PLAN DE TRABAJO PREDOCTORAL

Alumno: Antonio Carrillo Ledesma

Titulo del Proyecto:

Computación en Paralelo: Nuevas Formulaciones de Métodos Precondicionados de Subestructuración

Plan de Trabajo para los Primeros dos Semestres.

1er Semestre

Unidad Teórica A: *Estudio de los métodos de elementos finitos mixtos e híbridos para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas.*

Unidad Teórica B: *Estudio de los métodos Trefftz-Herrera, Galer-kin Discontinuo, Discontinuo Enriquecido y FETI para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas.*

2do Semestre

Unidad Teórica C: *Estudio del método de funciones discontinuas definidas por tramos para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas.*

Trabajo de Investigación A: Unificación y Simplificación de los Métodos Dual-Primal de Descomposición de Dominio.

Proyecto de Tesis Doctoral

Computación en Paralelo: Nuevas Formulaciones de Métodos Precondicionados de Subestructuración

Antecedentes:

Una característica del método de elemento finito (FEM) y de muchos otros métodos numéricos para ecuaciones diferenciales parciales es el uso -después de que la partición del domino del problema ha sido introducida- de las funciones de base y funciones de peso definidas por tramos, i.e. ellas son definidas separadamente en cada uno de los subdominios de la partición. Pero como las funciones son definidas independientemente en cada uno de los subdominos de la partición y, sobre la frontera común de dos subdominos, los límites de uno y otro lado no necesariamente coinciden.

Por lo consiguiente, una teoría general y sistemática del método de elemento finito debe de ser reformulada en espacios de funciones en los cuales las funciones de peso y base puedan ser totalmente discontinuas a través de la frontera interior. Dicha teoría puede ser incluida en el método de Galerkin discontinuo (dG) y nos permite movernos suavemente sin interrupciones del método de elemento finito estándar -basado en funciones continuas definidas por tramos- al método de Galerkin discontinuo.

La mayoría de los métodos FEM que existen en el presente usan funciones definidas por tramos con cierto grado de continuidad; típicamente, para una ecuación elíptica de segundo orden las funciones son tomadas del espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, en el cual las funciones son continuas con posibles discontinuidades en la derivada de primer orden [2]. Pese a que el método dG, originalmente fue introducido con el propósito de tratar sistemas hiperbólicos de ecuaciones, su alcance ha sido expandido considerablemente durante los últimos años al tratar la solución numérica de la ecuación de Navier-Stokes [3], [4] y [5].

En la actualidad, uno de los más populares procedimientos en los que se aplica la formulación dG combinado métodos híbridos y variantes con multiplicadores de Lagrange -este es un procedimiento debido a Brezzi y Fortin [6]-, y la formulación variacional hibrida con continuidad débil es el método de enriquecimiento discontinuo (DEM) [7-11].

Por otro lado, en los métodos Trefftz-Herrera [12-16] también se han usado extensivamente las funciones discontinuas para construir la solución apro-ximada de las ecuaciones diferenciales parciales. Ello es necesario por que al aplicar la solución analítica no se satisface ninguna condición de unión a través de los elementos de la frontera interior.

Farhat y sus colaboradores han tratado de forma extensiva el problema de Helmhotz usando el método DEM en cual se aplica como enriquecedor, un sistema completo de ondas planas, las cuales constituyen un sistema analítico C-completo [17] -también llamado T-completo o TH-completo-, él y sus colaboradores fueron los primeros en desarrollarlo en [18], otros tipos de sistema de enriquecimiento se propusieron en [19] y [20]. Por lo anterior, es que el método Trefftz-Herrera es extensamente usado por la comunidad [15], teniendo una profunda conexión con algunos métodos dG, tales como DEM; en particular la estructura que es introducida por Jirousek en el método Trefftz-Herrera en [12] y [13], juega esencialmente el mismo papel que el de los multiplicadores de Lagrange en DEM [16].

Una queja constante en el uso del método DEM es el incremento en el número de grados de libertad que el interpolador de Lagrange genera [11], y el mismo fenómeno ocurre debido a la estructura introducida al método Trefftz [16]. En esta conexión, una importante implicación de la aproximación hecha en el trabajo de Herrera [1]: "La teoría de ecuaciones diferenciales parciales formulada en espacios de funciones en los cuales las funciones de peso y base puedan ser totalmente discontinuas permite eludir la introducción de los multiplicadores de Lagrange, en el caso del método dG, y la estructura introducida en el caso del método Trefftz-Herrera".

Así, cuando las ecuaciones diferenciales parciales son formuladas en funciones discontinuas definidas por tramos, los problemas bien planteados son problemas de valor en la frontera con saltos prescritos (BVPJ), en los cuales las condiciones de frontera son complementadas por adecuadas condiciones de salto, que satisfacen los cruces en la frontera interior asociados con la partición del dominio. Un resultado mostrado en el trabajo de Herrera [1], muestra que para problemas elípticos de orden $2m$, con $m \geq 1$, el BVPJ satisface existencia si y sólo si el problema estándar de valor en la frontera suave lo satisface. por lo tanto, este resultado esencialmente reduce el problema de establecer condiciones para la existencia de la solución para el problema de valores en la frontera con saltos preescritos a un problema con valores en la frontera estándar.

