central no cero. Así el renglón  $j$  es multiplicado por  $m_{ij} = a_{ij}/a_{jj}$  y el resultado es restado al renglón  $i$  para  $i = j + 1, j + 2, \dots$

El resultado es una matriz triangular superior  $\underline{U}$  que tiene ceros abajo de la diagonal en cada columna. Así, es posible resolver el sistema resultante al sustituir en forma inversa las incógnitas.

**Descomposición de Cholesky** Cuando la matriz es simétrica y definida positiva, se obtiene la descomposición  $\underline{LU}$  de la matriz  $\underline{A}$ , así  $\underline{A} = \underline{LDU} = \underline{LDL}^T$  donde  $\underline{D} = \text{diag}(\underline{U})$  es la diagonal con entradas positivas. La mayor ventaja de esta descomposición es que, en el caso en que es aplicable, el costo de cómputo es sustancialmente reducido, ya que requiere de  $N^3/6$  multiplicaciones y  $N^3/6$  adiciones.

### 5.1.2. Métodos Iterativos

En estos métodos se realizan iteraciones para aproximarse a la solución  $\underline{u}$  aprovechando las características propias de la matriz  $\underline{A}$ , tratando de usar un menor número de pasos que en un método directo, para más información de estos y otros métodos ver [26] y [36].

Un método iterativo en el cual se resuelve el sistema lineal

$$\underline{A}\underline{u} = \underline{b} \quad (410)$$

comienza con una aproximación inicial  $\underline{u}^0$  a la solución  $\underline{u}$  y genera una sucesión de vectores  $\{\underline{u}^k\}_{k=1}^{\infty}$  que converge a  $\underline{u}$ . Los métodos iterativos traen consigo un proceso que convierte el sistema  $\underline{A}\underline{u} = \underline{b}$  en otro equivalente de la forma  $\underline{u} = \underline{T}\underline{u} + \underline{c}$  para alguna matriz fija  $\underline{T}$  y un vector  $\underline{c}$ . Luego de seleccionar el vector inicial  $\underline{u}^0$  la sucesión de los vectores de la solución aproximada se genera calculando

$$\underline{u}^k = \underline{T}\underline{u}^{k-1} + \underline{c} \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (411)$$

La convergencia a la solución la garantiza el siguiente teorema cuya solución puede verse en [37].

**Teorema 105** Si  $\|\underline{T}\| < 1$ , entonces el sistema lineal  $\underline{u} = \underline{T}\underline{u} + \underline{c}$  tiene una solución única  $\underline{u}^*$  y las iteraciones  $\underline{u}^k$  definidas por la fórmula  $\underline{u}^k = \underline{T}\underline{u}^{k-1} + \underline{c} \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$  convergen hacia la solución exacta  $\underline{u}^*$  para cualquier aproximación lineal  $\underline{u}^0$ .

Notemos que mientras menor sea la norma de la matriz  $\underline{T}$ , más rápida es la convergencia, en el caso cuando  $\|\underline{T}\|$  es menor que uno, pero cercano a uno, la convergencia es muy lenta y el número de iteraciones necesario para disminuir el error depende significativamente del error inicial. En este caso, es deseable proponer al vector inicial  $\underline{u}^0$  de forma tal que se mínimo el error inicial. Sin embargo, la elección de dicho vector no tiene importancia si la  $\|\underline{T}\|$  es pequeña ya que la convergencia es rápida.

Como es conocido, la velocidad de convergencia de los métodos iterativos dependen de las propiedades espectrales de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones, cuando el operador diferencial  $\mathcal{L}$  de la ecuación del problema a resolver es auto-adjunto se obtiene una matriz simétrica y positivo definida y el número de condicionamiento de la matriz  $\underline{A}$ , es por definición

$$\text{cond}(\underline{A}) = \frac{\lambda_{\text{máx}}}{\lambda_{\text{mín}}} \geq 1 \quad (412)$$

donde  $\lambda_{\text{máx}}$  y  $\lambda_{\text{mín}}$  es el máximo y mínimo de los eigenvalores de la matriz  $\underline{A}$ . Si el número de condicionamiento es cercano a 1 los métodos numéricos al solucionar el problema convergerá en pocas iteraciones, en caso contrario se requerirán muchas iteraciones. Frecuentemente al usar el método de elemento finito se tiene una velocidad de convergencia de  $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$  y en el caso de métodos de descomposición de dominio se tiene una velocidad de convergencia de  $O\left(\frac{1}{h}\right)$  en el mejor de los casos, donde  $h$  es la máxima distancia de separación entre nodos continuos de la partición, es decir, que poseen una pobre velocidad de convergencia cuando  $h \rightarrow 0$ , para más detalles ver [4].

Entre los métodos más usados para el tipo de problemas tratados en el presente trabajo podemos encontrar: Jacobi, Gauss-Seidel, Richardson, relajación sucesiva, gradiente conjugado, gradiente conjugado preconditionado.

Los métodos antes mencionados se colocaron en orden descendente en cuanto al consumo de recursos computacionales y ascendente en cuanto al aumento en la eficiencia en su desempeño, describiéndose a continuación:

**Jacobi** Si todos los elementos de la diagonal principal de la matriz  $\underline{A}$  son diferentes de cero  $a_{ii} \neq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Podemos dividir la  $i$ -ésima ecuación del sistema lineal (410) por  $a_{ii}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , y después trasladamos todas las incógnitas, excepto  $x_i$ , a la derecha, se obtiene el sistema equivalente

$$\underline{u} = \underline{B}\underline{u} + \underline{d} \quad (413)$$

donde

$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{y} \quad B = \{b_{ij}\} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{si } j = i \end{cases}.$$

Las iteraciones del método de Jacobi están definidas por la fórmula

$$x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^{(k-1)} + d_i \quad (414)$$

donde  $x_i^{(0)}$  son arbitrarias ( $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots$ ).

