

*Computación en Paralelo: Nuevas
Formulaciones de los Métodos
Precondicionados de Subestructuración*

Examen de Candidatura

Antonio Carrillo Ledesma

Tutor: Dr. Ismael Herrera Revilla.

INDICE

- *Motivación*
- *Objetivos*
- *Contexto general*
- *Métodos iterativos de dominios ajenos*
- *Métodos Single-Trip*
- *Métodos Round-Trip*
- *Teoría unificada sin multiplicadores de Lagrange*
- *Fórmulas de Green-Herrera para matrices*
- *Teoría unificada de métodos Dual-Primal*
- *El cómputo paralelo*
- *Avances y Trabajo por Hacer*
- *Conclusiones*

MOTIVACIÓN

MOTIVACIÓN...

La modelación de sistemas continuos en la Ingeniería y la Ciencia está basada en la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

La solución de los sistemas que gobiernan tales modelos tienen un gran número de grados de libertad y a pesar de los constantes avances en cómputo, un solo procesador no puede resolver dichos problemas.

Por ello, un recurso indispensable es el cómputo en paralelo, que en conjunción con el desarrollo de los métodos de descomposición de dominio permiten atacar problemas que involucren un gran número de grados de libertad.

MOTIVACIÓN ...

En la actualidad los métodos de descomposición de dominio se dividen en dos grandes grupos, los de dominios yuxtapuesto y los de dominios ajenos, nosotros trabajaremos sobre estos últimos por presentar los mejores rendimientos al usar el cómputo en paralelo para los problemas que nos interesan.

Los métodos más usados, se basan en resolver problemas locales sobre los subdominios pero en la frontera común de los mismos estas son discontinuas y mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange se logra empatar dichas soluciones para generar una solución continua.

OBJETIVOS

OBJETIVOS

Desarrollar un método de descomposición de dominio que:

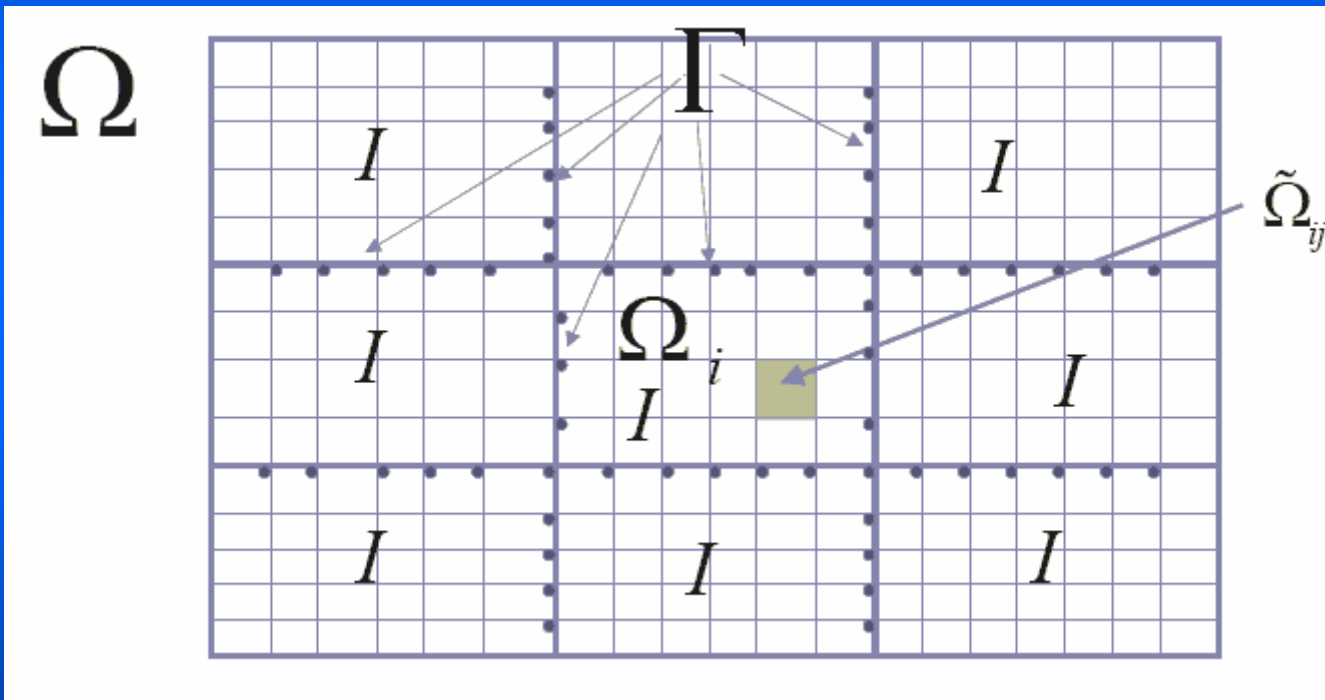
- No use multiplicadores de Lagrange
- Sea una formulación unificadora de las formulaciones del tipo subestructuración
- Quede expresado de forma matricial explícita en términos de matrices de Schur exclusivamente
- Sea aplicable a problemas Elípticos y Parabólicos tanto lineales como no lineales