Por lo tanto, al trabajar con funciones discontinuas definidas por tramos, podemos disminuir de manara significativa el número de grados de libertad con respecto a los métodos más comúnmente usados como son DEM y TH.

Objetivos:

Se desarrollará una metodología que permitirá unificar conceptos de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas mostrando cómo problemas de valores en la frontera con saltos preescritos pueden formularse como un problema con valores en la frontera estándar. Derivando y mostrando como construir las funciones de peso y de prueba de forma tal que sean funciones definidas por tramos, las cuales sean totalmente discontinuas y no usen a los multiplicadores de Lagrange.

También se hará un análisis comparativo entre los métodos TH y DEM mostrando las ventajas de TH sobre DEM.

Referencias Básicas:

1. I. Herrera, Theory of differential Equations in discontinuos piecewise-defined-functions, Numerical Methods for Partial Differential Equations, (en prensa).
2. Ciarlet, P.G. The finite element methods for elliptic problems, CLASSICS in Applied Mathematics, 40, SIAM, Philadelphia, (2002), pp.530.
3. Cockburn, B., Karnadiakis, G.E. and Shu, C.-W. (Eds.) Discontinuous Galerkin methods, Lectures Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 11, Springer, 470 pp., 2000.
4. F. Bassi, S. Rebay, A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., 131 (1997), pp. 267-279.
5. Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM J. NUMER. ANAL., 39(5), pp. 1749-1779, 2002.
6. F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 15, Springer, New York, 1991.
7. C. Farhat, I. Harari , L.P. Franca, The discontinuous enrichment method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, pp. 6455-6479, 2001.
8. C. Farhat, I. Harari , U. Hetmaniuk, The discontinuous enrichment method for multiscale analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, pp. 3195-3209, 2003.
9. C. Farhat, I. Harari, U. Hetmaniuk, A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, pp. 1389-1419, 2003.
10. C. Farhat, R. Tezaur, P. Weidemann-Goiran, Higher order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 61, pp. 1938-1956, 2004.
11. R. Tezaur and C. Farhat, Three-dimensional discontinuous

Galerkin elements with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of mid-frequency Helmholtz problems, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 62, 2005.

12. J. Jirousek, A. Wróblewski T-elements state of the art and future trends, Archives of Computational Methods in Engineering. State of the Art reviews. 3, 4, 323-434, 1996.

13. J. Jirousek, P. Zielinski, Survey of Trefftz-Type Element Formulation, Computers and Structures. 63 (2), pp. 225-241, 1997.

14. I. Herrera, Trefftz Method: A General Theory. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 16 (6) pp. 561-580, 2000.

15. Qin, Q-H. The Trefftz finite and boundary element method, The WIT Press, Southampton, 2000.

16. I. Herrera, M. Diaz and R. Yates A More General Version of the Hybrid-Trefftz Finite Element Model by Application of TH-Domain Decomposition, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering: Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 40 pp 301-308. Kornhuber, R. et al. Eds. Springer, Berlin Sept. 2004. Also www.ddm.org

17. I. Herrera, Boundary Methods. A Criterion for Completeness. Proc. National Academy of Sciences, USA, 77(8), pp. 4395-4398, 1980.

18. F. J. Snchez-Sesma, I. Herrera, J. Avils, A Boundary Method for Elastic Wave Diffraction. Application to Scattering of SH-Waves by Surface Irregularities. Bull. Seismological Society of America., 72(2), pp. 473-490, 1982.

19. Herrera, I., y Gourgeon, H. Boundary Methods C-Complete Systems for Stokes Problems. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 30, pp. 225-241, 1982.

20. Gourgeon, H. y Herrera, I. Boundary Methods. C-Complete Systems for the Biharmonic Equation. Boundary Element Methods, C.A. Brebbia, Ed., Springer Verlag, Berln, pp. 431-441, 1981.

Unidad Teórica A: *Estudio de los métodos Trefftz-Herrera, Galerkin Discontinuo y Discontinuo Enriquecido para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas (problema de Helmholtz).*

Introducción:

De acuerdo a la teoría general de métodos de descomposición de dominio (DDM), estos métodos se clasifican en dos grandes categorías: métodos directos y métodos indirectos (o Trefftz-Herrera). Estos métodos han recibido una amplia atención recientemente principalmente por su facilidad de uso en conjunción con el cómputo de alto desempeño en la modelación de sistemas continuos, ya que estos métodos proveen una de las formas más eficientes de paralelizar los algoritmos necesarios para resolver un número cada vez más creciente de problemas.

Algunas de las formulaciones más conocidas de los métodos de descomposición de domino están basadas en un análisis de las condiciones de transmisión entre las interfaces del subdominio, los cuales usan al operador de Steklov-Poincaré. Nos interesa el estudio sistemático de algunas de las mejores formulaciones de métodos de descomposición de domino que se basen en la aplicación del operador de Steklov-Poincaré. Estos métodos están basados en una aproximación especial de las formulas de Green aplicable a funciones discontinuas.

Usando una clase particular de espacios de Sobolev, es posible introducir problemas con valor en la frontera con saltos preescritos en la frontera interior. Aplicando a estos espacios de Sobolev las formulas de Green, las cuales contienen funciones discontinuas, se establece un marco general para los métodos indirectos.

