INTEGRA

Analizador Interactivo de Sistemas Dinámicos

Tutorial

Humberto Carrillo Calvet

Carlos Antonio Lugo Velez

Laboratorio de Dinámica No Lineal

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Contenido.

El objetivo de este tutorial es el de introducir al usuario al manejo del sistema INTEGRA como una herramienta para el análisis de sistemas dinámicos modelados por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

El material aquí expuesto ofrece modelos que pueden ser presentados en un primer curso de Ecuaciones Diferenciales, para estudiantes de ciencias e ingeniería y áreas afines.

1.1-¿Qué es y para qué sirve INTEGRA?

INTEGRA es un software desarrollado en el Laboratorio de Dinámica no Lineal del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M. y puede obtenerse de manera gratuita simplemente solicitándolo en las instalaciones del Laboratorio o bien a través de Internet en www.fciencias.unam.mx/DinamicaNoLineal.

INTEGRA permite al usuario investigar el comportamiento cualitativo de sistemas dinámicos modelados por *ecuaciones diferenciales ordinarias* (EDO) pues mediante una librería de métodos numéricos el sistema *resuelve* las ecuaciones y permite visualizar simulaciones de la dinámica de un sistema en el espacio de estados así como la evolución temporal de las variables involucradas.

Los sistemas que se presentan son el péndulo y su linealización conocida como el oscilador lineal, los cuales discutiremos en apartado siguiente.

1.2-Los Modelos.

1.21-El Péndulo

Supongamos una partícula de masa *m* sujeta a una barra rígida de masa despreciable y de longitud *l* que a su vez está unida a un eje de rotación fijo en el tiempo como se ilustra en la Figura 1.

La suposición de que la barra es rígida implica que la partícula, en caso de moverse, lo haría sobre una circunferencia de radio *l*. Por otro lado el movimiento se debe únicamente a la fuerza de gravedad que actúa sobre la partícula (se desprecian efectos provocados por otros agentes como la fricción); la *constricción* a la circunferencia trae como consecuencia, que solo la componente tangencial de la fuerza es la que actúa instantáneamente sobre la masa. Entonces acuerdo con la segunda ley de Newton se tiene que:

$$F=(mv)'=-mg\,sen(x)$$

donde la ' denota diferenciación con respecto al tiempo.

Si $v=s'$ con s la circunferencia, que en términos del ángulo es $v=l\cdot x'$, entonces la ecuación de movimiento del péndulo es:

$$x''=-(g/l)sen(x)$$

La única variable es el ángulo, por lo tanto su evolución temporal referida a un eje vertical, que esté en el plano y pase por el centro de la circunferencia, nos da toda la información del sistema.

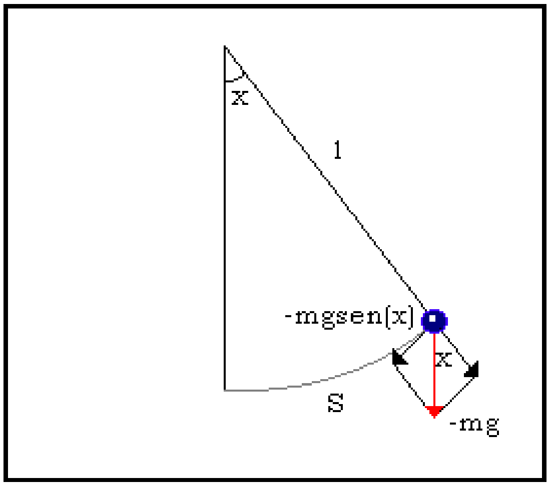


Figura 1. Geometría del Péndulo Simple.

Él péndulo es uno de los sistemas dinámicos más estudiados en la mecánica clásica, es un sistema no lineal que no puede integrarse directamente. Sin embargo el sistema puede ser linealizado utilizando el hecho de que:

$$\mathrm{Sen}(x) \approx x \text{ si } x \ll 1$$

Haciendo esa simplificación tenemos que la ecuación diferencial de movimiento es:

$$x'' = -(g/l)x$$

Ésta ecuación corresponde a un sistema dinámico que se conoce como el oscilador armónico simple.

1.22 El Oscilador Lineal.

La figura 2 muestra una partícula de masa *m* unida a un resorte. El resorte ejerce sobre la partícula una fuerza directamente proporcional al desplazamiento (esta condición se conoce como *Ley de Hooke*). A la constante de proporcionalidad la denotamos por *k* donde $k>0$.

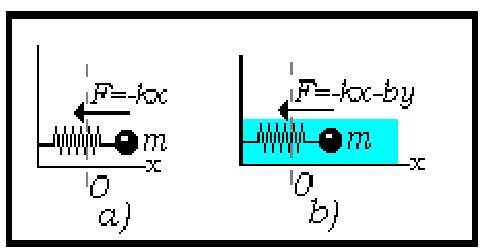


Figura 2.Oscilador Lineal.

El signo menos aparece porque la fuerza actúa en dirección contraria al desplazamiento (pues el origen lo fijamos en el punto de equilibrio del resorte). Entonces de acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos que:

$$F=-kx=mx''$$

Si suponemos que el sistema siente los efectos de la fricción (que se opone al movimiento) y que ésta es directamente proporcional a la velocidad $y=x'$, por la segunda ley de Newton tenemos que:

$$F=-kx-by=mx''$$

Con la constante de proporcionalidad $b>0$.

Esta situación se ilustra en la figura 2b, donde se considera que el sistema en verdad siente los efectos de la fricción debido a que está inmerso en un entorno lleno de algún fluido, donde el coeficiente *b* refleja justo las propiedades de dicho entorno.

Vale la pena mencionar, que al estudiar fenómenos de oscilación es interesante conocer la respuesta de dichas dinámicas, al ser sometidas a alguna perturbación externa controlada. En el caso de nuestro modelo consideramos un tipo de forzamiento periódico dado por:

$$F=H\cos(wt)$$

Entonces, igualando las fuerzas y utilizando la segunda ley de Newton tenemos que la ecuación de movimiento será:

$$x''=-(k/m)x-(b/m)y+(H/m)\cos(wt)$$

Este sistema puede ser integrado completamente y más adelante confrontaremos los resultados cuantitativos, con los resultados cualitativos que se obtienen con INTEGRA.

Para terminar esta sección, retomaremos los dos modelos que emplearemos mas adelante y los reescribiremos como sistemas de ecuaciones.

Para el péndulo simple tenemos:

$$x''=-(g/l)\mathrm{sen}(x)$$

Si

$$x'=y$$

entonces

$$y'=-(g/l)\mathrm{sen}(x)$$

Análogamente para el oscilador, si:

$$x'=y$$

entonces

$$y'=-(k/m)x-(b/m)y+C\cos(wt)$$

Si b=0 y H ó w =0 el sistema es lo que se conoce como el “Oscilador Armónico”.

En la siguiente sección se expone la manera de llevar las ecuaciones del papel a la computadora.

II.La Interfaz de INTEGRA

En esta sección discutiremos como “alimentar” a Integra con algún sistema de ecuaciones que se quiera investigar. Esto se hace mediante el programa *Interfaz.*

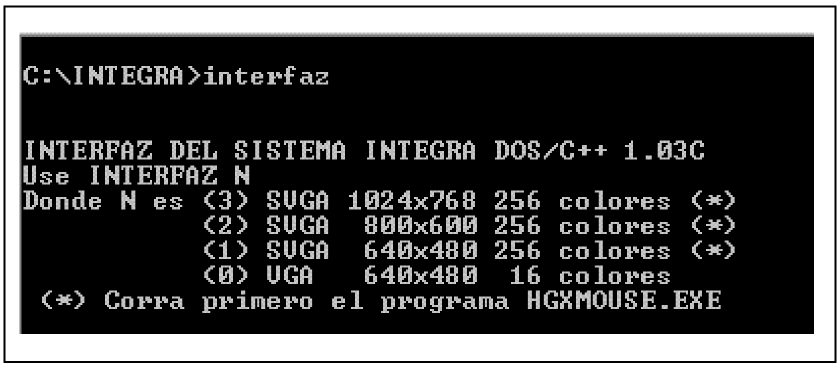
Interfaz es un programa ejecutable para DOS que permite al usuario la creación, edición y organización de su propia biblioteca de sistemas. También permite la elaboración y edición de descripciones textuales con comentarios sobre cada sistema.