También el método de Jacobi se puede expresar en términos de matrices. Supongamos por un momento que la matriz  $\underline{A}$  tiene la diagonal unitaria, esto es  $\text{diag}(\underline{A}) = \underline{I}$ . Si descomponemos  $\underline{A} = \underline{I} - \underline{B}$ , entonces el sistema dado por la Ecs. (410) se puede reescribir como

$$(\underline{I} - \underline{B}) \underline{u} = \underline{b}. \quad (415)$$

Para la primera iteración asumimos que  $\underline{k} = \underline{b}$ ; entonces la última ecuación se escribe como  $\underline{u} = \underline{B}\underline{u} + \underline{k}$ . Tomando una aproximación inicial  $\underline{u}^0$ , podemos obtener una mejor aproximación reemplazando  $\underline{u}$  por la más reciente aproximación de  $\underline{u}^m$ . Esta es la idea que subyace en el método Jacobi. El proceso iterativo queda como

$$\underline{u}^{m+1} = \underline{B}\underline{u}^m + \underline{k}. \quad (416)$$

La aplicación del método a la ecuación de la forma  $\underline{A}\underline{u} = \underline{b}$ , con la matriz  $\underline{A}$  no cero en los elementos diagonales, se obtiene multiplicando la Ec. (410) por  $D^{-1} = [\text{diag}(\underline{A})]^{-1}$  obteniendo

$$\underline{B} = \underline{I} - \underline{D}^{-1}\underline{A}, \quad \underline{k} = \underline{D}^{-1}\underline{b}. \quad (417)$$

**Gauss-Seidel** Este método es una modificación del método Jacobi, en el cual una vez obtenido algún valor de  $\underline{u}^{m+1}$ , este es usado para obtener el resto de los valores utilizando los valores más actualizados de  $\underline{u}^{m+1}$ . Así, la Ec. (416) puede ser escrita como

$$u_i^{m+1} = \sum_{j < i} b_{ij} u_j^{m+1} + \sum_{j > i} b_{ij} u_j^m + k_i. \quad (418)$$

Notemos que el método Gauss-Seidel requiere el mismo número de operaciones aritméticas por iteración que el método de Jacobi. Este método se escribe en forma matricial como

$$\underline{u}^{m+1} = \underline{E}\underline{u}^{m+1} + \underline{F}\underline{u}^m + \underline{k} \quad (419)$$

donde  $\underline{E}$  y  $\underline{F}$  son las matrices triangular superior e inferior respectivamente. Este método mejora la convergencia con respecto al método de Jacobi en un factor aproximado de 2.

**Richardson** Escribiendo el método de Jacobi como

$$\underline{u}^{m+1} - \underline{u}^m = \underline{b} - \underline{A}\underline{u}^m \quad (420)$$

entonces el método Richardson se genera al incorporar la estrategia de sobrerelajación de la forma siguiente

$$\underline{u}^{m+1} = \underline{u}^m + \omega (\underline{b} - \underline{A}\underline{u}^m). \quad (421)$$

El método de Richardson se define como

$$\underline{u}^{m+1} = (\underline{I} - \omega \underline{A}) \underline{u}^m + \omega \underline{b} \quad (422)$$

en la práctica encontrar el valor de  $\omega$  puede resultar muy costoso computacionalmente y las diversas estrategias para encontrar  $\omega$  dependen de las características propias del problema, pero este método con un valor  $\omega$  óptimo resulta mejor que el método de Gauss-Seidel.

**Relajación Sucesiva** Partiendo del método de Gauss-Seidel y sobrerelajando este esquema, obtenemos

$$u_i^{m+1} = (1 - \omega) u_i^m + \omega \left[ \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} u_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^N b_{ij} u_j^m + k_i \right] \quad (423)$$

y cuando la matriz  $\underline{A}$  es simétrica con entradas en la diagonal positivas, éste método converge si y sólo si  $\underline{A}$  es definida positiva y  $\omega \in (0, 2)$ . En la práctica encontrar el valor de  $\omega$  puede resultar muy costoso computacionalmente y las diversas estrategias para encontrar  $\omega$  dependen de las características propias del problema.

**Gradiente Conjugado** El método del gradiente conjugado ha recibido mucha atención en su uso al resolver ecuaciones diferenciales parciales y ha sido ampliamente utilizado en años recientes por la notoria eficiencia al reducir considerablemente en número de iteraciones necesarias para resolver el sistema algebraico de ecuaciones. Aunque los pioneros de este método fueron Hestenes y Stiefel (1952), el interés actual arranca a partir de que Reid (1971) lo planteara como un método iterativo, que es la forma en que se le usa con mayor frecuencia en la actualidad, esta versión está basada en el desarrollo hecho en [15].

La idea básica en que descansa el método del gradiente conjugado consiste en construir una base de vectores ortogonales y utilizarla para realizar la búsqueda de la solución en forma más eficiente. Tal forma de proceder generalmente no sería aconsejable porque la construcción de una base ortogonal utilizando el procedimiento de Gramm-Schmidt requiere, al seleccionar cada nuevo elemento de la base, asegurar su ortogonalidad con respecto a cada uno de los vectores construidos previamente. La gran ventaja del método de gradiente conjugado radica en que cuando se utiliza este procedimiento, basta con asegurar la ortogonalidad de un nuevo miembro con respecto al último que se ha construido,

para que automáticamente esta condición se cumpla con respecto a todos los anteriores.