El concepto unificador básico de la teoría, consiste en interpretar los métodos de descomposición de dominio como procedimientos para obtener información acerca de la solución en la frontera interior la cual separa el subdominio de cada uno de los otros, suficiente para definir problemas bien planteados en cada uno de los subdominios - referidos como problemas locales-. De esta manera, la solución puede ser reconstruida al resolver cada uno de los problemas locales exclusivamente.

Objetivos:

Conocer y manejar e implementar los métodos *Trefftz-Herrera, Galerkin Discontinuo y Discontinuo Enriquecido para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas* y desarrollar las implementaciones computacionales respectivas para medición del rendimiento de los distintos métodos numéricos tomando como problema particular al *problema de Helmholtz.*

Plan de Trabajo:

- Conocer y Manejar al método *Trefftz-Herrera para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas*.
- Conocer y Manejar al método *Galerkin Discontinuo para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas*.
- Conocer y Manejar al método *Discontinuo Enriquecido para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas*.
- Implementar computacionalmente a los métodos anteriores para resolver el *problema de Helmholtz*

Referencias:

1. Ciarlet, P.G. The finite element methods for elliptic problems, CLASSICS in Applied Mathematics, 40, SIAM, Philadelphia, (2002), pp.530.
2. Cockburn, B., Karnadiakis, G.E. and Shu, C.-W. (Eds.) Discontinuous Galerkin methods, Lectures Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 11, Springer, 470 pp., 2000.
3. J. Douglas, JR., T. Dupont, Interior Penalty Procedures for Elliptic and Parabolic Galerkin Methods, Lecture Notes in Phys. 58, Springer-Verlag, Berlin 1976.
4. M.F. Wheeler, An elliptic collocation-finite elemente method whit interior penalties, SIAM. J. Numer. Anal., 15 (1978), pp. 152-161.
5. F. Bassi, S. Rebay, A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., 131 (1997), pp. 267-279.
6. Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM J. NUMER. ANAL., 39(5), pp. 1749-1779, 2002.
7. Quarteroni, A. and Valli, A. Domain decomposition methods for partial differential equations, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford Science Publications, Clarendon Press-Oxford, 1999.

8. C. Farhat, I. Harari , L.P. Franca, The discontinuous enrichment method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, pp. 6455-6479, 2001.

9. C. Farhat, I. Harari , U. Hetmaniuk, The discontinuous enrichment method for multiscale analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, pp. 3195-3209, 2003.

10. C. Farhat, I. Harari, U. Hetmaniuk, A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, pp. 1389-1419, 2003.

11. I. Herrera, Trefftz Method: A General Theory. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 16 (6) pp. 561-580, 2000.

12. Qin, Q-H. The Trefftz finite and boundary element method, The WIT Press, Southampton, 2000.

13. I. Herrera, M. Diaz and R. Yates A More General Version of the Hybrid-Trefftz Finite Element Model by Application of TH-Domain Decomposition, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering: Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 40 pp 301-308. Kornhuber, R. et al. Eds. Springer, Berlin Sept. 2004. Also www.ddm.org

14. Herrera, I., Keyes.D., O. Widlund and R. Yates, Domain decomposition methods in Science and Engineering, Proc. 14th International Conference on Domain Decompositio Methods, DDM Organization, 2003.

15. Herrera, I., The Indirect Approach to Domain Decomposition, Plenary lecture at Proc. of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods, Eds. Herrera, I., Keyes.D., O. Widlund and R. Yates, pp. 51-62, 2002.

16. Herrera, I. A Unified Theory of Domain Decomposition Methods, Proc. of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods, Eds. Herrera, I., Keyes.D., O. Widlund and R. Yates, pp. 243-248, 2002.

17. I. Herrera, Unified Approach to Numerical Methods. Part 1. Green's Formulas for Operators in Discontinuous Fields, Numer Meth Partial Differen Equat, 1(1), pp. 12-37, 1985.

18. I. Herrera, M. Díaz Indirect Methods of Collocation: Trefftz-Herrera Collocation. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 15(6) 709-738, 1999

19. Herrera, I., Yates R. and Díaz M. General Theory of Domain Decomposition: Indirect Methods. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 18 (3), pp. 296-322, 2002.

20. Herrera, I., Díaz, M. and Yates, R. Single-Collocation-Point Methods for Advection-Diffusion Equation, Advances in Water Resources, 2004, 27 (4) pp 311-322.

21. Daz, M. and Herrera, I. TH-Collocation for the Biharmonic Equation Advances in Engineering Software, 36, 243-251, 2005.

22. Herrera, I. and Yates, R. A General Effective Method for Combining Collocation and DDM: An Application of Discontinuous Galerkin Methods Numerical Methods for Partial Differential Equations. 21(4), 672-700, 2005.

23. Herrera, R. Yates, E. Rubio, More Efficient Procedures for Applying Collocation. (Submitted).

24. Herrera, I. Finite element methods with optimal test functions (To be published).

Unidad Teórica B: *Estudio de los métodos de elementos finitos mixtos e híbridos para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas (problema de Helmholtz).*

Introducción:

En algunas circunstancias es usual aproximar una ecuación diferencial parcial, en algun dominio Ω el cual es a su ves descompuesto en subdominios Ω_E no traslapados, ya sea por que los métodos neméricos usados sean de diferente espacio dimensional y/o por que las mallas no sean iguales en los diferentes subdominios.