CONTEXTO GENERAL

CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN DE DOMINIO

- *Métodos de Dominios Yuxtapuestos*
- *Métodos de Dominios Ajenos*

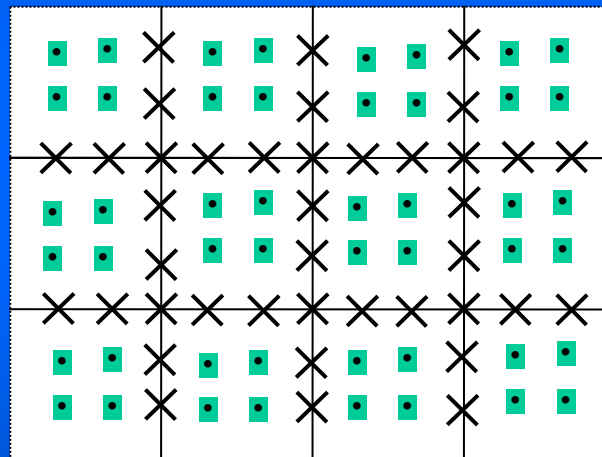
Métodos de Dominios Ajenos



MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN DE DOMINIO TIPO SUBESTRUTURACIÓN

- *Complemento de Schur*
- *Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI)*
- *Finite Element Tearing and Interconnecting Dual-Primal (FETI-DP)*

NODOS DE FRONTERA INTERIOR EN EL COMPLEMENTO DE SCHUR



COMPLEMENTO DE SCHUR

Resolver el sistema virtual

$$\left[\sum_{i=1}^E \underline{\underline{S}}_i \right] \underline{u}_\Gamma = \left[\sum_{i=1}^E \underline{b}_i \right]$$

donde:

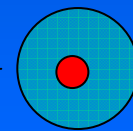
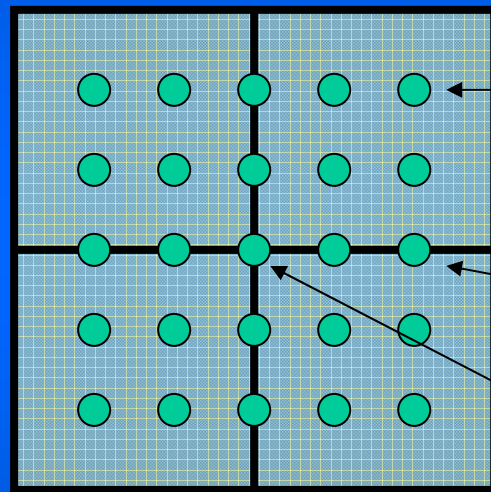
$$\underline{\underline{S}}_i = \underline{\underline{A}}_{\Gamma\Gamma}^i - \underline{\underline{A}}_{\Gamma I}^i \left(\underline{\underline{A}}_{II}^i \right)^{-1} \underline{\underline{A}}_{I\Gamma}^i$$

$$\underline{b}_i = \underline{\underline{A}}_{\Gamma I}^i \left(\underline{\underline{A}}_{II}^i \right)^{-1} \underline{b}_I^i$$

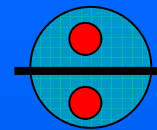
Una vez resuelto el sistema virtual para $\underline{u}_\Gamma$, la solución en los nodos interiores se obtiene

$$\underline{u}_I^i = \left(\underline{\underline{A}}_{II}^i \right)^{-1} \left(\underline{b}_I^i - \underline{\underline{A}}_{I\Gamma}^i \underline{u}_\Gamma^i \right)$$

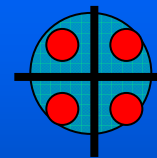
NODOS EN FETI



Nodo Primal:
1 grado de libertad



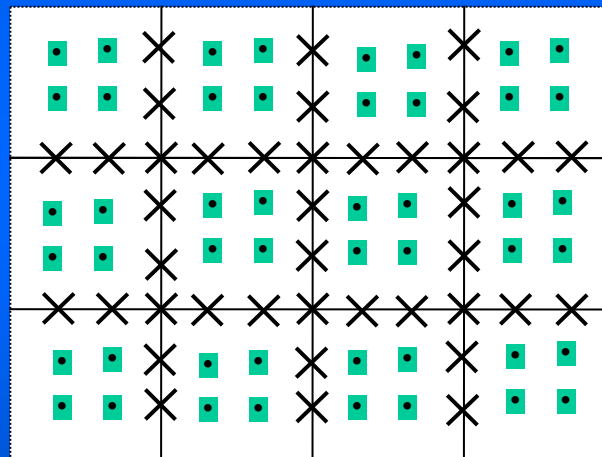
Nodo Dual:
2 ó más
grados de libertad



● Nodo

● Grado de libertad

NODOS DE FRONTERA INTERIOR EN FETI



MÉTODO FETI

Resolver el sistema virtual

$$\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{d}}$$

donde:

$$\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{G}} \left(\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{G}} \right)^{-1} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{Q}}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{S}}^\dagger \underline{\underline{B}}^T, \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{R}}, \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{S}}^\dagger \underline{\underline{f}}$$

Cuyo preconditionador más básico esta dado por

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{B}}^T = \sum_{i=1}^E \underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{S}}_i \underline{\underline{B}}_i^T$$

MÉTODO FETI

Una vez resuelto el sistema virtual para $\underline{\lambda}$

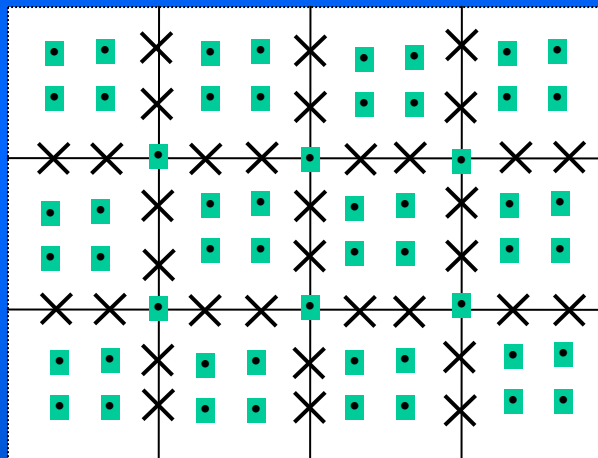
La solución en la frontera interior es dada por

$$\underline{u}_{\Gamma} = \underline{S}^{\dagger} \left(\underline{f} - \underline{B}^T \underline{\lambda} \right)$$

y la solución en los nodos interiores por

$$\underline{u}_I^i = \left(\underline{A}_{\Pi}^i \right)^{-1} \left(\underline{b}_I^i - \underline{A}_{I\Gamma}^i \underline{u}_{\Gamma}^i \right)$$