**Definición 106** Una matriz  $\underline{\underline{A}}$  es llamada positiva definida si todos sus eigenvalores tienen parte real positiva o equivalentemente, si  $\underline{u}^T \underline{\underline{A}} \underline{u}$  tiene parte real positiva para  $\underline{u} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Notemos en este caso que

$$\underline{u}^T \underline{\underline{A}} \underline{u} = \underline{u}^T \frac{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T}{2} \underline{u} > 0, \text{ con } \underline{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

En el algoritmo de gradiente conjugado (CGM), se toma a la matriz  $\underline{\underline{A}}$  como simétrica y positiva definida, y como datos de entrada del sistema

$$\underline{\underline{A}} \underline{u} = \underline{b} \quad (424)$$

el vector de búsqueda inicial  $\underline{u}^0$  y se calcula  $\underline{r}^0 = \underline{b} - \underline{\underline{A}} \underline{u}^0$ ,  $\underline{p}^0 = \underline{r}^0$ , quedando el método esquemáticamente como:

$$\begin{aligned} \beta^{k+1} &= \frac{\underline{\underline{A}} \underline{p}^k \cdot \underline{r}^k}{\underline{\underline{A}} \underline{p}^k \cdot \underline{p}^k} \\ \underline{p}^{k+1} &= \underline{r}^k - \beta^{k+1} \underline{p}^k \\ \alpha^{k+1} &= \frac{\underline{r}^k \cdot \underline{r}^k}{\underline{\underline{A}} \underline{p}^{k+1} \cdot \underline{p}^{k+1}} \\ \underline{u}^{k+1} &= \underline{u}^k + \alpha^{k+1} \underline{p}^{k+1} \\ \underline{r}^{k+1} &= \underline{r}^k - \alpha^{k+1} \underline{\underline{A}} \underline{p}^{k+1}. \end{aligned} \quad (425)$$

Si denotamos  $\{\lambda_i, V_i\}_{i=1}^N$  como las eigensoluciones de  $\underline{\underline{A}}$ , i.e.  $\underline{\underline{A}} V_i = \lambda_i V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Ya que la matriz  $\underline{\underline{A}}$  es simétrica, los eigenvalores son reales y podemos ordenarlos por  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ . Definimos el número de condición por  $Cond(\underline{\underline{A}}) = \lambda_N / \lambda_1$  y la norma de la energía asociada a  $\underline{\underline{A}}$  por  $\|\underline{u}\|_{\underline{\underline{A}}}^2 = \underline{u} \cdot \underline{\underline{A}} \underline{u}$  entonces

$$\|\underline{u} - \underline{u}^k\|_{\underline{\underline{A}}} \leq \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_{\underline{\underline{A}}} \left[ \frac{1 - \sqrt{Cond(\underline{\underline{A}})}}{1 + \sqrt{Cond(\underline{\underline{A}})}} \right]^{2k}. \quad (426)$$

El siguiente teorema nos da idea del espectro de convergencia del sistema  $\underline{\underline{A}} \underline{u} = \underline{b}$  para el método de gradiente conjugado.

**Teorema 107** Sea  $\kappa = cond(\underline{\underline{A}}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \geq 1$ , entonces el método de gradiente conjugado satisface la  $\underline{\underline{A}}$ -norma del error dado por

$$\frac{\|\underline{e}^n\|}{\|\underline{e}^0\|} \leq \frac{2}{\left[ \left( \frac{\sqrt{\kappa}+1}{\sqrt{\kappa}-1} \right)^n + \left( \frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1} \right)^{-n} \right]} \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1} \right)^n \quad (427)$$

donde  $\underline{e}^m = \underline{u} - \underline{u}^m$  del sistema  $\underline{\underline{A}} \underline{u} = \underline{b}$ .

Notemos que para  $\kappa$  grande se tiene que

$$\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \simeq 1 - \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \quad (428)$$

tal que

$$\|\underline{\underline{e}}^n\|_{\underline{\underline{A}}} \simeq \|\underline{\underline{e}}^0\|_{\underline{\underline{A}}} \exp\left(-2\frac{n}{\sqrt{\kappa}}\right) \quad (429)$$

de lo anterior podemos esperar un espectro de convergencia del orden de  $O(\sqrt{\kappa})$  iteraciones, para mayor referencia ver [37].

**Definición 108** *Un método iterativo para la solución de un sistema lineal es llamado óptimo, si la razón de convergencia a la solución exacta es independiente del tamaño del sistema lineal.*

## 5.2. Precondicionadores

Una vía que permite mejorar la eficiencia de los métodos iterativos consiste en transformar al sistema de ecuaciones en otro equivalente, en el sentido de que posea la misma solución del sistema original pero que a su vez tenga mejores condiciones espectrales. Esta transformación se conoce como precondicionamiento y consiste en aplicar al sistema de ecuaciones una matriz conocida como precondicionador encargada de realizar el mejoramiento del número de condicionamiento.

Una amplia clase de precondicionadores han sido propuestos basados en las características algebraicas de la matriz del sistema de ecuaciones, mientras que por otro lado también existen precondicionadores desarrollados a partir de las características propias del problema que lo origina, un estudio más completo puede encontrarse en [4] y [28].

**¿Qué es un Precondicionador?** De una manera formal podemos decir que un precondicionador consiste en construir una matriz  $\underline{\underline{C}}$ , la cuál es una aproximación en algún sentido de la matriz  $\underline{\underline{A}}$  del sistema  $\underline{\underline{A}}u = \underline{\underline{b}}$ , de manera tal que si multiplicamos ambos miembros del sistema de ecuaciones original por  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  obtenemos el siguiente sistema

$$\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{A}}u = \underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{b}} \quad (430)$$

donde el número de condicionamiento de la matriz del sistema transformado  $\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{A}}$  debe ser menor que el del sistema original, es decir

$$Cond(\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{A}}) < Cond(\underline{\underline{A}}), \quad (431)$$

dicho de otra forma un precondicionador es una inversa aproximada de la matriz original

$$\underline{\underline{C}}^{-1} \simeq \underline{\underline{A}}^{-1} \quad (432)$$

que en el caso ideal  $\underline{C}^{-1} = \underline{A}^{-1}$  el sistema convergería en una sola iteración, pero el coste computacional del cálculo de  $\underline{A}^{-1}$  equivaldría a resolver el sistema por un método directo. Se sugiere que  $\underline{C}$  sea una matriz lo más próxima a  $\underline{A}$  sin que su determinación suponga un coste computacional elevado.