En la *Interfaz* generaremos los archivos ejecutables que nos permitirán hacer el análisis de los sistemas.

2.1-Acceso a la Interfaz

Para tener acceso a la Interfaz debemos hacerlo en modo DOS, primero se teclea *Interfaz* y después se presiona ENTER↵. Se desplegará el siguiente menú en la pantalla.

Aspecto del menú al ejecutar el programa Interfaz.

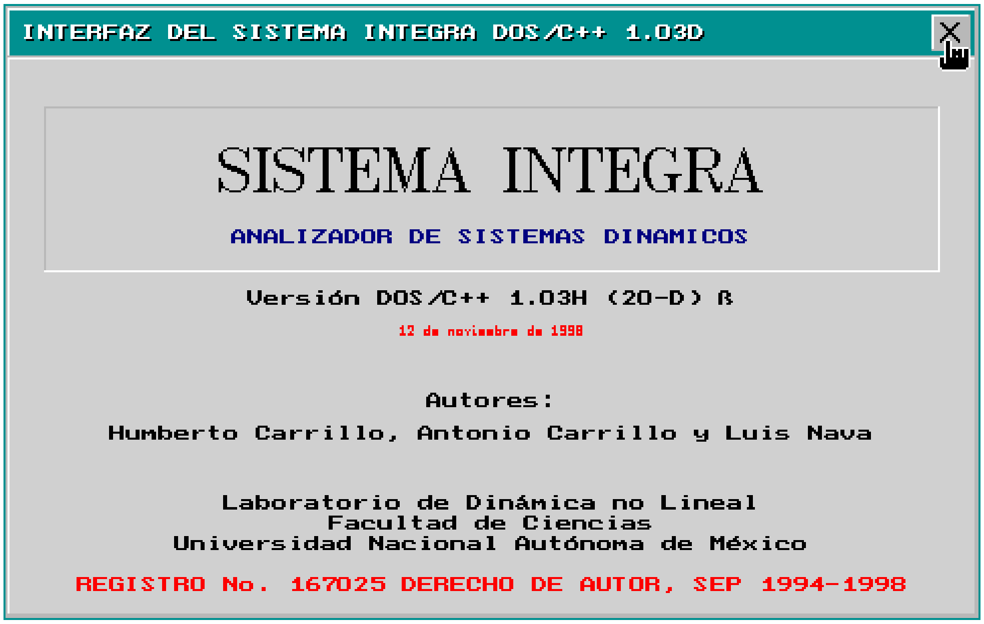


El menú nos presenta las opciones de configuración de video. El usuario debe seleccionar una de las opciones según la resolución de su monitor.

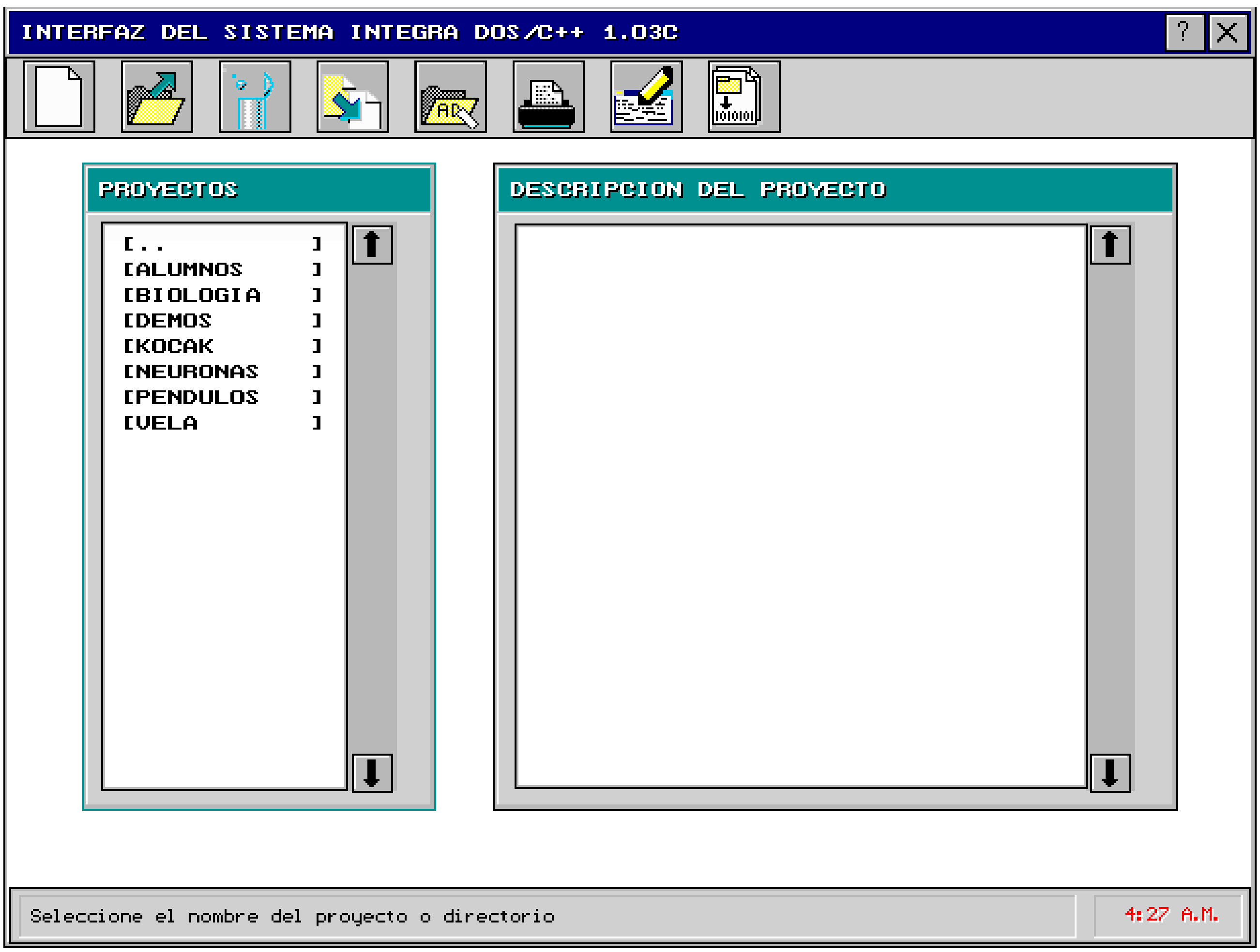
La interfaz es una aplicación que necesita de un dispositivo de *mouse* para un funcionamiento adecuado, Para las opciones 1, 2, 3 es necesario que el usuario ejecute el programa HGXMOUSE, que instala un controlador de mouse para el modo de video SVGA. El modo más usual en cualquier sistema es el modo de video VGA. Al tener familiaridad con la interfaz puede accesarse simplemente tecleando INTERFAZ N.

Ya que se haya accesado a la Interfaz, aparecerá la ventana de presentación sobrepuesta a la ventana de trabajo. Para cerrar la ventana de presentación se debe “hacer click “ en el icono *cerrar*.

A continuación se muestran las pantallas de presentación y de trabajo.



Pantalla de presentación de la Interfaz.



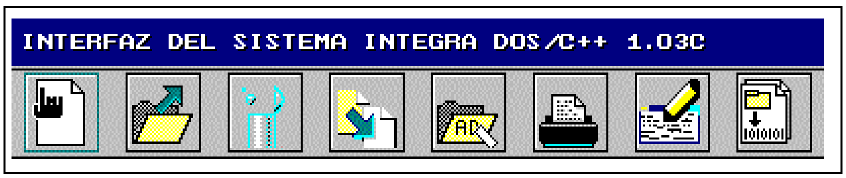
Pantalla de trabajo de la Interfaz

Para aprender el mecanismo de "alimentación" de INTEGRA con un sistema de ecuaciones diferenciales debemos profundizar un poco en la ventana de trabajo.

2.2 Proyectos y sistemas en INTEGRA.

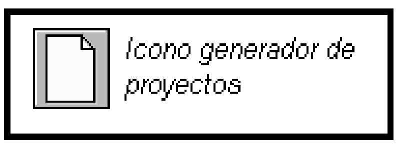
La Interfaz de INTEGRA nos permite organizar los sistemas de ecuaciones diferenciales que deseamos estudiar de una manera práctica. Supongamos que tenemos que examinar un modelo muy complejo que requiera de diversos sistemas de ecuaciones diferenciales para su descripción. Un proyecto es justamente eso, un conjunto de sistemas afines que podemos englobar como uno solo. Otro ejemplo puede ser todos los sistemas que forman parte de un curso, los cuales podemos englobar en un solo proyecto. En realidad generar un proyecto es como crear un directorio dentro de la Interfaz donde almacenaremos algunos sistemas de ecuaciones diferenciales que tengan alguna afinidad.