NODOS DE FRONTERA INTERIOR EN FETI-DP



MÉTODO FETI-DP

Resolver el sistema virtual

$$\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{F}} \lambda = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{d}}$$

donde:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{B}}_{\Delta} \left(\underline{\underline{\tilde{S}}} \right)^{-1} \left(\underline{\underline{B}}_{\Delta} \right)^T, \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{B}}_{\Delta} \left(\underline{\underline{\tilde{S}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\tilde{f}}}_{\Delta}$$

Cuyo preconditionador más básico esta dado por

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \underline{\underline{B}}_{D,\Delta} \underline{\underline{S}}_{\Delta} \left(\underline{\underline{B}}_{D,\Delta} \right)^T = \sum_{i=1}^E \underline{\underline{D}}_{\Delta}^i \underline{\underline{B}}_{\Delta}^i \underline{\underline{S}}_{\Delta}^i \left(\underline{\underline{B}}_{\Delta}^i \right)^T \underline{\underline{D}}_{\Delta}^i$$

$$\underline{\underline{B}}_{D,\Delta} = \left[\underline{\underline{D}}_{\Delta}^1 \underline{\underline{B}}_{\Delta}^1, \dots, \underline{\underline{D}}_{\Delta}^{E1} \underline{\underline{B}}_{\Delta}^E \right]$$

MÉTODO FETI-DP

Definiendo en cada subdominio Ω_i , las matrices

$$\underline{\underline{A}}_{\Pi\Pi}^i, \underline{\underline{A}}_{I\Pi}^i, \underline{\underline{A}}_{I\Delta}^i, \underline{\underline{A}}_{\Pi\Pi}^i, \underline{\underline{A}}_{\Pi\Delta}^i, \underline{\underline{A}}_{\Delta\Delta}^i$$

así definimos

$$\underline{\underline{\tilde{S}}}^i = \underline{\underline{A}}_{\Delta\Delta}^i \left[\left(\underline{\underline{A}}_{I\Delta}^i \right)^T \left(\underline{\underline{A}}_{\Pi\Delta}^i \right)^T \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{\Pi\Pi}^i & \underline{\underline{A}}_{I\Pi}^i \\ \left(\underline{\underline{A}}_{I\Pi}^i \right)^T & \underline{\underline{A}}_{\Pi\Pi}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{I\Delta}^i \\ \underline{\underline{A}}_{\Pi\Delta}^i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\tilde{f}}}^i = \underline{\underline{f}}^i - \left[\left(\underline{\underline{A}}_{I\Delta}^i \right)^T \left(\underline{\underline{A}}_{\Pi\Delta}^i \right)^T \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{\Pi\Pi}^i & \underline{\underline{A}}_{I\Pi}^i \\ \left(\underline{\underline{A}}_{I\Pi}^i \right)^T & \underline{\underline{A}}_{\Pi\Pi}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_I^i \\ \underline{\underline{f}}_\Pi^i \end{bmatrix}$$

MÉTODO FETI-DP

Una vez resuelto el sistema virtual para $\underline{\lambda}$

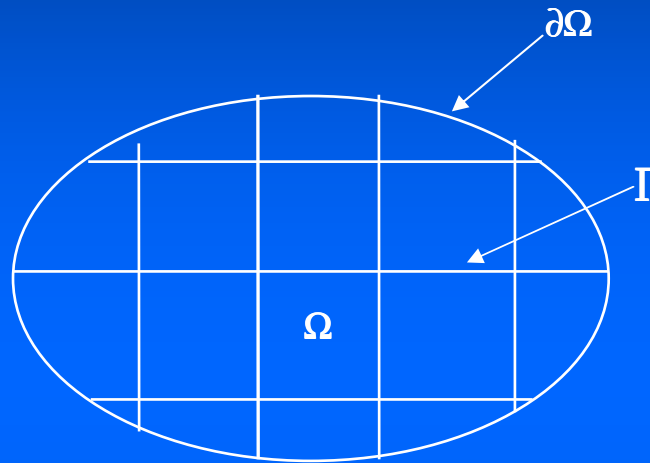
La solución en la frontera interior es dada por

$$\underline{u}_{\Delta} = \left(\underline{\tilde{S}} \right)^{-1} \left(\underline{f}_{\Delta} - \left(\underline{B}_{\Delta} \right)^T \underline{\lambda} \right)$$

y la solución en los nodos interiores por

$$\underline{u}_{\Gamma}^i = \left(\underline{A}_{\Gamma\Gamma}^i \right)^{-1} \left(\underline{b}_{\Gamma}^i - \underline{A}_{\Gamma\Delta}^i \underline{u}_{\Delta}^i \right)$$