Dependiendo de la forma de plantear el producto de  $\underline{C}^{-1}$  por la matriz del sistema obtendremos distintas formas de preconditionamiento, estas son:

|   |  |
|---|--|
| $\underline{C}^{-1}\underline{A}u = \underline{C}^{-1}\underline{b}$  | Precondicionamiento por la izquierda   |
| $\underline{A}\underline{C}^{-1}\underline{C}u = \underline{b}$   | Precondicionamiento por la derecha   |
| $\underline{C}_1^{-1}\underline{A}\underline{C}_2^{-1}\underline{C}_2u = \underline{C}_1^{-1}\underline{b}$ | Precondicionamiento por ambos lados<br>si $\underline{C}$ puede factorizarse como $\underline{C} = \underline{C}_1\underline{C}_2$ . |

El uso de un preconditionador en un método iterativo provoca que se incurra en un costo de cómputo extra debido a que inicialmente se construye y luego se debe aplicar en cada iteración. Teniéndose que encontrar un balance entre el costo de construcción y aplicación del preconditionador versus la ganancia en velocidad en convergencia del método.

Ciertos preconditionadores necesitan poca o ninguna fase de construcción, mientras que otros pueden requerir de un trabajo substancial en esta etapa. Por otra parte la mayoría de los preconditionadores requieren en su aplicación un monto de trabajo proporcional al número de variables; esto implica que se multiplica el trabajo por iteración en un factor constante.

De manera resumida un buen preconditionador debe reunir las siguientes características:

- i) Al aplicar un preconditionador  $\underline{C}$  al sistema original de ecuaciones  $\underline{A}u = \underline{b}$ , se debe reducir el número de iteraciones necesarias para que la solución aproximada tenga la convergencia a la solución exacta con una exactitud  $\varepsilon$  prefijada.
- ii) La matriz  $\underline{C}$  debe ser fácil de calcular, es decir, el costo computacional de la construcción del preconditionador debe ser pequeño comparado con el costo total de resolver el sistema de ecuaciones  $\underline{A}u = \underline{b}$ .
- iii) El sistema  $\underline{C}z = r$  debe ser fácil de resolver. Esto debe interpretarse de dos maneras:
  - a) El monto de operaciones por iteración debido a la aplicación del preconditionador  $\underline{C}$  debe ser pequeño o del mismo orden que las que se requerirían sin preconditionamiento. Esto es importante si se trabaja en máquinas secuenciales.
  - b) El tiempo requerido por iteración debido a la aplicación del preconditionador debe ser pequeño.

En computadoras paralelas es importante que la aplicación del preconditionador sea paralelizable, lo cual eleva su eficiencia, pero debe de existir un

balance entre la eficacia de un preconditionador en el sentido clásico y su eficiencia en paralelo ya que la mayoría de los preconditionadores tradicionales tienen un componente secuencial grande.

El método de gradiente conjugado por sí mismo no permite el uso de preconditionadores, pero con una pequeña modificación en el producto interior usado en el método, da origen al método de gradiente conjugado preconditionado que a continuación detallaremos.

### 5.2.1. Gradiente Conjugado Precondicionado

Cuando la matriz  $\underline{\underline{A}}$  es simétrica y definida positiva se puede escribir como

$$\lambda_1 \leq \frac{\underline{\underline{uA}} \cdot \underline{\underline{u}}}{\underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{u}}} \leq \lambda_n \quad (433)$$

y tomando la matriz  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  como un preconditionador de  $\underline{\underline{A}}$  con la condición de que

$$\lambda_1 \leq \frac{\underline{\underline{uC}}^{-1} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{u}}}{\underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{u}}} \leq \lambda_n \quad (434)$$

entonces la Ec. (424) se puede escribir como

$$\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{b}} \quad (435)$$

donde  $\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}}$  es también simétrica y definida positiva en el producto interior  $\langle \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}} \rangle = \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{C}} \underline{\underline{v}}$ , porque

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}} \rangle &= \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}}) \\ &= \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}} \end{aligned} \quad (436)$$

que por hipótesis es simétrica y definida positiva en ese producto interior.

La elección del producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  quedará definido como

$$\langle \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}} \rangle = \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}} \quad (437)$$

por ello las Ecs. (425[1]) y (425[3]), se convierten en

$$\alpha^{k+1} = \frac{\underline{\underline{r}}^k \cdot \underline{\underline{r}}^k}{\underline{\underline{p}}^{k+1} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{p}}^{k+1}} \quad (438)$$

y

$$\beta^{k+1} = \frac{\underline{\underline{p}}^k \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{r}}^k}{\underline{\underline{p}}^k \cdot \underline{\underline{A}} \underline{\underline{p}}^k} \quad (439)$$

generando el método de gradiente conjugado preconditionado con preconditionador  $\underline{\underline{C}}^{-1}$ . Es necesario hacer notar que los métodos gradiente conjugado y gradiente conjugado preconditionado sólo difieren en la elección del producto interior.

Para el método de gradiente conjugado preconditionado, los datos de entrada son un vector de búsqueda inicial  $\underline{u}^0$  y el preconditionador  $\underline{C}^{-1}$ . Calculándose  $\underline{r}^0 = \underline{b} - \underline{A}\underline{u}^0$ ,  $\underline{p} = \underline{C}^{-1}\underline{r}^0$ , quedando el método esquemáticamente como:

$$\begin{aligned}
 \beta^{k+1} &= \frac{\underline{p}^k \cdot \underline{C}^{-1}\underline{r}^k}{\underline{p}^k \cdot \underline{A}\underline{p}^k} \\
 \underline{p}^{k+1} &= \underline{r}^k - \beta^{k+1}\underline{p}^k \\
 \alpha^{k+1} &= \frac{\underline{r}^k \cdot \underline{r}^k}{\underline{p}^{k+1} \cdot \underline{C}^{-1}\underline{p}^{k+1}} \\
 \underline{u}^{k+1} &= \underline{u}^k + \alpha^{k+1}\underline{p}^{k+1} \\
 \underline{r}^{k+1} &= \underline{C}^{-1}\underline{r}^k - \alpha^{k+1}\underline{A}\underline{p}^{k+1}.
 \end{aligned} \tag{440}$$