Para generar un proyecto, y en general para operar dentro de la *Interfaz* usaremos la "*barra de herramientas*" que se encuentra en la parte superior de la pantalla de trabajo, la cual está conformada por diversos iconos de acción. A continuación de muestra la "*barra de herramientas*".

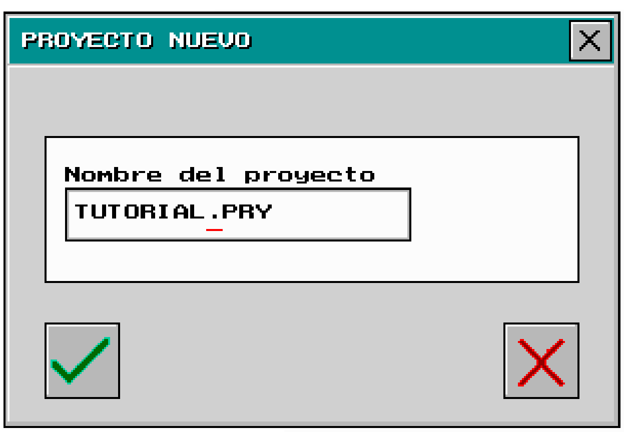


Barra de herramientas de la Interfaz.

El primer icono es el que usaremos para generar un nuevo proyecto.

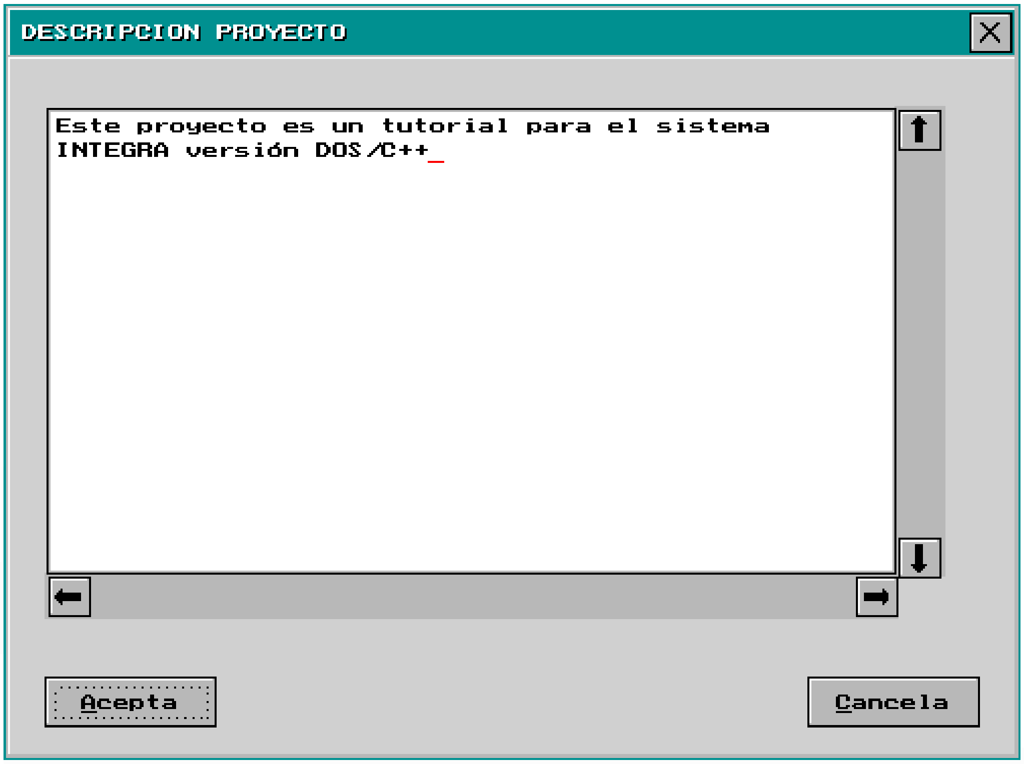


Al hacer "click" en el *generador de proyectos* aparecerá la ventana en la que daremos nombre a nuestro proyecto, la cual se muestra a continuación.



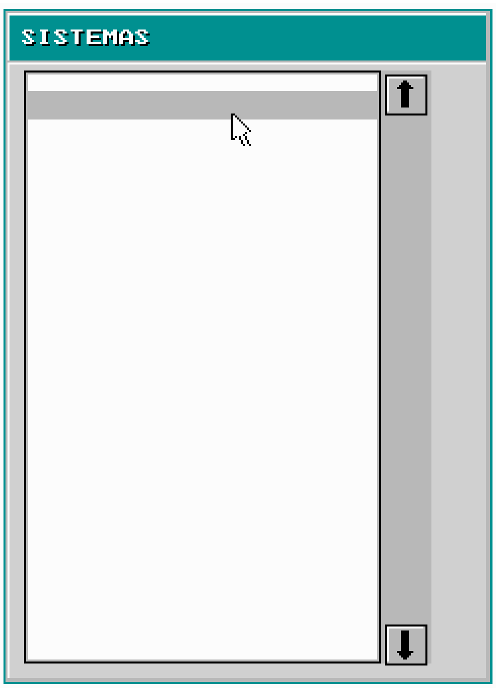
Después de "etiquetar" nuestro proyecto y haber presionado la opción de aprobación del mismo (paloma en la parte baja de la ventana). INTEGRA muestra una ventana que permite editar una descripción textual, misma que desaparecerá al aprobar dicha descripción.

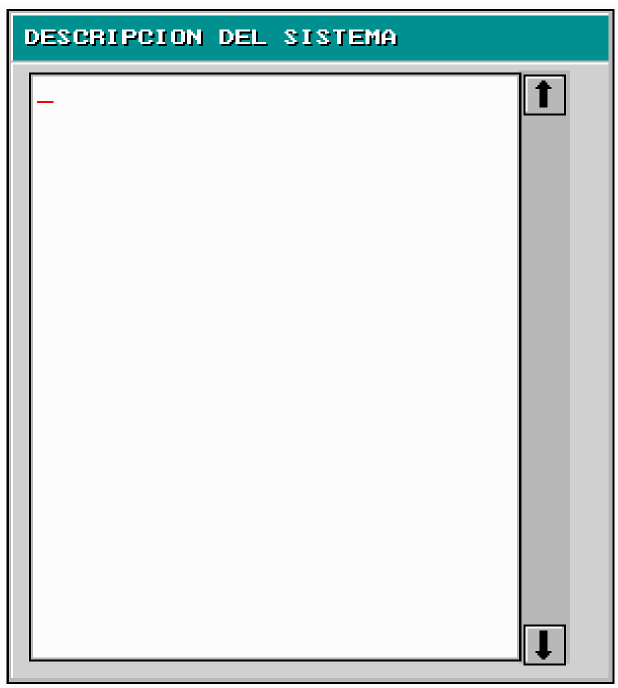
A continuación se muestra la ventana de edición para la descripción del proyecto. Una vez terminada la descripción basta con presionar el icono *“Acepta”* situado en la parte baja de la ventana.



Ventana con la descripción del proyecto.

Al aprobar la descripción aparecerán las siguientes ventanas.



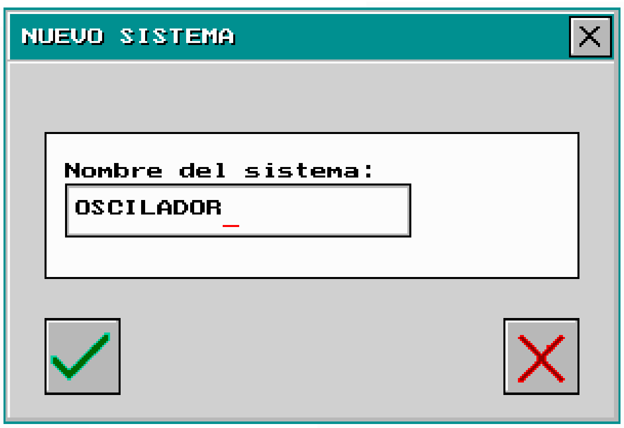


Éstas ventanas muestran los sistemas y las descripciones correspondientes a un proyecto. (En este caso no muestran información ya que el proyecto es nuevo).