FUNCIONES DEFINIDAS POR PEDAZOS



$$\Pi \equiv \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$$

$$D_1 \equiv D_1(\Omega_1) \oplus \dots \oplus D_1(\Omega_E) \quad y \quad D_2 \equiv D_2(\Omega_1) \oplus \dots \oplus D_2(\Omega_E)$$

$$u \equiv (u_1, \dots, u_E)$$

ESPACIOS DE SOBOLEV DE FUNCIONES DEFINIDAS POR PEDAZOS

Definición :

$$\hat{H}^2(\Omega) \equiv H^2(\Omega_1) \oplus \dots \oplus H^2(\Omega_E)$$

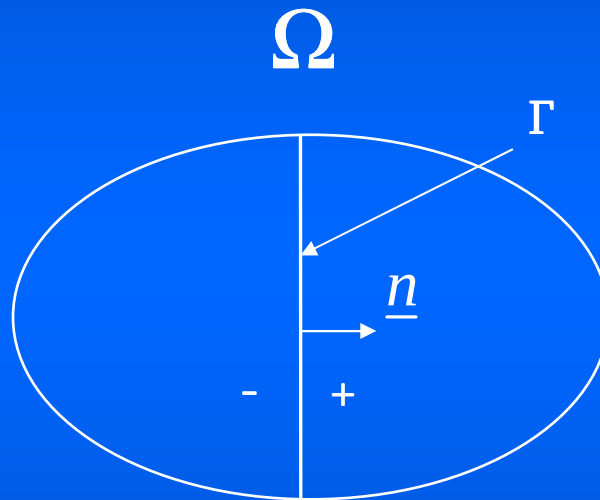
Métrica :

$$\|\hat{v}\|_{p,\Omega,\Pi} \equiv \left(\sum_{\alpha=1}^E \|v_\alpha\|_{p,\Omega_\alpha}^2 \right)^{1/2}$$

Entonces, $\hat{H}^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

SALTO Y PROMEDIO

$$[[u]] \equiv u_+ - u_- \quad y \quad \dot{u} \equiv \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$$



$$\text{Nota: } u_+ \equiv \dot{u} + \frac{1}{2}[[u]] \quad y \quad u_- \equiv \dot{u} - \frac{1}{2}[[u]]$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE DOMINIOS AJENOS

FÓRMULAS DE GREEN-HERRERA

y otras propiedades

Operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{L}u \equiv -\Delta u + u; \text{ en } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2$$

$$u = 0; \text{ en } \partial\Omega$$

Fórmula de Green - Herrera

$$G(u, w) = \int_{\Omega} w \mathcal{L}u dx + \int_{\Gamma} \left\{ \llbracket u \rrbracket \frac{\dot{\partial w}}{\partial n} - \dot{w} \llbracket \frac{\partial u}{\partial n} \rrbracket \right\} dx = \int_{\Omega} u \mathcal{L}w dx + \int_{\Gamma} \left\{ \llbracket w \rrbracket \frac{\dot{\partial u}}{\partial n} - \dot{u} \llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket \right\} dx = G(w, u)$$

Propiedades :

$$G(u, w) = \int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla w + uw \} dx + \int_{\Gamma} \left\{ \llbracket u \rrbracket \frac{\dot{\partial w}}{\partial n} + \llbracket w \rrbracket \frac{\dot{\partial u}}{\partial n} \right\} dx$$

$$\int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla w + uw \} dx = \int_{\Omega} w \mathcal{L}u dx - \int_{\Gamma} \left\{ \dot{w} \llbracket \frac{\partial u}{\partial n} \rrbracket + \llbracket w \rrbracket \frac{\dot{\partial u}}{\partial n} \right\} dx = \int_{\Omega} u \mathcal{L}w dx - \int_{\Gamma} \left\{ \dot{u} \llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket + \llbracket u \rrbracket \frac{\dot{\partial w}}{\partial n} \right\} dx$$

ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN en funciones discontinuas

$$-\Delta u + u = f_{\Omega}, \text{ en } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2$$

$$u = 0; \text{ en } \partial\Omega$$

$$\left. \begin{array}{l} \llbracket u \rrbracket = 0 \\ \left\llbracket \frac{\partial u}{\partial n} \right\rrbracket = 0 \end{array} \right\}, \text{ en } \Gamma$$

Formulación débil : u es solución si y sólo si

$$G(u, w) = \int_{\Omega} w f_{\Omega} dx, \forall w \in \hat{H}(\Omega)$$

FUNCIONES ARMÓNICAS

Considere funciones tales que

$$\mathcal{L}w = 0; \text{ en } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2$$

Entonces

$$G(u, w) = \int_{\Gamma} \left\{ \llbracket u \rrbracket \frac{\dot{\widehat{\partial w}}}{\partial n} - \dot{w} \llbracket \frac{\partial u}{\partial n} \rrbracket \right\} dx = \int_{\Gamma} \left\{ \llbracket w \rrbracket \frac{\dot{\widehat{\partial u}}}{\partial n} - \dot{u} \llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket \right\} dx$$

Propiedades :

$$G(u, w) = \int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla w + uw \} dx + \int_{\Gamma} \left\{ \llbracket u \rrbracket \frac{\dot{\widehat{\partial w}}}{\partial n} + \llbracket w \rrbracket \frac{\dot{\widehat{\partial u}}}{\partial n} \right\} dx$$

$$\int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla w + uw \} dx = - \int_{\Gamma} \left\{ \dot{w} \llbracket \frac{\partial u}{\partial n} \rrbracket + \llbracket w \rrbracket \frac{\dot{\widehat{\partial u}}}{\partial n} \right\} dx = - \int_{\Gamma} \left\{ \dot{u} \llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket + \llbracket u \rrbracket \frac{\dot{\widehat{\partial w}}}{\partial n} \right\} dx$$