**Algoritmo Computacional del Método** Dado el sistema  $\underline{A}\underline{u} = \underline{b}$ , con la matriz  $\underline{A}$  simétrica y definida positiva de dimensión  $n \times n$ . La entrada al método será una elección de  $\underline{u}^0$  como condición inicial,  $\varepsilon > 0$  como la tolerancia del método,  $N$  como el número máximo de iteraciones y la matriz de preconditionamiento  $\underline{C}^{-1}$  de dimensión  $n \times n$ , el algoritmo del método de gradiente conjugado preconditionado queda como:

$$\begin{aligned}
 \underline{r} &= \underline{b} - \underline{A}\underline{u} \\
 \underline{w} &= \underline{C}^{-1}\underline{r} \\
 \underline{v} &= (\underline{C}^{-1})^T \underline{w} \\
 \alpha &= \sum_{j=1}^n w_j^2 \\
 k &= 1 \\
 \text{Mientras que } k &\leq N
 \end{aligned}$$

Si  $\|\underline{v}\|_\infty < \varepsilon$  Salir

$$\underline{x} = \underline{A}\underline{v}$$

$$t = \frac{\alpha}{\sum_{j=1}^n v_j x_j}$$

$$\underline{u} = \underline{u} + t\underline{v}$$

$$\underline{r} = \underline{r} - t\underline{x}$$

$$\underline{w} = \underline{C}^{-1}\underline{r}$$

$$\beta = \sum_{j=1}^n w_j^2$$

Si  $\|\underline{r}\|_\infty < \varepsilon$  Salir

$$s = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\underline{v} = (\underline{C}^{-1})^T \underline{w} + s\underline{v}$$

$$\alpha = \beta$$

$$k = k + 1$$

La salida del método será la solución aproximada  $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$  y el residual  $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$ .

En el caso del método sin preconditionamiento,  $\underline{C}^{-1}$  es la matriz identidad, que para propósitos de optimización sólo es necesario hacer la asignación de vectores correspondiente en lugar del producto de la matriz por el vector. En el caso de que la matriz  $\underline{A}$  no sea simétrica, el método de gradiente conjugado puede extenderse para soportarlas, para más información sobre pruebas de convergencia, resultados numéricos entre los distintos métodos de solución del sistema algebraico  $\underline{A}\underline{u} = \underline{b}$  generada por la discretización de un problema elíptico y como extender estos para matrices no simétricas ver [15] y [13].

**Teorema 109** Sean  $\underline{A}, \underline{B}$  y  $\underline{C}$  tres matrices simétricas y positivas definidas entonces

$$\kappa(\underline{C}^{-1}\underline{A}) \leq \kappa(\underline{C}^{-1}\underline{B}) \kappa(\underline{B}^{-1}\underline{A}).$$

**Clasificación de los Precondicionadores** En general se pueden clasificar en dos grandes grupos según su manera de construcción: los algebraicos o a posteriori y los a priori o directamente relacionados con el problema continuo que lo origina.

### 5.2.2. Precondicionador a Posteriori

Los preconditionadores algebraicos o a posteriori son los más generales, ya que sólo dependen de la estructura algebraica de la matriz  $\underline{A}$ , esto quiere decir que no tienen en cuenta los detalles del proceso usado para construir el sistema de ecuaciones lineales  $\underline{A}\underline{u} = \underline{b}$ . Entre estos podemos citar los métodos de preconditionamiento del tipo Jacobi, SSOR, factorización incompleta, inversa aproximada, diagonal óptimo y polinomial.

**Precondicionador Jacobi** El método preconditionador Jacobi es el preconditionador más simple que existe y consiste en tomar en calidad de preconditionador a los elementos de la diagonal de  $\underline{A}$

$$C_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (441)$$

Debido a que las operaciones de división son usualmente más costosas en tiempo de cómputo, en la práctica se almacenan los recíprocos de la diagonal de  $\underline{A}$ .

Ventajas: No necesita trabajo para su construcción y puede mejorar la convergencia.

Desventajas: En problemas con número de condicionamiento muy grande, no es notoria la mejoría en el número de iteraciones.

**Precondicionador SSOR** Si la matriz original es simétrica, se puede descomponer como en el método de sobrerrelajamiento sucesivo simétrico (SSOR) de la siguiente manera

$$\underline{A} = \underline{D} + \underline{L} + \underline{L}^T \quad (442)$$

donde  $\underline{D}$  es la matriz de la diagonal principal y  $\underline{L}$  es la matriz triangular inferior.

La matriz en el método SSOR se define como

$$\underline{C}(\omega) = \frac{1}{2-\omega} \left( \frac{1}{\omega} \underline{D} + \underline{L} \right) \left( \frac{1}{\omega} \underline{D} \right)^{-1} \left( \frac{1}{\omega} \underline{D} + \underline{L} \right)^T \quad (443)$$

en la práctica la información espectral necesaria para hallar el valor óptimo de  $\omega$  es demasiado costoso para ser calculado.

Ventajas: No necesita trabajo para su construcción, puede mejorar la convergencia significativamente.

Desventajas: Su paralelización depende fuertemente del ordenamiento de las variables.

**Precondicionador de Factorización Incompleta** Existen una amplia clase de preconditionadores basados en factorizaciones incompletas. La idea consiste en que durante el proceso de factorización se ignoran ciertos elementos diferentes de cero correspondientes a posiciones de la matriz original que son nulos. La matriz preconditionadora se expresa como  $\underline{C} = \underline{L}\underline{U}$ , donde  $\underline{L}$  es la matriz triangular inferior y  $\underline{U}$  la superior. La eficacia del método depende de cuán buena sea la aproximación de  $\underline{C}^{-1}$  con respecto a  $\underline{A}^{-1}$ .