Para crear un sistema nuevo debemos seguir un procedimiento análogo al de generación de un proyecto, ahora la acción del icono generador de proyectos, será la de generar un nuevo sistema. A continuación se muestran los iconos: generador de sistemas, editor de ecuaciones y editor de la descripción del sistema.

El editor de ecuaciones nos permite escribir y/o editar las ecuaciones diferenciales del sistema, mientras que el icono del editor de la descripción del sistema nos permite escribir una descripción textual sobre el contenido del sistema.

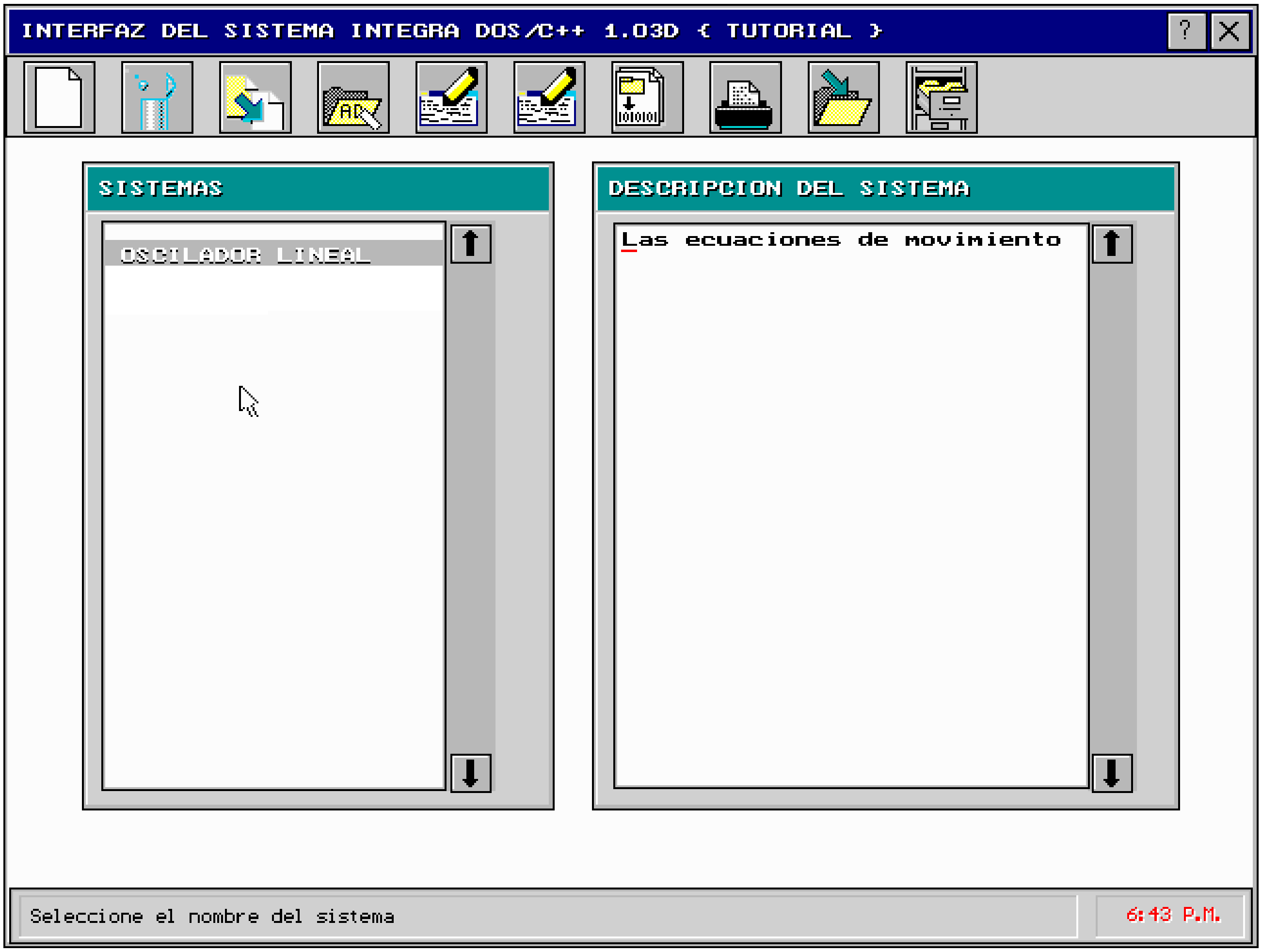
Al accionar el icono de creación de sistemas aparecerá la siguiente ventana, para nombrar el sistema.



Tip:Para editar un sistema dentro de un proyecto debemos hacer click con el botón izquierdo del mouse en la franja sombreada que aparece en la ventana de sistemas; entonces aparecerá la ventana que nos permitirá dar nombre al nuevo sistema.

Para editar la descripción podemos hacerlo usando el icono correspondiente o como lo menciona el recuadro. Esto es una manera general de proceder para muchas funciones de la interfaz.

Al tener la descripción del sistema ya podemos escribir las ecuaciones diferenciales que formarán el sistema, para lo cual damos click en el sistema (o en el icono de edición de las ecuaciones), el cual (al igual que la descripción) ya aparecerá escrito en la ventana correspondiente, como se muestra en la siguiente figura.



Aspecto de la pantalla donde ya se reconoce el nombre y la descripción del sistema ***OSCILADOR LINEAL.***

Hecho lo anterior aparecerá una nueva ventana, la cual utilizaremos para escribir las ecuaciones.

2.3-Edición de las ecuaciones diferenciales.

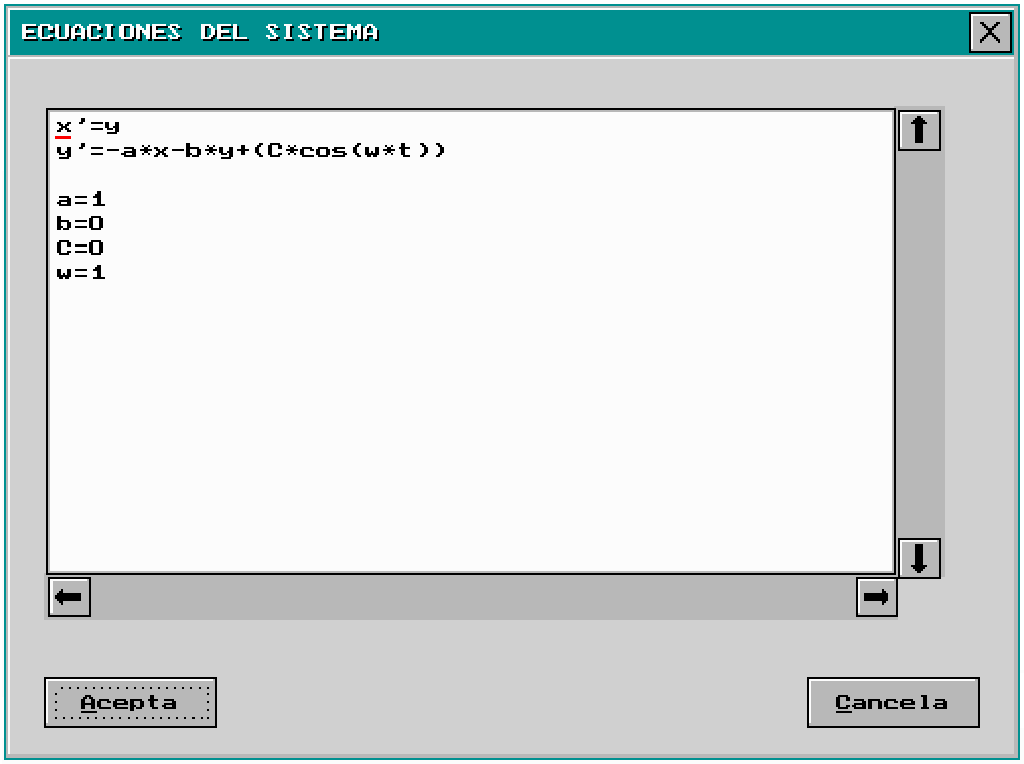
El editor de ecuaciones de INTEGRA utiliza una sintaxis como la de una calculadora científica estándar, además de que reconoce las funciones de uso más común. Aquí nos ocuparemos de la sintaxis del péndulo y en el apéndice 1 se presentan las funciones válidas así como su sintaxis.