FORMULACIÓN CON ARMÓNICAS discontinuas

$$-\Delta u + u = 0, \text{ en } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2$$

$$u = 0; \text{ en } \partial\Omega$$

$$\left. \begin{aligned} \llbracket u \rrbracket &= j_\Gamma^0 \\ \left\llbracket \frac{\partial u}{\partial n} \right\rrbracket &= j_\Gamma^1 \end{aligned} \right\}, \text{ en } \Gamma$$

Formulación débil : u es solución si sólo si

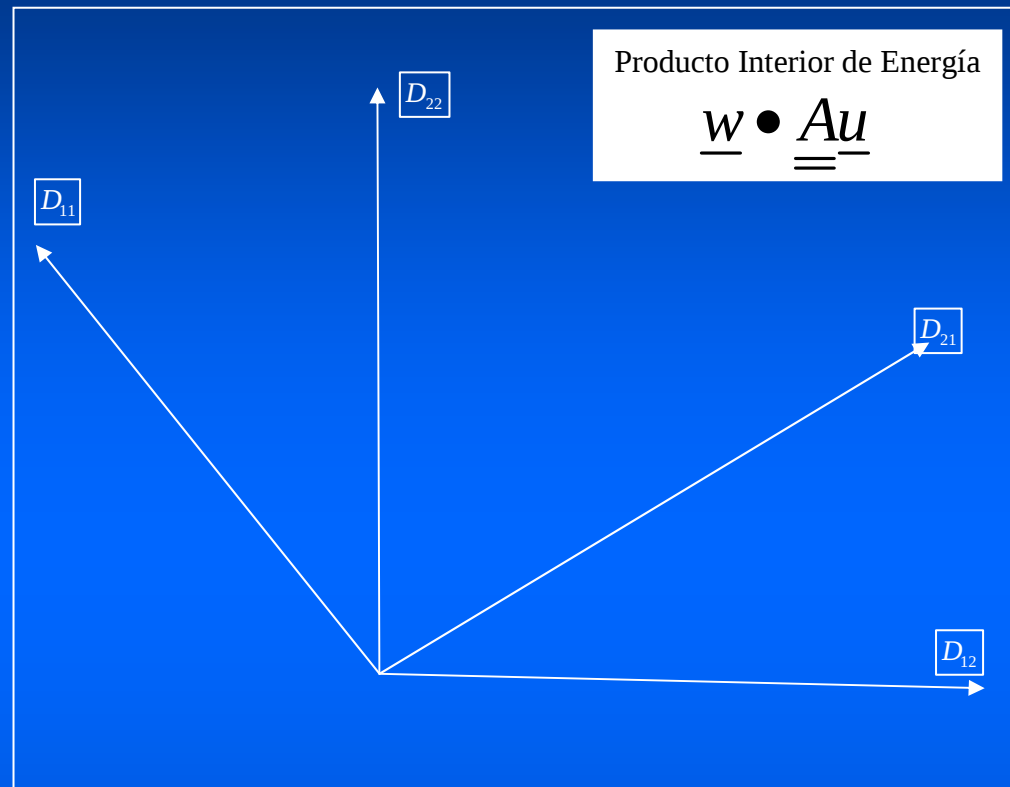
$$G(u, w) = \int_\Gamma \left\{ j_\Gamma^0 \frac{\widehat{\partial w}}{\partial n} - j_\Gamma^1 \dot{w} \right\} dx, \forall w \in \hat{H}(\Omega)$$

SUBESPACIOS DE ARMÓNICAS

Sea D el espacio de las funciones armónicas y definimos

$$D_{11} \equiv \left\{ w \in D \mid \dot{w} = 0, \text{ en } \Gamma \right\}, \quad D_{12} \equiv \left\{ w \in D \mid [[w]] = 0, \text{ en } \Gamma \right\}$$
$$D_{21} \equiv \left\{ w \in D \mid \widehat{\frac{\partial w}{\partial n}} = 0, \text{ en } \Gamma \right\}, \quad D_{22} \equiv \left\{ w \in D \mid \left[\left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] = 0, \text{ en } \Gamma \right\}$$

RESUMEN GEOMÉTRICO



Propiedad : En las funciones armónicas la funcional bilineal, $G(u, w)$ es simétrica y "silla" : positiva en D_{12} y negativa en D_{22}

MÉTODOS SINGLE-TRIP

ALGORITMO 1.- Basado en problemas de Dirichlet ($j_\Gamma^0 = 0$).

Busque $u \in D_{12}$ tal que

$$G(u, w) = - \int_\Gamma j_\Gamma^1 \dot{w} dx, \forall w \in D_{12}$$

ALGORITMO 2.- Basado en problemas de Neumann ($j_\Gamma^1 = 0$).

Busque $u \in D_{22}$ tal que

$$G(u, w) = \int_\Gamma j_\Gamma^0 \widehat{\frac{\partial w}{\partial n}} dx, \forall w \in D_{12}$$

MÉTODOS DE ROUND-TRIP

DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

Toda función armónica $u \in D$ puede escribirse de dos maneras :

$$\begin{cases} u = u_{11} + u_{12}, \text{ con } u_{11} \in D_{11} \text{ y } u_{12} \in D_{12} \\ u = u_{21} + u_{22}, \text{ con } u_{21} \in D_{21} \text{ y } u_{22} \in D_{22} \end{cases}$$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

$$\sigma_{\alpha\beta} : D \rightarrow D_{\alpha\beta}, \alpha, \beta = 1, 2$$

PROPIEDADES : Las transformaciones

$$\sigma_{12}\sigma_{21} : D_{12} \rightarrow D_{12} \text{ y } \sigma_{22}\sigma_{11} : D_{22} \rightarrow D_{22}$$

son simétricas y positivas definidas. Además :

$$\sigma_{12}\sigma_{21} = I - \sigma_{12}\sigma_{22} \text{ y } \sigma_{22}\sigma_{11} = I - \sigma_{22}\sigma_{12}$$

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

OBSERVACIONES

"Problemas de Dirichlet" : Cuando $u \in D_{12}$ la obtención de $u_{21} \in D_{21}$ y $u_{22} \in D_{22}$ requiere resolver un problema de Dirichlet.