El distintivo de estos métodos de aproximación es que, en principio, la solución aproximada puede no ser continua en la sección de unión en las interfaces del subdominio. Es por ello que la aproximación Galerkin no puede ser usada para este tipo de problemas, ya que el espacio de dimensión finita usado hecho de funciones discontinuas no es un subespacio de $H^1(\Omega)$.

Las alternativas para este tipo de problemas consisten en dar una nueva formulación débil del problema el cual sea compatible con los espacios usados Ω_E de manera independiente.esto se puede hacer mediante los métodos mixtos e híbridos.

Objetivos:

Conocer y manejar e implementar los métodos *de elementos finitos mixtos e híbridos para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas* y desarrollar las implementaciones computacionales respectivas para medición del rendimiento de los distintos métodos numéricos tomando como problema particular al *problema de Helmholtz.*

Plan de Trabajo:

- Conocer y Manejar al método *de elementos finitos mixtos para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas*.
- Conocer y Manejar al método *de elementos finitos híbridos para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas*.
- Implementar computacionalmente a los métodos anteriores para resolver el *problema de Helmholtz*

Referencias:

1. I. Herrera, Theory of differential Equations in discontinuos piecewise-defined-functions, Numerical Methods for Partial Differential Equations, (en prensa).
2. Ciarlet, P.G. The finite element methods for elliptic problems, CLASSICS in Applied Mathematics, 40, SIAM, Philadelphia, (2002), pp.530.
3. G.A. Baker, Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements, Math. Comp., 31 (1977), pp. 45-5970 de Arnold 2002.
4. I. Babuska, J.M. Melenk, The partition of unity method, Int. J. Numer. Methods Engrg. 40 (4) (1997) 727-758.
5. F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 15, Springer, New York, 1991.
6. F. Brezzi, L.D. Marini, A three field domain decomposition method. In Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, A. Quarteroni et al. eds., American Mathematical Society, Providence, pp. 27-34, 1994.
7. Quarteroni, A. and Valli, A. Domain decomposition methods for partial differential equations, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford Science Publications, Clarendon Press-Oxford, 1999.
8. R. Tezaur and C. Farhat, Three-dimensional discontinuous Galerkin elements with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of mid-frequency Helmholtz problems, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 62, 2005.
9. I. Herrera, M. Diaz and R. Yates A More General Version of the Hybrid-Trefftz Finite Element Model by Application of TH-Domain Decomposition, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering: Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 40 pp 301-308. Kornhuber, R. et al. Eds. Springer, Berlin Sept. 2004. Also www.ddm.org
10. F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, 2000.

Unidad Teórica C: *Estudio del método de funciones discontinuas definidas por tramos para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas.*

Introducción:

Una queja constante en el uso del método Discontinuo Enriquecido es el incremento en el número de grados de libertad que el interpolador de Lagrange genera [28], y el mismo fenómeno ocurre debido a la estructura introducida al método Trefftz [33]. En esta conexión, una importante implicación de la aproximación hecha en el trabajo de Herrera [xx]: "La teoría de ecuaciones diferenciales parciales formulada en espacios de funciones en los cuales las funciones de peso y base puedan ser totalmente discontinuas permite eludir la introducción de los multiplicadores de Lagrange, en el caso del método dG, y la estructura introducida en el caso del método Trefftz-Herrera".

Así, cuando las ecuaciones diferenciales parciales son formuladas en funciones discontinuas definidas por tramos, los problemas bien planteados son problemas de valor en la frontera con saltos prescritos (BVPJ), en los cuales las condiciones de frontera son complementadas por adecuadas condiciones de salto, que satisfacen los cruces en la frontera interior asociados con la partición del dominio. Un resultado mostrado en el trabajo de Herrera [xx], muestra que para problemas elípticos de orden $2m$, con $m \geq 1$, el BVPJ satisface existencia si y sólo si el problema estándar de valor en la frontera suave lo satisface. por lo tanto, este resultado esencialmente reduce el problema de establecer condiciones para la existencia de la solución para el problema de valores en la frontera con saltos preescritos a un problema con valores en la frontera estándar.

Por lo tanto, al trabajar con funciones discontinuas definidas por tramos, podemos disminuir de manara significativa el número de grados de libertad con respecto a los métodos más comúnmente usados como son DEM y TH.

Objetivos:

Conocer y manejar el *método de funciones discontinuas definidas por tramos para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas.*

Plan de Trabajo:

- Conocer y Manejar al método *de método de funciones discontinuas definidas por tramos para el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales elípticas*.

Referencias:

1. I. Herrera, Theory of differential Equations in discontinuos piecewise-defined-functions, Numerical Methods for Partial Differential Equations, (en prensa).
2. Ciarlet, P.G. The finite element methods for elliptic problems, CLASSICS in Applied Mathematics, 40, SIAM, Philadelphia, (2002), pp.530.
3. Cockburn, B., Karnadiakis, G.E. and Shu, C.-W. (Eds.) Discontinuous Galerkin methods, Lectures Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 11, Springer, 470 pp., 2000.
4. F. Bassi, S. Rebay, A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., 131 (1997), pp. 267-279.
5. Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM J. NUMER. ANAL., 39(5), pp. 1749-1779, 2002.
6. F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 15, Springer, New York, 1991.
7. C. Farhat, I. Harari , L.P. Franca, The discontinuous enrichment method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, pp. 6455-6479, 2001.
8. C. Farhat, I. Harari , U. Hetmaniuk, The discontinuous enrichment method for multiscale analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, pp. 3195-3209, 2003.
9. C. Farhat, I. Harari, U. Hetmaniuk, A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, pp. 1389-1419, 2003.
10. C. Farhat, R. Tezaur, P. Weidemann-Goiran, Higher order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems, International Journal of Numerical Methods in