Las ecuaciones de movimiento del oscilador son:

$$x'=y$$
$$y'=-(k/m)x-(b/m)y+C\cos(wt)$$

Para escribir éstas debemos notar lo siguiente: Las operaciones aritméticas usuales válidas en INTEGRA están representadas con los símbolos + como operador de suma, - como operador de resta, * para multiplicar y / para dividir, () Son los usuales paréntesis, [ ] como corchetes y { } como operador de llaves, así como ”primar” la variable para denotar diferenciación.

Para el “Oscilador lineal” las ecuaciones en Integra deben ser escritas como se ilustra en la siguiente figura:

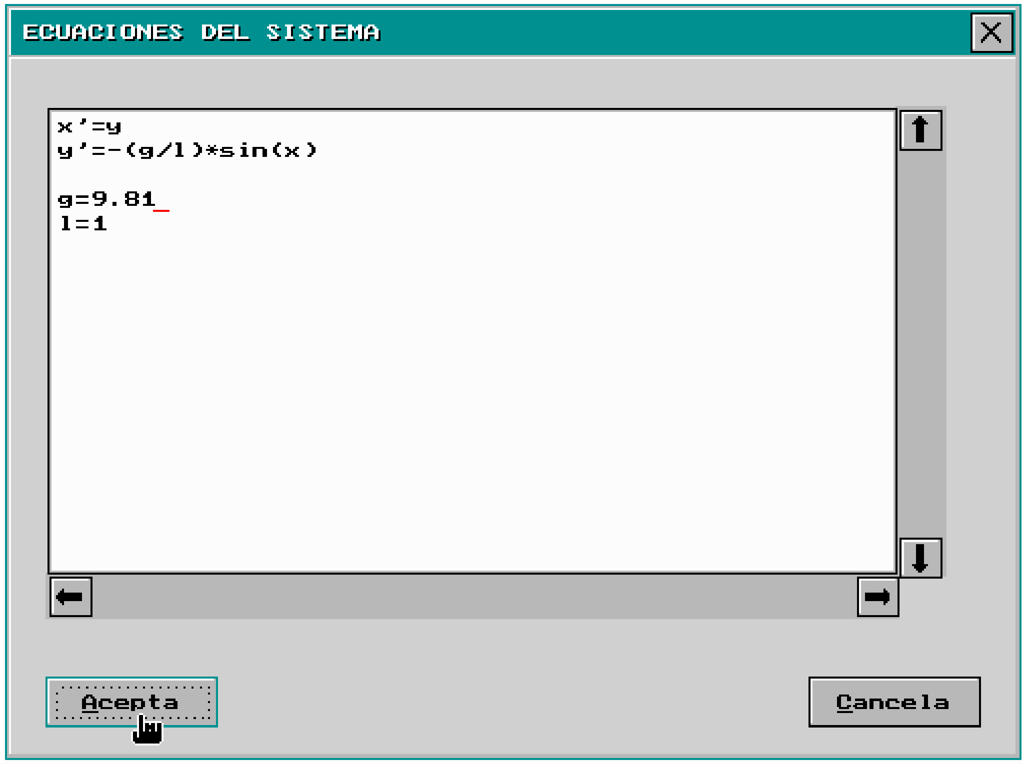


Los parámetros del sistema están escritos y especificados debajo de las ecuaciones e igualados a un valor (cero y uno en este caso), ya que los valores de los parámetros del sistema deben tener un valor inicial, para poder compilar el proyecto y generar un archivo ejecutable con el que trabajaremos. Éstos valores pueden ser modificados al gusto, al trabajar con nuestro sistema ya debidamente compilado, como se verá más adelante.

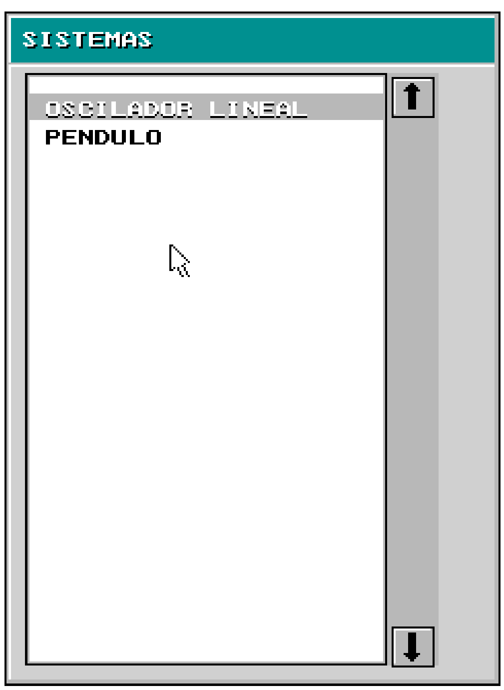
Después de la edición de las ecuaciones y la aceptación de éstas, hemos prácticamente terminado el procedimiento para crear un proyecto. Sólo falta grabar el proyecto y generar el archivo ejecutable; sin embargo antes de hacer, esto editaremos también las ecuaciones correspondientes al péndulo simple. El procedimiento para crear este sistema es igual al del oscilador lineal.

Siguiendo el procedimiento descrito, no debe haber mensajes de error, de haberlos, debemos verificar la sintaxis como primera opción de error.

A continuación se muestra el aspecto de las ventanas de ecuaciones del péndulo y el manejador de sistemas del proyecto ***TUTORIAL***, que contiene los sistemas ***OSCILADOR LINEAL*** y ***PENDULO.***



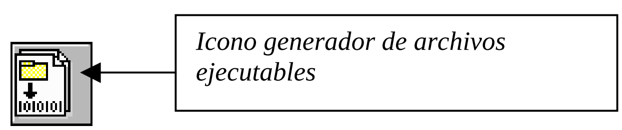
Aspecto de las ecuaciones del péndulo.



Aspecto del manejador de sistemas Correspondientes al proyecto ***TUTORIAL***

2.4 Archivos Ejecutables.

Para crear el archivo ejecutable, hacemos "click" en el icono compilador de proyectos. (generador de archivos ejecutables) , que se muestra a continuación.



Aparecerá una ventana que nos pide la confirmación para llevar a cabo la grabación y compilación del proyecto.

Una vez grabado el proyecto aparecerá la ventana de compilación.

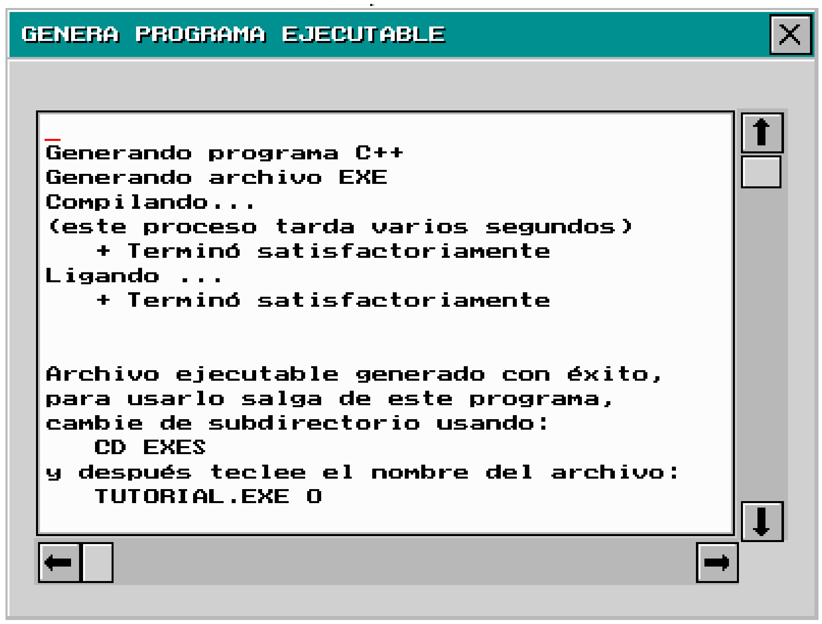
Si los sistemas correspondientes no tienen errores de escritura (como debe ser en el caso de los ejemplos) entonces TUTORIAL deberá ser compilado sin problemas.

A continuación se muestran las ventanas de grabación del proyecto y de compilación del proyecto.