El tipo más común de factorización incompleta se basa en seleccionar un subconjunto  $S$  de las posiciones de los elementos de la matriz y durante el proceso de factorización considerar a cualquier posición fuera de éste igual a cero. Usualmente se toma como  $S$  al conjunto de todas las posiciones  $(i, j)$  para las que  $A_{ij} \neq 0$ . Este tipo de factorización es conocido como factorización incompleta LU de nivel cero, ILU(0).

El proceso de factorización incompleta puede ser descrito formalmente como sigue:

Para cada  $k$ , si  $i, j > k$ :

$$S_{ij} = \begin{cases} A_{ij} - A_{ij}A_{ij}^{-1}A_{kj} & \text{Si } (i, j) \in S \\ A_{ij} & \text{Si } (i, j) \notin S. \end{cases} \quad (444)$$

Una variante de la idea básica de las factorizaciones incompletas lo constituye la factorización incompleta modificada que consiste en que si el producto

$$A_{ij} - A_{ij}A_{ij}^{-1}A_{kj} \neq 0 \quad (445)$$

y el llenado no está permitido en la posición  $(i, j)$ , en lugar de simplemente descartarlo, esta cantidad se le sustrae al elemento de la diagonal  $A_{ij}$ . Matemáticamente esto corresponde a forzar a la matriz preconditionadora a tener la misma suma por filas que la matriz original. Esta variante resulta de interés puesto

que se ha probado que para ciertos casos la aplicación de la factorización incompleta modificada combinada con pequeñas perturbaciones hace que el número de condicionamiento espectral del sistema preconditionado sea de un orden inferior.

Ventaja: Puede mejorar el condicionamiento y la convergencia significativamente.

Desventaja: El proceso de factorización es costoso y difícil de paralelizar en general.

**Precondicionador de Inversa Aproximada** El uso del preconditionador de inversas aproximada se ha convertido en una buena alternativa para los preconditionadores implícitos debido a su naturaleza paralelizable. Aquí se construye una matriz inversa aproximada usando el producto escalar de Frobenius.

Sea  $\mathcal{S} \subset C_n$ , el subespacio de las matrices  $\underline{\underline{C}}$  donde se busca una inversa aproximada explícita con un patrón de dispersión desconocido. La formulación del problema esta dada como: Encontrar  $\underline{\underline{C}}_0 \in \mathcal{S}$  tal que

$$\underline{\underline{C}}_0 = \arg \min_{\underline{\underline{C}} \in \mathcal{S}} \|\underline{\underline{AC}} - \underline{\underline{I}}\|. \quad (446)$$

Además, esta matriz inicial  $\underline{\underline{C}}_0$  puede ser una inversa aproximada de  $\underline{\underline{A}}$  en un sentido estricto, es decir,

$$\|\underline{\underline{AC}}_0 - \underline{\underline{I}}\| = \varepsilon < 1. \quad (447)$$

Existen dos razones para esto, primero, la ecuación (447) permite asegurar que  $\underline{\underline{C}}_0$  no es singular (lema de Banach), y segundo, esta será la base para construir un algoritmo explícito para mejorar  $\underline{\underline{C}}_0$  y resolver la ecuación  $\underline{\underline{Au}} = \underline{\underline{b}}$ .

La construcción de  $\underline{\underline{C}}_0$  se realiza en paralelo, independizando el cálculo de cada columna. El algoritmo permite comenzar desde cualquier entrada de la columna  $k$ , se acepta comúnmente el uso de la diagonal como primera aproximación. Sea  $r_k$  el residuo correspondiente a la columna  $k$ -ésima, es decir

$$r_k = \underline{\underline{AC}}_k - \underline{\underline{e}}_k \quad (448)$$

y sea  $\mathcal{I}_k$  el conjunto de índices de las entradas no nulas en  $r_k$ , es decir,  $\mathcal{I}_k = \{i = \{1, 2, \dots, n\} \mid r_{ik} \neq 0\}$ . Si  $\mathcal{L}_k = \{l = \{1, 2, \dots, n\} \mid C_{lk} \neq 0\}$ , entonces la nueva entrada se busca en el conjunto  $\mathcal{J}_k = \{j \in \mathcal{L}_k^c \mid A_{ij} \neq 0, \forall i \in \mathcal{I}_k\}$ . En realidad las únicas entradas consideradas en  $\underline{\underline{C}}_k$  son aquellas que afectan las entradas no nulas de  $r_k$ . En lo que sigue, asumimos que  $\mathcal{L}_k \cup \{j\} = \{i_1^k, i_2^k, \dots, i_{p_k}^k\}$  es no vacío, siendo  $p_k$  el número actual de entradas no nulas de  $\underline{\underline{C}}_k$  y que  $i_{p_k}^k = j$ , para todo  $j \in \mathcal{J}_k$ . Para cada  $j$ , calculamos

$$\|\underline{\underline{AC}}_k - \underline{\underline{e}}_k\|_2^2 = 1 - \sum_{l=1}^{p_k} \frac{[\det(\underline{\underline{D}}_l^k)]^2}{\det(\underline{\underline{G}}_{l-2}^k) \det(\underline{\underline{G}}_l^k)} \quad (449)$$

donde, para todo  $k$ ,  $\det(\underline{\underline{G}}_0^k) = 1$  y  $\underline{\underline{G}}_l^k$  es la matriz de Gram de las columnas  $i_1^k, i_2^k, \dots, i_{p_k}^k$  de la matriz  $\underline{\underline{A}}$  con respecto al producto escalar Euclideo;  $\underline{\underline{D}}_l^k$  es la matriz que resulta de remplazar la última fila de la matriz  $\underline{\underline{G}}_l^k$  por  $a_{ki_1^k}, a_{ki_2^k}, \dots, a_{ki_l^k}$ , con  $1 \leq l \leq p_k$ . Se selecciona el índice  $j_k$  que minimiza el valor de  $\|\underline{\underline{A}}\underline{\underline{C}}_k - \underline{\underline{e}}_k\|_2$ .