Engineering, 61, pp. 1938-1956, 2004.
11. R. Tezaur and C. Farhat, Three-dimensional discontinuous Galerkin elements with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of mid-frequency Helmholtz problems, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 62, 2005.
12. J. Jirousek, A. Wróblewski T-elements state of the art and future trends, Archives of Computational Methods in Engineering. State of the Art reviews. 3, 4, 323-434, 1996.
13. J. Jirousek, P. Zielinski, Survey of Trefftz-Type Element Formulation, Computers and Structures. 63 (2), pp. 225-241, 1997.
14. I. Herrera, Trefftz Method: A General Theory. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 16 (6) pp. 561-580, 2000.
15. Qin, Q-H. The Trefftz finite and boundary element method, The WIT Press, Southampton, 2000.
16. I. Herrera, M. Diaz and R. Yates A More General Version of the Hybrid-Trefftz Finite Element Model by Application of TH-Domain Decomposition, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering: Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 40 pp 301-308. Kornhuber, R. et al. Eds. Springer, Berlin Sept. 2004. Also www.ddm.org
17. I. Herrera, Boundary Methods. A Criterion for Completeness. Proc. National Academy of Sciences, USA, 77(8), pp. 4395-4398, 1980.
18. F. J. Snchez-Sesma, I. Herrera, J. Avils, A Boundary Method for Elastic Wave Diffraction. Application to Scattering of SH-Waves by Surface Irregularities. Bull. Seismological Society of America., 72(2), pp. 473-490, 1982.
19. Herrera, I., y Gourgeon, H. Boundary Methods C-Complete Systems for Stokes Problems. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 30, pp. 225-241, 1982.
20. Gourgeon, H. y Herrera, I. Boundary Methods. C-Complete Systems for the Biharmonic Equation. Boundary Element Methods, C.A. Brebbia, Ed., Springer Verlag, Berln, pp. 431-441, 1981.

Antecedentes:

Una queja constante en el uso del método DEM es el incremento en el número de grados de libertad que el interpolador de Lagrange genera [28], y el mismo fenómeno ocurre debido a la estructura introducida al método Trefftz [33]. En esta conexión, una importante implicación de la aproximación hecha en el trabajo de Herrera [xx]: "La teoría de ecuaciones diferenciales parciales formulada en espacios de funciones en los cuales las funciones de peso y base puedan ser totalmente discontinuas permite eludir la introducción de los multiplicadores de Lagrange, en el caso del método dG, y la estructura introducida en el caso del método Trefftz-Herrera".

Así, cuando las ecuaciones diferenciales parciales son formuladas en funciones discontinuas definidas por tramos, los problemas bien planteados son problemas de valor en la frontera con saltos prescritos (BVPJ), en los cuales las condiciones de frontera son complementadas por adecuadas condiciones de salto, que satisfacen los cruces en la frontera interior asociados con la partición del dominio. Un resultado mostrado en el trabajo de Herrera [xx], muestra que para problemas elípticos de orden $2m$, con $m \geq 1$, el BVPJ satisface existencia si y sólo si el problema estándar de valor en la frontera suave lo satisface. por lo tanto, este resultado esencialmente reduce el problema de establecer condiciones para la existencia de la solución para el problema de valores en la frontera con saltos preescritos a un problema con valores en la frontera estándar.

Por lo tanto, al trabajar con funciones discontinuas definidas por tramos, podemos disminuir de manara significativa el número de grados de libertad con respecto a los métodos más comúnmente usados como son DEM y TH.

Objetivos:

Se desarrollará una metodología que permitirá unificar conceptos de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas mostrando como problemas de valores en la frontera con saltos preescritos pueden formularse como un problema con valores en la frontera estándar. Derivando y mostrando como construir las funciones de peso y de prueba de forma tal que sean funciones definidas por tramos, las cuales sean totalmente discontinuas y no usen a los multiplicadores de Lagrange.

Plan de Actividades:

- Conocer y Manejar *el método de de funciones discontinuas definidas por tramos.*
- Implementar computacionalmente *el método de de funciones discontinuas definidas por tramos* para resolver el *problema de Helmholtz.*
- Evaluar el rendimiento del *método de de funciones discontinuas definidas por tramos con respecto a los métodos Trefftz-Herrera, Galerkin Discontinuo y Discontinuo Enriquecido.*

Referencias:

1. I. Herrera, Theory of differential Equations in discontinuos piecewise-defined-functions, Numerical Methods for Partial Differential Equations, (en prensa).
2. Ciarlet, P.G. The finite element methods for elliptic problems, CLASSICS in Applied Mathematics, 40, SIAM, Philadelphia, (2002), pp.530.
3. Cockburn, B., Karnadiakis, G.E. and Shu, C.-W. (Eds.) Discontinuous Galerkin methods, Lectures Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 11, Springer, 470 pp., 2000.
4. F. Bassi, S. Rebay, A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., 131 (1997), pp. 267-279.
5. Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM J. NUMER. ANAL., 39(5), pp. 1749-1779, 2002.
6. F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 15, Springer, New York, 1991.
7. C. Farhat, I. Harari , L.P. Franca, The discontinuous enrichment method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, pp. 6455-6479, 2001.
8. C. Farhat, I. Harari , U. Hetmaniuk, The discontinuous enrichment method for multiscale analysis. Computer Methods in Applied