La figura de la izquierda muestra la ventana de grabación del proyecto TUTORIAL. Los dos iconos inferiores son de aprobación o cancelación para grabar o no el proyecto; una vez aprobado, aparecerá la ventana (que se muestra abajo) que compila el proyecto y genera el archivo ejecutable.

Si alguno de los sistemas tiene algún, error éste se señalará en dicha ventana.

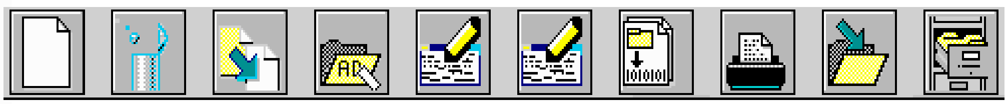
Como se puede ver en la ilustración, INTEGRA compila y genera un archivo ejecutable del proyecto, que debemos correr desde un subdirectorio llamado "EXES". Para empezar con el análisis del modelo debemos terminar el uso de la *Interfaz* y correr "tutorial.exe".



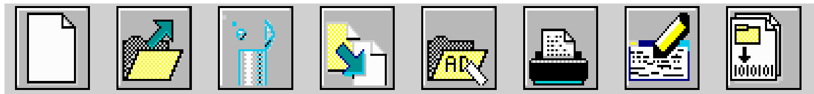
Para terminar el uso de la *Interfaz*, debemos hacer "click" en el icono de finalización y cierre de las ventanas, hasta que aparezca la ventana de confirmación para la finalización de INTEGRA (Que se muestra al final de capítulo.)

Antes de seguir adelante revisaremos brevemente los iconos de la barra de herramientas.

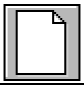
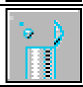
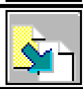
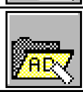
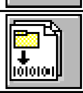
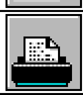
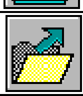
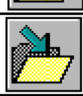
El procedimiento que se ha seguido hasta el momento abarca todas las funciones de la interfaz de INTEGRA para la generación rápida y sencilla de un proyecto. Ahora veremos las funciones de los iconos de la barra de herramientas que no se han mencionado hasta el momento.



La barra de herramientas anterior aparece ya que se ha seleccionado o generado un proyecto nuevo, pues al inicio de la interfaz aparece una barra con menor número de opciones, la cual se muestra a continuación.



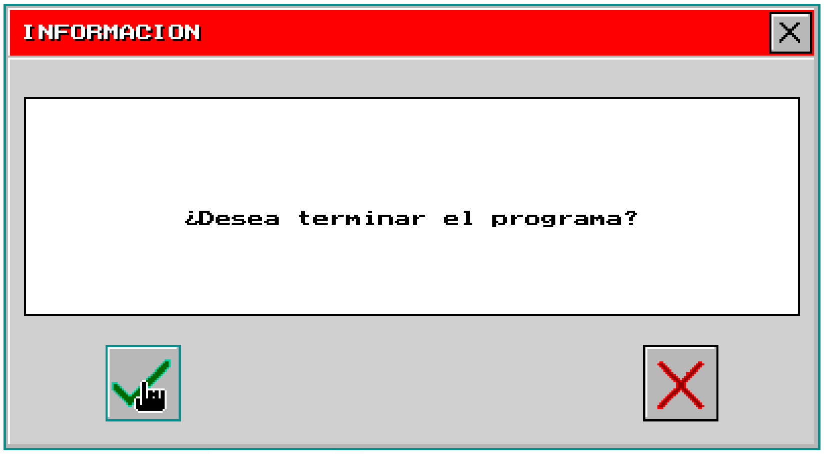
En la siguiente tabla se describir brevemente la función de cada una de las acciones correspondientes a los iconos de las dos barras.

	Generador de Proyectos o Sistemas:genera un nuevo proyecto al estar en la pantalla de proyectos;o genera un nuevo sistema si se ha seleccionado un proyecto.
	Eliminador de Proyectos o Sistemas: elimina un proyecto o sistema seleccionado
	Duplicador de Proyectos o Sistemas: Crea una copia si se ha seleccionado un proyecto o sistema.
	Rotulador de Proyectos o Sistemas: cambia el nombre de un proyecto o sistema seleccionado previamente.
	Editor de Proyectos:Si nos encontramos en el directorio de proyectos, esta acción nos permite editar la descrpción del mismo.
	Editor de Sistemas:Al tener seleccionado un proyecto, esta opción nos permite editar la descripción del sistema.
	Editor de ecuaciones: Al tener seleccionado un sistema este icono nos permite editar las ecuaciones y parámetros del mismo.
	Compilador: La acción de este icono es compilar un proyecto y generar un archivo ejecutable del proyecto seleccionado
	Visualizador de Proyectos o Sistemas:Este icono nos da la opcion de visualizar o imprimir un reporte de un proyecto o sistema según, sea el caso también se puede grabar el reporte.
	Seleccionador de Proyectos: Al tener seleccionado un directorio o proyecto este icono nos permite abrir el directorio o seleccionado.
	Grabador de Proyectos: Al tener seleccionado un proyecto este icono nos permite grabar el proyecto seleccionado.
	Manejador de Proyectos: Si tenemos un proyecto seleccionado aparecerán los sistemas del proyecto en pantalla, con este icono regresamos al directorio de proyectos (i.e subimos un "nivel").

De esta forma finalizamos la descripción del uso de la *Interfaz* de INTEGRA, en donde hemos generado un proyecto al que llamamos **TUTORIAL.**

Ahora pasaremos al análisis cualitativo del los sistemas.

Para finalizar la sección se muestra la pantalla de finalización de la Interfaz.



Pantalla de finalización de la Interfaz de INTEGRA.

III.-Análisis interactivo con INTEGRA.

Ya que hemos generado el proyecto podemos empezar a utilizar el sistema INTEGRA para el análisis de las ecuaciones diferenciales. Como primer paso, se debe ejecutar desde el sistema operativo el archivo que generamos anteriormente en la interfaz; esto se ilustra a continuación.

```
C:\INTEGRA>cd exes

C:\INTEGRA\EXES>tutorial


INTEGRA DOS/C++ 1.03CE

Escriba:
   C:\INTEGRA\EXES\TUTORIAL.EXE N

Donde N es (3) SVGA 1024x768 256 colores (*)
           (2) SVGA  800x600 256 colores (*)
           (1) SVGA  640x480 256 colores (*)
           (0) VGA   640x480  16 colores
 (*) Corra primero el programa HGXMOUSE.EXE
```