"Problemas de Neumann" : Cuando $u \in D_{22}$ la obtención de $u_{11} \in D_{11}$ y $u_{12} \in D_{12}$ requiere resolver un problema de Neumann.

MÉTODOS NEUMANN-NEUMANN Y FETI

Método Neumann - Neumann

$$u \in D_{12} \quad y \quad \sigma_{12} \sigma_{21} u = \sigma_{12} u_{21}$$

Método FETI

$$u \in D_{22} \quad y \quad \sigma_{22} \sigma_{12} u = \sigma_{22} u_{12}$$

EL NEUMANN-NEUMANN CONSISTE DE UN DIRICHLET SEGUIDO DE UN NEUMANN

Porque

$$\sigma_{12}\sigma_{21} = I - \sigma_{12}\sigma_{22}$$

Además :

Cuando $u \in D_{12}$ Dirichlet da $\sigma_{22}u$

Y $\sigma_{12}\sigma_{22}u$ se obtiene por Neumann ($\sigma_{22}u \in D_{22}$)

EL FETI CONSISTE DE UN NEUMANN SEGUIDO DE UN DIRICHLET

Porque

$$\sigma_{22}\sigma_{11} = I - \sigma_{22}\sigma_{12}$$

Además :

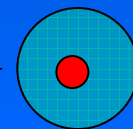
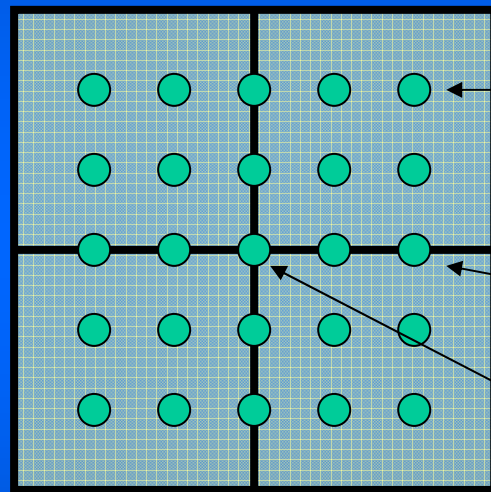
Cuando $u \in D_{22}$ Neumann da $\sigma_{12}u$

Y $\sigma_{22}\sigma_{12}u$ se obtiene por Dirichlet ($\sigma_{12}u \in D_{12}$)

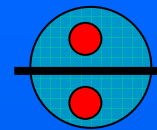
TEORÍA UNIFICADA SIN MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

GENERACIÓN DE LA MATRIZ “A”

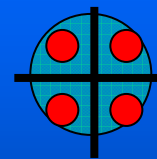
● Nodo ● Grado de libertad



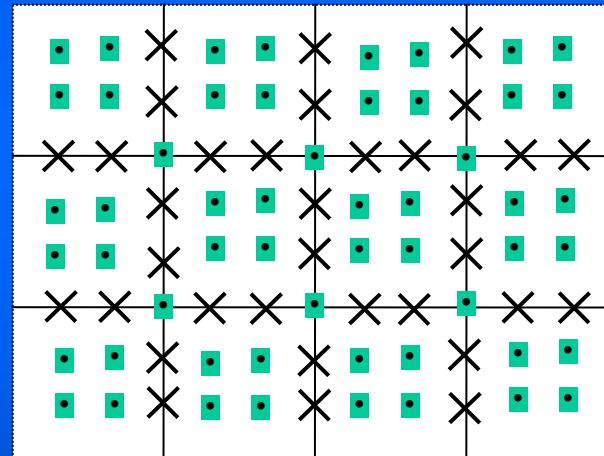
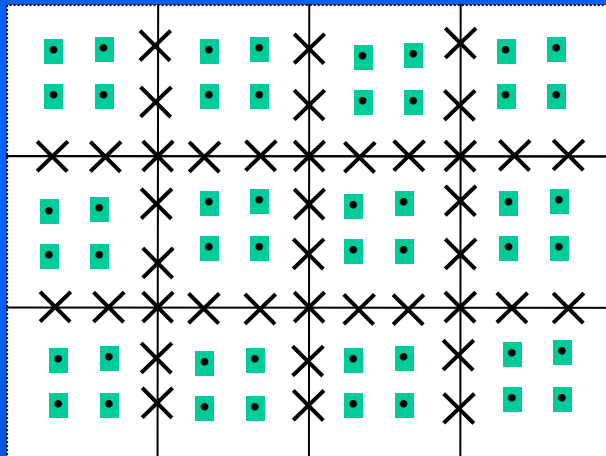
Nodo Primal:
1 grado de libertad



Nodo Dual:
2 ó más
grados de libertad



GENERACIÓN DE LA MATRIZ “A”



REPRESENTACIÓN MATRICIAL

Matriz original $\underline{\underline{\bar{A}}}$ y de ella se deriva otra

$$\underline{\underline{A}} \equiv \begin{pmatrix} A_{\Pi\Pi} & A_{\Pi\Delta} \\ A_{\Delta\Pi} & A_{\Delta\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}} \equiv \begin{pmatrix} A_{\Pi\Pi} & A_{\Pi\Delta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{R}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{\Delta\Pi} & A_{\Delta\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{R}},$$