Mechanics and Engineering, 192, pp. 3195-3209, 2003.
9. C. Farhat, I. Harari, U. Hetmaniuk, A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, pp. 1389-1419, 2003.
10. C. Farhat, R. Tezaur, P. Weidemann-Goiran, Higher order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 61, pp. 1938-1956, 2004.
11. R. Tezaur and C. Farhat, Three-dimensional discontinuous Galerkin elements with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of mid-frequency Helmholtz problems, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 62, 2005.
12. J. Jirousek, A. Wróblewski T-elements state of the art and future trends, Archives of Computational Methods in Engineering. State of the Art reviews. 3, 4, 323-434, 1996.
13. J. Jirousek, P. Zielinski, Survey of Trefftz-Type Element Formulation, Computers and Structures. 63 (2), pp. 225-241, 1997.
14. I. Herrera, Trefftz Method: A General Theory. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 16 (6) pp. 561-580, 2000.
15. Qin, Q-H. The Trefftz finite and boundary element method, The WIT Press, Southampton, 2000.
16. I. Herrera, M. Diaz and R. Yates A More General Version of the Hybrid-Trefftz Finite Element Model by Application of TH-Domain Decomposition, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering: Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 40 pp 301-308. Kornhuber, R. et al. Eds. Springer, Berlin Sept. 2004. Also www.ddm.org
17. I. Herrera, Boundary Methods. A Criterion for Completeness. Proc. National Academy of Sciences, USA, 77(8), pp. 4395-4398, 1980.
18. F. J. Snchez-Sesma, I. Herrera, J. Avils, A Boundary Method for Elastic Wave Diffraction. Application to Scattering of SH-Waves by Surface Irregularities. Bull. Seismological Society of America., 72(2), pp. 473-490, 1982.
19. Herrera, I., y Gourgeon, H. Boundary Methods C-Complete Systems for Stokes Problems. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 30, pp. 225-241, 1982.
20. Gourgeon, H. y Herrera, I. Boundary Methods. C-Complete Systems for the Biharmonic Equation. Boundary Element Methods, C.A. Brebbia, Ed., Springer Verlag, Berln, pp. 431-441, 1981.

Referencias:

xx. I. Herrera, Theory of differential Equations in discontinuos piecewise-defined-functions, Numerical Methods for Partial Differential Equations, (en prensa).

1. Ciarlet, P.G. The finite element methods for elliptic problems, CLASSICS in Applied Mathematics, 40, SIAM, Philadelphia, (2002), pp.530.

2. Cockburn, B., Karnadiakis, G.E. and Shu, C.-W. (Eds.) Discontinuous Galerkin methods, Lectures Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 11, Springer, 470 pp., 2000.

3. J. Douglas, JR., T. Dupont, Interior Penalty Procedures for Elliptic and Parabolic Galerkin Methods, Lecture Notes in Phys. 58, Springer-Verlag, Berlin 1976.

4. G.A. Baker, Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements, Math. Comp., 31 (1977), pp. 45-5970 de Arnold 2002.

5. M.F. Wheeler, An elliptic collocation-finite elemente method whit interior penalties, SIAM. J. Numer. Anal., 15 (1978), pp. 152-161.

6. D.N. Arnold, An Interior penalty Finite Element Method with Discontinuous Elementes, Ph.D. thesis, The University of Chicago, Chicago, IL, 1979.

7. D.N. Arnold, An interior penalty finite element method with discontinuous elements, SIAM J. Numer. Anal., 19 (1982), pp 742-760.

8. F. Bassi, S. Rebay, A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., 131 (1997), pp.
267-279.

9. Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM J. NUMER. ANAL., 39(5), pp. 1749-1779, 2002.

10. B. Cockburn, C. W. Shu, The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-difusion systems, SIAM J. Numer. Anal., 35 (1998), pp. 2440-2463.

11. T.J.R. Hughes, L.P. Franca, G.M. Hulbert, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations, Comput. Mtethods Appl. Mech. Engrg. 73 (2) (1989) 173-189.

12. L.P. Franca, S.L. Frey, T.J.R. Huges, Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model, Comput.

Methods Appl. Mech. Engrg. 95 (2) (1992) 253-276.

13. A.N. Brooks, T.J.R. Hughes, Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32 (1/3) (1982) 199-259 (FENOMECH’81, Part I, Stuttgart, 1981).

14. F. Brezzi, L.P. Franca, A. Russo, Further considerations on residual-free bubbles for advective-diffusive equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 166 (1/2) (1998) 25-33.

15. L.P. Franca, C. Farhat, A.P. Macedo, M. Lesoinne, Residual-free bubbles for the Helmhotz equation, Int. J. Numer Methods Engrg. 40 (21) (1997) 4003-4009.

16. L.P. Franca, A. P. Macedo, A two-level finite element method and its application to the Helmholtz equation, Int. J. Numer. Methos Engrg. 43 (1) (1998) 23-32.

17. L.P. Franca, A. Nesliturk, M. Stynes, On the stability of residual-free bubbles for convection-diffusion problems and their approximation by a two-level finite element method, Comput. Methods Appl, Mech. Engrg. 166 (1/2) (1988) 35-49.