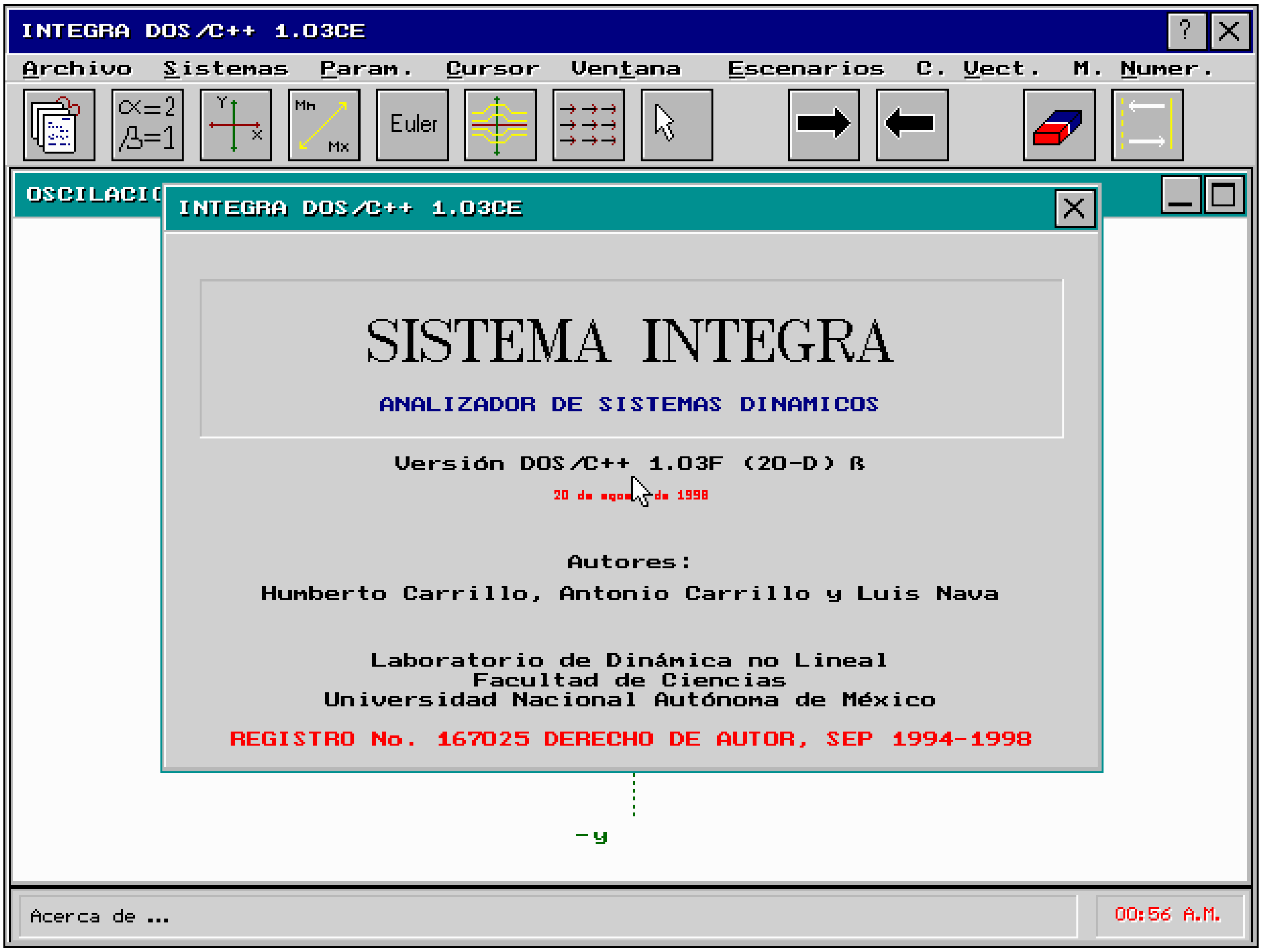
El archivo debe ejecutarse desde el subdirectorio EXES, entonces aparece un menú de opciones de configuración de video. Como se ve en la figura anterior INTEGRA necesita que se le especifique el modo gráfico tecleando una de las opciones junto con el nombre del archivo ejecutable y dejando un carácter en blanco después del último carácter del nombre del archivo.

```
C:\INTEGRA\EXES>tutorial 0
```

Nosotros hemos elegido la opción de configuración de video más usual que es la 0, que corresponde a una tarjeta de video VGA de 16 colores y resolución de 640x480.

Ya que hemos escogido una de las opciones de configuración aparecerá la pantalla de inicio de INTEGRA, que después de cerrarse nos permitirá ver la pantalla de trabajo, encabezada por una barra de herramientas

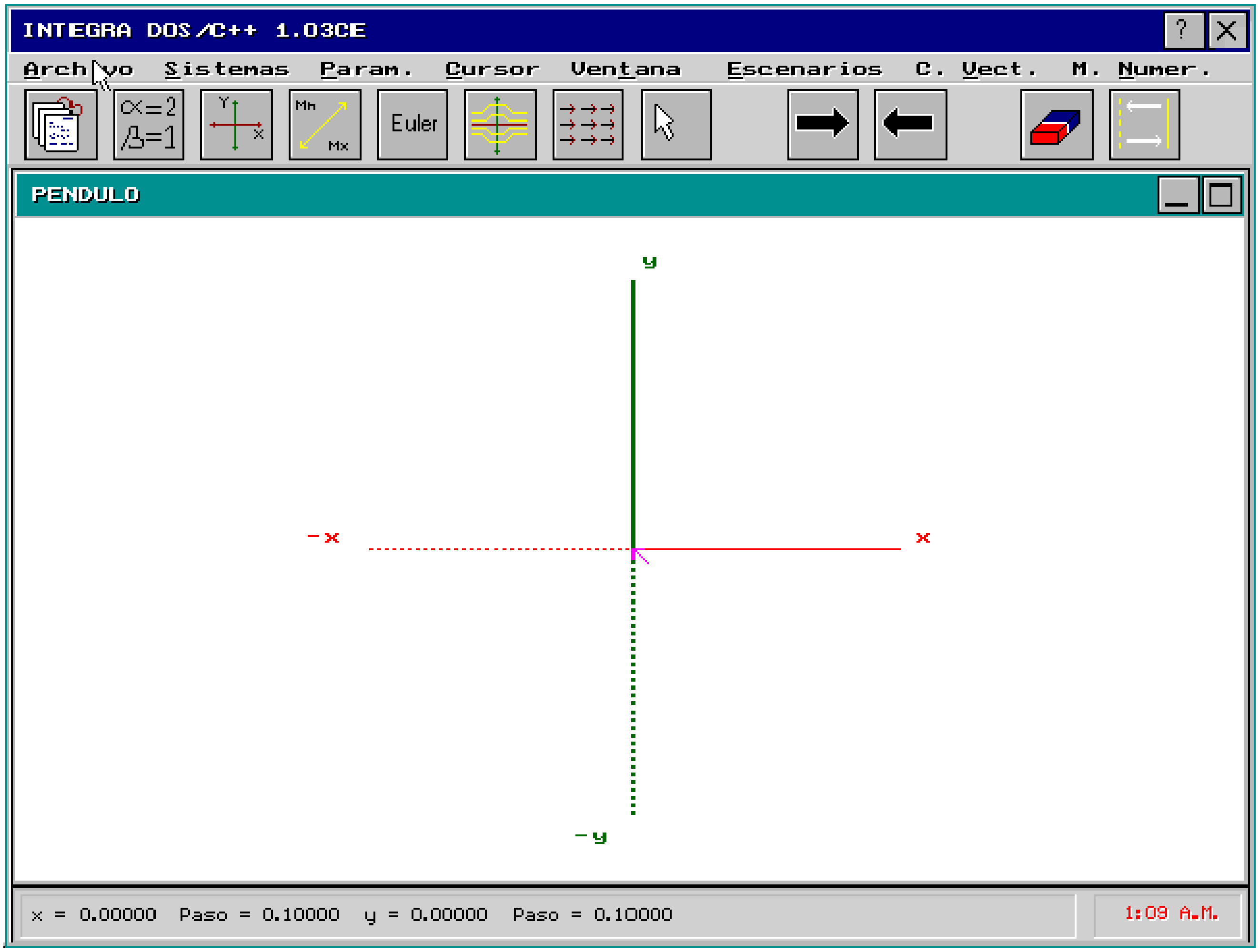
A continuación se muestra la pantalla de inicio de INTEGRA, la cual proporciona la información “acerca de” del sistema.



Pantalla de presentación del sistema INTEGRA.

Una vez cerrada la ventana de presentación de INTEGRA y que visualicemos pantalla de trabajo, aparece en la esquina superior izquierda, el nombre de uno de los sistemas que forman parte del proyecto, al que llamamos **PENDULO**. También aparece un par de ejes coordenados que corresponden a las “variables” “x” y “y” del sistema es decir el “espacio de estados del sistema”. En el origen aparece la flecha que utilizaremos como cursor.

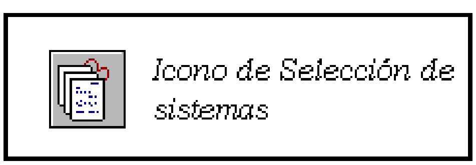
La siguiente figura muestra la pantalla de trabajo con la barra de herramientas del sistema.



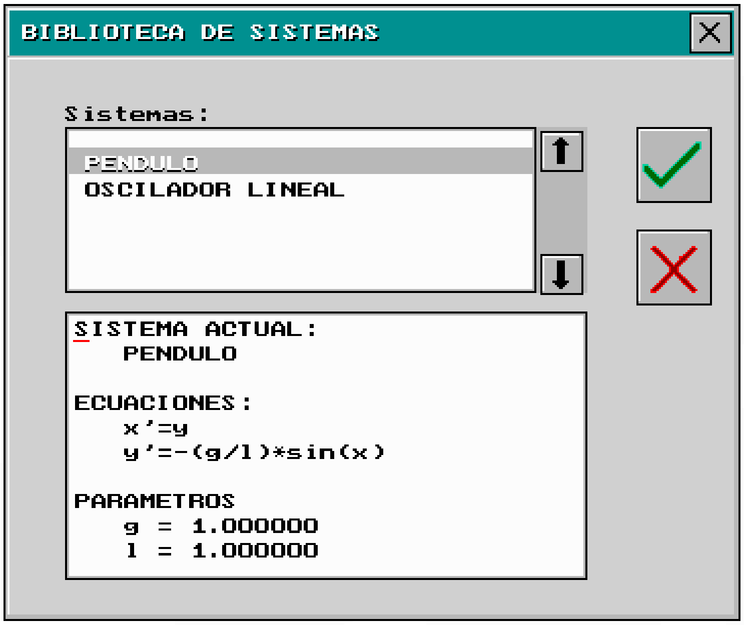
Pantalla de trabajo del sistema INTEGRA.