Esta estrategia define el nuevo índice seleccionado  $j_k$  atendiendo solamente al conjunto  $\mathcal{L}_k$ , lo que nos lleva a un nuevo óptimo donde se actualizan todas las entradas correspondientes a los índices de  $\mathcal{L}_k$ . Esto mejora el criterio de (446) donde el nuevo índice se selecciona manteniendo las entradas correspondientes a los índices de  $\mathcal{L}_k$ . Así  $\underline{\underline{C}}_k$  se busca en el conjunto

$$\mathcal{S}_k = \{\underline{\underline{C}}_k \in \mathbb{R}^n \mid C_{ik} = 0, \forall i \in \mathcal{L}_k \cup \{j_k\}\},$$

$$\underline{\underline{m}}_k = \sum_{l=1}^{p_k} \frac{\det(\underline{\underline{D}}_l^k)}{\det(\underline{\underline{G}}_{l-2}^k) \det(\underline{\underline{G}}_l^k)} \tilde{m}_l \quad (450)$$

donde  $\tilde{\underline{\underline{C}}}_l$  es el vector con entradas no nulas  $i_h^k$  ( $1 \leq h \leq l$ ). Cada una de ellas se obtiene evaluado el determinante correspondiente que resulta de remplazar la última fila del  $\det(\underline{\underline{G}}_l^k)$  por  $e_h^t$ , con  $1 \leq l \leq p_k$ .

Evidentemente, los cálculos de  $\|\underline{\underline{A}}\underline{\underline{C}}_k - \underline{\underline{e}}_k\|_2^2$  y de  $\underline{\underline{C}}_k$  pueden actualizarse añadiendo la contribución de la última entrada  $j \in \mathcal{J}_k$  a la suma previa de 1 a  $p_k - 1$ . En la práctica,  $\det(\underline{\underline{G}}_l^k)$  se calcula usando la descomposición de Cholesky puesto que  $\underline{\underline{G}}_l^k$  es una matriz simétrica y definida positiva. Esto sólo involucra la factorización de la última fila y columna si aprovechamos la descomposición de  $\underline{\underline{G}}_{l-1}^k$ . Por otra parte,  $\det(\underline{\underline{D}}_l^k) / \det(\underline{\underline{G}}_l^k)$  es el valor de la última incógnita del sistema  $\underline{\underline{G}}_l^k \underline{\underline{d}}_l = (a_{ki_1^k}, a_{ki_2^k}, \dots, a_{ki_l^k})^T$  necesiándose solamente una sustitución por descenso. Finalmente, para obtener  $\tilde{\underline{\underline{C}}}_l$  debe resolverse el sistema  $\underline{\underline{G}}_l^k \underline{\underline{v}}_l = \underline{\underline{e}}_l$ , con  $\tilde{C}_{i_l^k} = v_{hl}$ , ( $1 \leq h \leq l$ ).

Ventaja: Puede mejorar el condicionamiento y la convergencia significativamente y es fácilmente paralelizable.

Desventaja: El proceso construcción es algo laborioso.

### 5.2.3. Precondicionador a Priori

Los preconditionadores a priori son más particulares y dependen para su construcción del conocimiento del proceso de discretización de la ecuación diferencial parcial, dicho de otro modo dependen más del proceso de construcción de la matriz  $\underline{\underline{A}}$  que de la estructura de la misma.

Estos preconditionadores usualmente requieren de más trabajo que los del tipo algebraico discutidos anteriormente, sin embargo permiten el desarrollo de métodos de solución especializados más rápidos que los primeros.

Veremos algunos de los métodos más usados relacionados con la solución de ecuaciones diferenciales parciales en general y luego nos concentraremos en el caso de los métodos relacionados directamente con descomposición de dominio.

En estos casos el preconditionador  $\underline{\underline{C}}$  no necesariamente toma la forma simple de una matriz, sino que debe ser visto como un operador en general. De aquí que  $\underline{\underline{C}}$  podría representar al operador correspondiente a una versión simplificada del problema con valores en la frontera que deseamos resolver.

Por ejemplo se podría emplear en calidad de preconditionador al operador original del problema con coeficientes variables tomado con coeficientes constantes. En el caso del operador de Laplace se podría tomar como preconditionador a su discretización en diferencias finitas centrales.

Por lo general estos métodos alcanzan una mayor eficiencia y una convergencia óptima, es decir, para ese problema en particular el preconditionador encontrado será el mejor preconditionador existente, llegando a disminuir el número de iteraciones hasta en un orden de magnitud. Donde muchos de ellos pueden ser paralelizados de forma efectiva.

**El Uso de la Parte Simétrica como Preconditionador** La aplicación del método del gradiente conjugado en sistemas no auto-adjuntos requiere del almacenamiento de los vectores previamente calculados. Si se usa como preconditionador la parte simétrica

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T)/2 \quad (451)$$

de la matriz de coeficientes  $\underline{\underline{A}}$ , entonces no se requiere de éste almacenamiento extra en algunos casos, resolver el sistema de la parte simétrica de la matriz  $\underline{\underline{A}}$  puede resultar más complicado que resolver el sistema completo.

**El Uso de Métodos Directos Rápidos como Preconditionadores** En muchas aplicaciones la matriz de coeficientes  $\underline{\underline{A}}$  es simétrica y positivo definida, debido a que proviene de un operador diferencial auto-adjunto y acotado. Esto implica que se cumple la siguiente relación para cualquier matriz  $\underline{\underline{B}}$  obtenida de una ecuación diferencial similar

$$c_1 \leq \frac{\underline{\underline{x}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}}{\underline{\underline{x}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{x}}} \leq c_2 \quad \forall \underline{\underline{x}} \quad (452)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  no dependen del tamaño de la matriz. La importancia de esta propiedad es que del uso de  $\underline{\underline{B}}$  como preconditionador resulta un método iterativo cuyo número de iteraciones no depende del tamaño de la matriz.

La elección más común para construir el preconditionador  $\underline{\underline{B}}$  es a partir de la ecuación diferencial parcial separable. El sistema resultante con la matriz  $\underline{\underline{B}}$  puede ser resuelto usando uno de los métodos directos de solución rápida, como pueden ser por ejemplo los basados en la transformada rápida de Fourier.