18. T.J.R. Hughes, Multiscale phenomena: Green’s functions the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods, Comput. Methods Appl. Mech.

19. I. Babuska, J.M. Melenk, The partition of unity method, Int. J. Numer. Methods Engrg. 40 (4) (1997) 727-758.

20. P.E. Barbone, I. Harari, Nearly optimal finite element methods, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001) 5679-5690.

21. F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 15, Springer, New York, 1991.

22. F. Brezzi, L.D. Marini, A three field domain decomposition method. In Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, A. Quarteroni et al. eds., American Mathematical Society, Providence, pp. 27-34, 1994.

23. Quarteroni, A. and Valli, A. Domain decomposition methods for partial differential equations, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford Science Publications, Clarendon Press-Oxford, 1999.

24. C. Farhat, I. Harari , L.P. Franca, The discontinuous enrichment method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, pp. 6455-6479, 2001.

25. C. Farhat, I. Harari , U. Hetmaniuk, The discontinuous

enrichment method for multiscale analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, pp. 3195-3209, 2003.

26. C. Farhat, I. Harari, U. Hetmaniuk, A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, pp. 1389-1419, 2003.

27. C. Farhat, R. Tezaur, P. Weidemann-Goiran, Higher order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 61, pp. 1938-1956, 2004.

28. R. Tezaur and C. Farhat, Three-dimensional discontinuous Galerkin elements with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of mid-frequency Helmholtz problems, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 62, 2005.

29. J. Jirousek, A. Wróblewski T-elements state of the art and future trends, Archives of Computational Methods in Engineering. State of the Art reviews. 3, 4, 323-434, 1996.

30. J. Jirousek, P. Zielinski, Survey of Trefftz-Type Element Formulation, Computers and Structures. 63 (2), pp. 225-241, 1997.

31. I. Herrera, Trefftz Method: A General Theory. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 16 (6) pp. 561-580, 2000.

32. Qin, Q-H. The Trefftz finite and boundary element method, The WIT Press, Southampton, 2000.

33. I. Herrera, M. Diaz and R. Yates A More General Version of the Hybrid-Trefftz Finite Element Model by Application of TH-Domain Decomposition, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering: Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 40 pp 301-308. Kornhuber, R. et al. Eds. Springer, Berlin Sept. 2004. Also www.ddm.org

34. Herrera, I., Keyes.D., O. Widlund and R. Yates, Domain decomposition methods in Science and Engineering, Proc. 14th International Conference on Domain Decompositio Methods, DDM Organization, 2003.

35. DDM Organization, Proceedings of 15 International Conferences on Domain Decomposition Methods. www.ddm.org, 1988-2005.

36. A. Toselli, O. Widlund, Domain decomposition methods-Algorithms and Theory, Springer Series in Computational Mthematics, Springer-Verlag, Berlin, 450p., 2005.

37. Herrera, I., The Indirect Approach to Domain Decomposition, Plenary lecture at Proc. of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods, Eds. Herrera, I., Keyes.D., O. Widlund and R.

Yates, pp. 51-62, 2002.

38. Herrera, I. A Unified Theory of Domain Decomposition Methods, Proc. of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods, Eds. Herrera, I., Keyes.D., O. Widlund and R. Yates, pp. 243-248, 2002.

39. I. Herrera, Ewing, R.E., Celia, M.A. y Russell, T. Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method: The Theoretical Framework. Numerical Methods for Partial Differential Equations 9(4), pp. 431-457, 1993.

40. I. Herrera, Boundary Methods. A Criterion for Completeness. Proc. National Academy of Sciences, USA, 77(8), pp. 4395-4398, 1980.

41. F. J. Snchez-Sesma, I. Herrera, J. Avils, A Boundary Method for Elastic Wave Diffraction. Application to Scattering of SH-Waves by Surface Irregularities. Bull. Seismological Society of America., 72(2), pp. 473-490, 1982.

42. Herrera, I., y Gourgeon, H. Boundary Methods C-Complete Systems for Stokes Problems. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 30, pp. 225-241, 1982.

43. Gourgeon, H. y Herrera, I. Boundary Methods. C-Complete Systems for the Biharmonic Equation. Boundary Element Methods, C.A. Brebbia, Ed., Springer Verlag, Berln, pp. 431-441, 1981.

44. I. Herrera Boundary methods. An algebraic theory, Pitman Advanced Publishing Program, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1984.

45. Herrera, I. An Algebraic Theory of Boundary Value Problems. KINAM, 3(2), pp. 161-230, 1981.

46. I. Herrera, Unified Approach to Numerical Methods. Part 1. Green's Formulas for Operators in Discontinuous Fields, Numer Meth Partial Differen Equat, 1(1), pp. 12-37, 1985.

47. I. Herrera, L. Chargoy and G. Alduncin, Unified Approach to Numerical Methods. Part 3. Finite Differences and Ordinary Differential Equations, Numer Meth Partial Differen Equat, 1(4), 241-258, 1985.

48. Herrera, I. Some Unifying Concepts in Applied Mathematics. The Merging of Disciplines: New Directions in Pure, Applied, and Computational Mathematics. Edited by R.E. Ewing, K.I. Gross and C.F. Martin. Springer Verlag, New York, pp. 79-88, 1986.