ESPACIOS DE VECTORES

El espacio total de vectores es $\tilde{D}(\bar{\Omega})$

El espacio de los vectores continuos es $\overline{D}(\bar{\Omega})$

La matriz $\underline{\underline{a}}: \tilde{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow \tilde{D}(\bar{\Omega})$ es la proyección en $\overline{D}(\bar{\Omega})$

La matriz $\underline{\underline{j}}: \tilde{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow \tilde{D}(\bar{\Omega})$ es :

$$\underline{\underline{j}} \equiv \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{a}}$$

NOTACIÓN :

$$\dot{\hat{u}} \equiv \underline{\underline{a}}u \quad y \quad \llbracket u \rrbracket \equiv \underline{\underline{j}}u$$

FÓRMULAS GREEN-HERRERA PARA MATRICES

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{w} \bullet \underline{\underline{L}} \underline{u} - \underline{u} \bullet \underline{\underline{L}} \underline{w} = \underline{u} \bullet \underline{\underline{R}} \underline{w} - \underline{w} \bullet \underline{\underline{R}} \underline{u} \text{ y } \underline{w} \bullet \underline{\underline{R}} \underline{u} = \dot{\underline{w}} \bullet \llbracket \underline{\underline{R}} \rrbracket \underline{u} + \llbracket \underline{w} \rrbracket \bullet \dot{\underline{\underline{R}}} \underline{u}$$

Fórmula de Green - Herrera para matrices

$$\underline{w} \bullet \underline{\underline{L}} \underline{u} - \llbracket \underline{u} \rrbracket \bullet \dot{\underline{\underline{R}}} \underline{w} + \dot{\underline{w}} \bullet \llbracket \underline{\underline{R}} \rrbracket \underline{u} = \underline{u} \bullet \underline{\underline{L}} \underline{w} - \llbracket \underline{w} \rrbracket \bullet \dot{\underline{\underline{R}}} \underline{u} + \dot{\underline{u}} \bullet \llbracket \underline{\underline{R}}^* \rrbracket \underline{w}$$

Aquí :

$$\llbracket \underline{\underline{R}} \rrbracket \equiv \underline{\underline{a}} \underline{\underline{R}} \text{ mientras que } \dot{\underline{\underline{R}}} \equiv \underline{\underline{j}} \underline{\underline{R}}$$

FORMULACIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA

El problema original toma la forma

$$\underline{\underline{L}}\underline{u} + \underline{\underline{R}}[\underline{u}] - [\underline{\underline{R}}]\underline{u} = f$$

Además, por Green - Herrera

$$\left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{R}}\underline{j} - \underline{\underline{a}}\underline{\underline{R}} \right) = \left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{R}}\underline{j} - \underline{\underline{a}}\underline{\underline{R}} \right)^T$$

i.e. la matriz es simétrica.

Entonces el problema original queda escrito como

$$\left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{a}}\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}^T \underline{j} \right) \underline{u} = f$$

ESPACIO DE VECTORES ARMÓNICOS

El problema original se transforma en

$$\begin{aligned}\underline{\underline{L}}\underline{u} &= 0 \\ \underline{\underline{R}}[\underline{u}] - [\underline{\underline{R}}]\underline{u} &= \dot{\underline{f}}_\Gamma\end{aligned}$$

Se define el espacio

$$D \equiv \{\underline{u} \mid \underline{\underline{L}}\underline{u} = 0\},$$

DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

Primer Sistema de Coordenadas

$$D_{11} \equiv \left\{ \underline{u} \in D \mid \dot{\underline{u}} = 0 \right\}, D_{12} \equiv \left\{ \underline{u} \in D \mid \llbracket \underline{u} \rrbracket = 0 \right\}$$

Segundo Sistema de Coordenadas

$$D_{21} \equiv \left\{ u \in D \mid \underline{\underline{\hat{R}}} u = 0 \right\}, D_{12} \equiv \left\{ u \in D \mid \llbracket \underline{\underline{R}} \rrbracket u = 0 \right\}$$

Propiedades de los Sistema de Coordenadas

$$D = D_{11} + D_{12}, \{0\} = D_{11} \cap D_{12}$$

$$D = D_{21} + D_{22}, \{0\} = D_{21} \cap D_{22}$$

TEORÍA UNIFICADA DE MÉTODOS DUAL-PRIMAL

MÉTODOS SINGLE-TRIP

- Método del complemento de Schur
- Método FETI sin preconditionar

MÉTODOS ROUND-TRIP

- Método del Neumann-Neumann
- Método FETI

MÉTODOS SINGLE-TRIP

- Método del complemento de Schur

$$\underline{\underline{a}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{u}}_{\Delta} = \underline{\underline{f}}_{\Delta_2}$$

- Método FETI sin preconditionar

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{j}} \underline{\underline{u}}_{\Delta} = -\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{j}} \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{f}}_{\Delta_2}$$

MÉTODOS ROUND-TRIP

- Método del Neumann-Neumann

$$\underline{\underline{a}}S^{-1}\underline{\underline{a}}Su_{\Delta} = \underline{\underline{a}}S^{-1}\underline{\underline{f}}_{\Delta_2}$$

- Método FETI

$$\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{j}}\underline{\underline{S}}\underline{\underline{j}}u_{\Delta} = -\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{j}}\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{j}}\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{f}}_{\Delta_2}$$

EL CÓMPUTO PARALELO

LOS DDM EN LA COMPUTACIÓN EN PARALELO

Dificultades del Cómputo en Paralelo: La coordinación de los múltiples procesadores y la transmisión de la información entre ellos