Como una ilustración simple del presente caso obtenemos que cualquier operador elíptico puede ser preconditionado con el operador de Poisson.

**Construcción de Precondicionadores para Problemas Elípticos Empleando DDM** Existen una amplia gama de este tipo de precondicionadores, pero son específicos al método de descomposición de dominio usado, para el método de subestructuración, los más importantes se derivan de la matriz de rigidez y por el método de proyecciones, el primero se detalla en la sección (??) y el segundo, conjuntamente con otros precondicionadores pueden ser consultados en [22], [9], [8] y [4].

**Definición 110** *Un método para la solución del sistema lineal generado por métodos de descomposición de dominio es llamado escalable, si la razón de convergencia no se deteriora cuando el número de subdominios crece.*

La gran ventaja de este tipo de precondicionadores es que pueden ser óptimos y escalables.

## 6. Bibliografía

### Referencias

- [1] A. Quarteroni y A. Valli; *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Clarendon Press Oxford, 1999.
- [2] A. Quarteroni y A. Valli; *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, 1994.
- [3] A. Rosas Medina, *Teoría General de Elementos Finitos en Funciones Discontinuas Definidas por Tramos*, Tesis de Maestría, Instituto de Geofísica, UNAM, 2008.
- [4] A. Toselli, O. Widlund; *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*. Springer, 2005.
- [5] B. Cockburn, G. E. Karniadakis y C. W. Shu; *Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications*. Springer, 2000.
- [6] B. Dietrich, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University, 2001.
- [7] B. D. Reddy; *Introductory Functional Analysis - With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*. Springer 1991.
- [8] B. F. Smith, P. E. Bjørstad, W. D. Gropp; *Domain Decomposition, Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996.
- [9] B. I. Wohlmuth; *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*. Springer, 2003.
- [10] C. Farhat, I Harari, L. P. Franca; *The Discontinuous Enrichment Method*. *Computer Methods in Applied mechanics and Engineering*, 190 (6455-6479), 2001.
- [11] E. Rubio; *Métodos de Elementos Finitos con Funciones Óptimas*, Tesis Doctoral, Instituto de geofísica, UNAM, 2008.
- [12] I. Foster; *Designing and Building Parallel Programs*. Addison-Wesley Inc., Argonne National Laboratory, and the NSF, 2004.
- [13] I. Herrera; *Análisis de Alternativas al Método de Gradiente Conjugado para Matrices no Simétricas*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1989.
- [14] I. Herrera, M. Díaz; *Modelación Matemática de Sistemas Terrestres* (Notas de Curso en Preparación). Instituto de Geofísica, (UNAM).

- [15] I. Herrera; *Un Análisis del Método de Gradiente Conjugado*. Comunicaciones Técnicas del Instituto de Geofísica, UNAM; Serie Investigación, No. 7, 1988.
- [16] I. Herrera; *Método de Subestructuración* (Notas de Curso en Preparación). Instituto de Geofísica, (UNAM).
- [17] I. Herrera, R. Yates y E. Rubio. "More Efficient Procedures for Applying Collocation". *Advances in Engineering Software* 38 (2007) 657-667.
- [18] I. Herrera. "Theory of Differential Equations in Discontinuous Piecewise-Defined Functions". Wiley InterScience, 2006.
- [19] I. Herrera. "New Formulation of Iterative Substructuring Methods Without Lagrange Multipliers Neumann-Neumann and FETI". Wiley InterScience, 2007.
- [20] I. Herrera y R. Yates, "Unified Multipliers-Free Theory of Dual-Primal Domain Decomposition Methods", *Numerical Methods For Partial Differential Equations*, Wiley InterScience, 2008.
- [21] F. Brezzi y M. Fortin; *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, 1991.
- [22] J. H. Bramble, J. E. Pasciak and A. H. Schatz. *The Construction of Preconditioners for Elliptic Problems by Substructuring*. I. *Math. Comput.*, 47, 103-134, 1986.
- [23] J. L. Lions & E. Magenes; *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications Vol. I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.
- [24] K. Hutter & K. Jöhnk; *Continuum Methods of Physical Modeling*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2004.
- [25] L. F. Pavarino, A. Toselli; *Recent Developments in Domain Decomposition Methods*. Springer, 2003.
- [26] M.B. Allen III, I. Herrera & G. F. Pinder; *Numerical Modeling in Science And Engineering*. John Wiley & Sons, Inc . 1988.
- [27] M. Diaz; *Desarrollo del Método de Colocación Trefftz-Herrera Aplicación a Problemas de Transporte en las Geociencias*. Tesis Doctoral, Instituto de Geofísica, UNAM, 2001.
- [28] M. Diaz, I. Herrera; *Desarrollo de Precondicionadores para los Procedimientos de Descomposición de Dominio*. Unidad Teórica C, Posgrado de Ciencias de la Tierra, 22 pags, 1997.
- [29] P.G. Ciarlet, J. L. Lions; *Handbook of Numerical Analysis, Vol. II*. North-Holland, 1991.

- [30] R. L. Burden y J. D. Faires; *Análisis Numérico*. Math Learning, 7 ed. 2004.
- [31] S. Friedberg, A. Insel, and L. Spence; *Linear Algebra*, 4th Edition, Prentice Hall, Inc. 2003.
- [32] T. J. R. Hughes; *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall, 1987.
- [33] W. Gropp, E. Lusk, A. Skjelle, *Using MPI, Portable Parallel Programming With the Message Passing Interface*. Scientific and Engineering Computation Series, 2ed, 1999.
- [34] W. Rudin; *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1976.
- [35] X. O. Olivella, C. A. de Sacribar; *Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros*. Ediciones UPC, 2000.
- [36] Y. Saad; *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2 ed. 2000.
- [37] Y. Skiba; *Métodos y Esquemas Numéricos, un Análisis Computacional*. UNAM, 2005.