49. Herrera, I. Localized Adjoint Methods: A New Discretization Methodology, Chapter 6 of the book: Computational Methods in Geosciences, W.E. Fitzgibbon & M.F. Wheeler Eds., SIAM, pp. 66-77, 1992.

50. Herrera, I. The Algebraic Theory Approach for Ordinary Differential Equations: Highly Accurate Finite Differences. Journal of Numerical Methods for Partial Differential Equations, 3(3), pp. 199-218, 1987.

51. Celia, M. y Herrera, I. Solution of General Differential Equations Using the Algebraic Theory Approach. Journal of Numerical Methods for Partial Differential Equations, 3(1), pp. 117-129, 1987.

52. I. Herrera y J. Bielak A Simplified Version of Gurtin's Variational Principles. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 53(2), pp. 131-149, 1974, Communicated by M.E. Gurtin.

53. I. Herrera, I. General Variational Principles Applicable to the Hybrid Element Method. Proc. of the National Academy of Sciences, USA, 74 (7), pp. 2595-2597, 1977.

54. I. Herrera On the Variational Principles of Mechanics. Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, H. Zorsky, Ed., Pitman Publishing Ltd., II, pp. 115-128, 1979.

55. Herrera, I. Variational Principles for Problems with Linear Constraints: Prescribed Jumps and Continuation Type Restrictions. J. Inst. of Mathematics and its Applics., 25, pp 67-96, 1980.

56. I. Herrera Trefftz Method. Topics In: Boundary Element Research, Vol.1: Basic Principles and Applications, C.A. Brebbia, Ed., Springer-Verlag, Chapter 10, pp. 225-253, 1984.

57. I. Herrera, Boundary Methods for Fluids. Finite Elements in Fluids, Vol. IV, R.H. Gallagher, D. Norrie, J.T. Oden & O.C. Zienkiewicz, Eds., John Wiley & Sons Ltd., Chapter 19, pp. 403-432, 1982.

58. I. Herrera and D.A. Spence Framework for Biorthogonal Fourier Series, Proc. National Academy of Sciences (Physical and Mathematical Sciences), USA, 78(12), pp. 7240-7244, 1981.

59. H. Begher and R.P. Gilbert Transformations, Transmutations, and Kernel Functions, Longman Scientific & Technical, England, 1992.

60. S. Bergman, Integral operators in the theory of linear partial differential equations, Ergeb. Math. Grenzgeb. 23, Springer, Berlin, 1961; 2. rev. print., 1969.

61. I. N. Vekua, New methods for solving elliptic equations, North Holland, Amsterdam etc. and John Wiley, New York, XII, 358pp., 1967.

62. D. L. Colton, Partial differential equations in the complex domain, Pitman, London, 1976.

63. D. L. Colton, Solution of boundary value problems by the method of integral operators, Pitman, London, 1976.

64. D. L. Colton, Analytic theory of partial differential equations,

Pitman, Boston etc., XII, 239pp., 1980.

65. R. P. Gilbert, Function theoretic methods in partial differential equations, Academic Press, New York, XVIII, 311pp., 1969.

66. R. P. Gilbert, Constructive methods for elliptic partial differential equations, Lectures Notes in Math. 365, VII, 397pp., 1974.

67. M. Kracht, E. Kreyszig, Methods of complex analysis in partial differential equations with applications, Wiley & Sons, New York etc., XIV, 394pp., 1988.

68. E. Lanckau, Complex integral operators in mathematical physics, Akademie-Verlag, Berlin, 1992.

69. Celia, M. A., Russell, T.F., Herrera, I. y Ewing, R.E. An Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method for the Advection-Diffusion Equation. Advances in Water Resources, 13(4), pp.187-206, 1990.

70. T. F. Russell and M.A. Celia, An overview of research on Eulerian-Lagrangian localized adjoint methods (ELLAM), Advances in Water resources, 25, pp. 1215-1231, 2002.

71. Herrera, I. Trefftz-Herrera Domain Decomposition, Special Volume on Trefftz Method: 70 Years Anniversary; Advances in Engineering Software, 24, pp. 43-56, 1995.

72. I. Herrera, M. Díaz Indirect Methods of Collocation: Trefftz-Herrera Collocation. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 15(6) 709-738, 1999

73. Herrera, I., Yates R. and Díaz M. General Theory of Domain Decomposition: Indirect Methods. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 18 (3), pp. 296-322, 2002.

74. Herrera, I., Díaz, M. and Yates, R. Single-Collocation-Point Methods for Advection-Diffusion Equation, Advances in Water Resources, 2004, 27 (4) pp 311-322.

75. Daz, M. and Herrera, I. TH-Collocation for the Biharmonic Equation Advances in Engineering Software, 36, 243-251, 2005.

76. Herrera, I. and Yates, R. A General Effective Method for Combining Collocation and DDM: An Application of Discontinuous Galerkin Methods Numerical Methods for Partial Differential Equations. 21(4), 672-700, 2005.

77. Herrera, R. Yates, E. Rubio, More Efficient Procedures for Applying Collocation. (Submitted).

78. Herrera, I. Finite element methods with optimal test functions (To be published).

79. J. L. Lions, and E. Magenes, Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol 1, Springer-Verlag, New York,

Heidelberg, 357p. , Berlin, 1972.
80. Grisvard, P. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 410p., 1985.