Características de los DDM: El método, genera una serie de tareas, las cuales se asignan a cada procesador; y en gran medida son independientes y por eso mismo, la información que se requiere transmitir entre ellos es muy poca

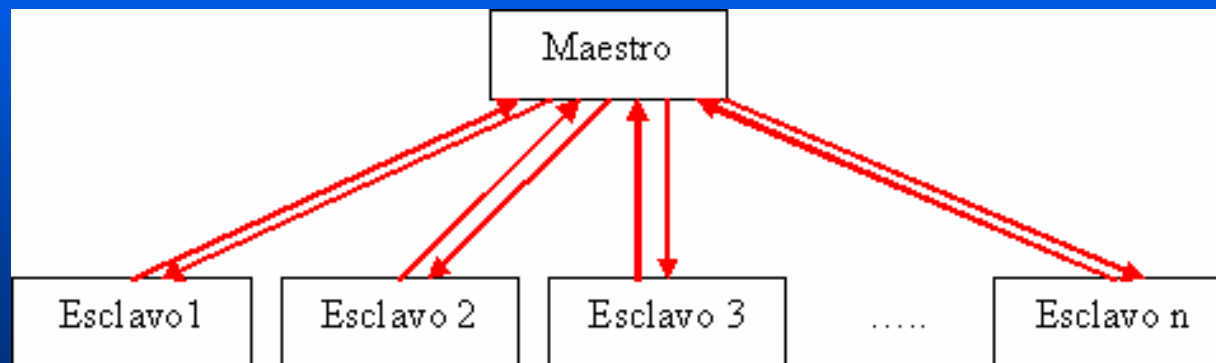
Ventajas de los DDM: Minimizan las necesidades de coordinación y también las de transmisión de información

LOS DDM EN LA COMPUTACIÓN EN PARALELO

Ventajas del uso de Clusters de PC's

- La construcción y puesta en marcha de un cluster es barata.
- Reemplazar componentes defectuosos y escalar el cluster es sencillo.

Cluster (Bajo Esquema Maestro-Esclavo)



COMPUTACIÓN EN PARALELO

A partir de los modelos matemáticos y los modelos numéricos se desarrollará el modelo computacional contenido en un programa de cómputo orientado a objetos en el lenguaje de programación C++ en su forma secuencial y en su forma paralela en C++ usando la interfaz de paso de mensajes (MPI) bajo el esquema maestro-esclavo.

Esto no sólo nos ayudará a demostrar que es factible la construcción del propio modelo computacional a partir del modelo matemático y numérico para la solución de problemas reales. Además, se mostrará los alcances y limitaciones en el consumo de los recursos computacionales, evaluando algunas de las variantes de los métodos numéricos con los que es posible implementar el modelo computacional y haremos el análisis de rendimiento.

COMPUTACIÓN EN PARALELO

También exploraremos los alcances y limitaciones de cada uno de los métodos implementados y como es posible optimizar los recursos computacionales con los que se cuenta.

Hay que destacar que el paradigma de programación orientada a objetos es un método de implementación de programas, organizados como colecciones cooperativas de objetos. Cada objeto representa una instancia de alguna clase y cada clase es miembro de una jerarquía de clases unidas mediante relaciones de herencia, contención, agregación o uso.

COMPUTACIÓN EN PARALELO

Esto nos permite dividir en niveles la semántica de los sistemas complejos tratando así con las partes, que son más manejables que el todo, permitiendo su extensión y un mantenimiento más sencillo. Así, mediante la herencia, contención, agregación o usó nos permite generar clases especializadas que manejan eficientemente la complejidad del problema.

La programación orientada a objetos organiza un programa entorno a sus datos (atributos) y a un conjunto de interfases bien definidas para manipular estos datos (métodos dentro de clases reusables) esto en oposición a los demás paradigmas de programación.

AVANCES Y TRABAJO POR HACER

AVANCES

- Se ha coadyuvado en el desarrollo de una formulación unificadora que no usa multiplicadores de Lagrange de la cual se obtienen expresiones matriciales explícitas en términos de matrices de Schur exclusivamente
- Se ha desarrollado la implementación secuencial y paralela de los métodos de descomposición de dominio:
 - Complemento de Schur
 - FETI y FETI-DP
- Se está desarrollando la implementación secuencial de los métodos Single-Trip
 - Complemento de Schur
 - FETI sin preconditionar

AVANCES

- Se está desarrollando la implementación secuencial de los métodos Round-Trip
 - Neumann-Neumann
 - FETI

POR HACER

- Implementación paralela de los métodos Single-Trip
 - Complemento de Schur
 - FETI sin preconditionar
- Implementación paralela de los métodos Round-Trip
 - Neumann-Neumann
 - FETI
- Implementación de los métodos cuando el $\text{Ker}(S)$ no es trivial

POR HACER

- Comparación de los métodos desarrollados con los métodos más usados como FETI y FETI-DP
- Aplicar el método desarrollado a problemas Elípticos y Parabólicos, tanto lineales como no lineales

CONCLUSIONES

- Se ha desarrollado una teoría unificadora
- Se simplifica las formulaciones que unifica
- Se obtienen expresiones matriciales explícitas en términos de matrices de Schur exclusivamente
- Los algoritmos se pueden derivan directamente del planteamiento matricial, independientemente de la ecuación diferencial parcial o sistema que lo origina y del número de dimensiones del problema original

- Libertad para elegir nodos duales y primales, resultando de esta elección en diferentes preconditionadores a priori para ese problema en particular
- El método desarrollado:
 - Es aplicable a problemas Elípticos y Parabólicos, tanto lineales como no lineales
 - Reduce el esfuerzo de programación
 - Reduce el esfuerzo computacional al momento de ejecución