En la parte baja de la pantalla se ven las coordenadas del cursor y el "paso" de cada coordenada.

El proyecto que generamos está constituido por dos sistemas, el sistema PENDULO y el sistema OSCILADOR LINEAL. Para visualizar los sistemas componentes de un proyecto empleamos el icono de *selección de sistema*, que nos permitirá escoger el sistema con el cual vamos a trabajar.



Una vez activado este icono se desplegará la Biblioteca de sistemas, la cual muestra los sistemas componentes del proyecto y permite seleccionar alguno. A continuación se ilustra esta situación.

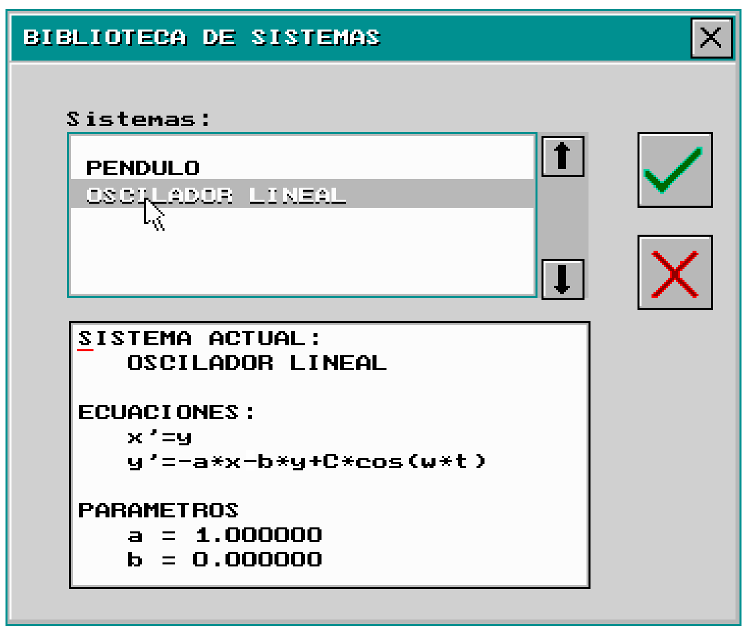


La figura muestra la biblioteca de sistemas del proyecto.

La subventana superior contiene la lista de sistemas, mientras que la inferior, muestra las ecuaciones y los parámetros del sistema con el que se está trabajando.

Para cambiar de sistema, hay que escogerlo con el *mouse* o bien con las flechas de selección del teclado y aprobar la selección.

Al aprobar otro sistema la biblioteca nos muestra las ecuaciones, así como los parámetros preestablecidos del sistema seleccionado, en este caso el OSCILADOR LINEAL.



Para empezar a estudiar la dinámica de alguno de los sistemas, empezaremos por el más sencillo: el Oscilador Armónico. Elegimos el sistema OSCILADOR LINEAL y escoger un conjunto de parámetros que nos definan un Oscilador Armónico.

3.1-El Oscilador Armónico.

Retomemos las ecuaciones del sistema:

$$x' = y$$
$$y' = -ax - by + C\cos(wt)$$

Como se vio los parámetros del sistema deben ser todos positivos o cero. Nos interesa saber como varía la dinámica del sistema, cuando varían los parámetros. Al ingresar las ecuaciones al sistema INTEGRA dimos valores iniciales a los parámetros, igualando a cero A y b, mientras que para a y ω a uno. La "amplitud" del coseno igualada a cero hace intrascendente el valor de la "frecuencia" del mismo. Entonces el sistema queda de la siguiente forma.

$$x' = y$$
$$y' = -ax$$

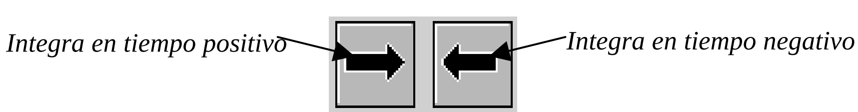
Este sistema es el Oscilador armónico, es sencillo mostrar que l as soluciones de este sistema son de la forma:

$$(x, y) = (C_1 \mathrm{sen}(\sqrt{a}t), \sqrt{a}t\, C_2 \cos(\sqrt{a}\ t))$$

Donde C_1 y C_2 están determinados por las condiciones iniciales en el tiempo cero. Esas parejas definen paramétricamente (usando el tiempo "t" como parámetro) elipses en el plano XY. En función del tiempo x es una función periódica de periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{a}}$. Para mirar esto con INTEGRA hay que seleccionar una par de condiciones iniciales e "integrar" en tiempo positivo y ver la curva que se genera.

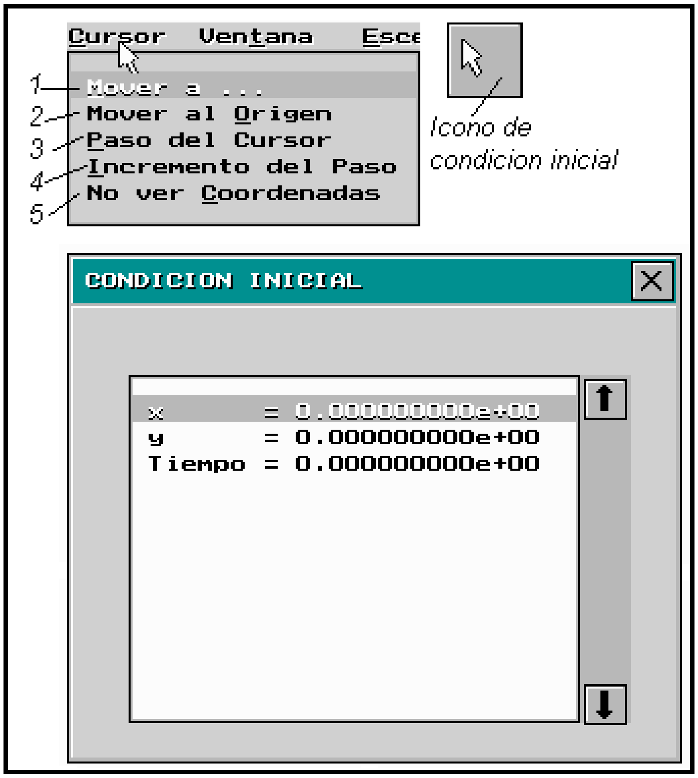
Es importante recordar que para el análisis de un sistema de ecuaciones diferenciales, es de particular interés la búsqueda de los equilibrios del sistema y la naturaleza de los mismos, es inmediato notar que el origen es el único equilibrio del Oscilador Armónico.

Para iniciar la exploración de la dinámica del sistema veremos que se cumple que las trayectorias en el espacio de estados son elipses concéntricas al origen (¿Pueden cruzarse las trayectorias en este sistema para algún conjunto de valores de los parámetros?).Para que podamos visualizar las trayectorias en el espacio de estados, hay que utilizar el icono de acción para integrar numéricamente, en tiempo positivo o negativo. Estos iconos se muestran a continuación.



Para escoger un par ordenado de condiciones iniciales debemos posicionar la "flecha cursor" en tal par ordenado; esto se puede hacer con las flechas del teclado o bien con la opción cursor que se encuentra en la parte superior de la pantalla.

A continuación se muestra el menú de la opción cursor, así como el icono de acción para dar una condición inicial



Como se puede observar el menú que aparece en la opción cursor ha sido numerado y se da una breve descripción de cada una .

1.- Mover a: realiza la misma acción que el icono que se muestra a la derecha, es decir nos permite introducir un par de coordenadas como condiciones iniciales (también se nos pide una condición para algún tiempo inicial, por el momento omitiremos este punto). La ventana que se mira en la figura anterior es la que se abre al seleccionar esta opción.

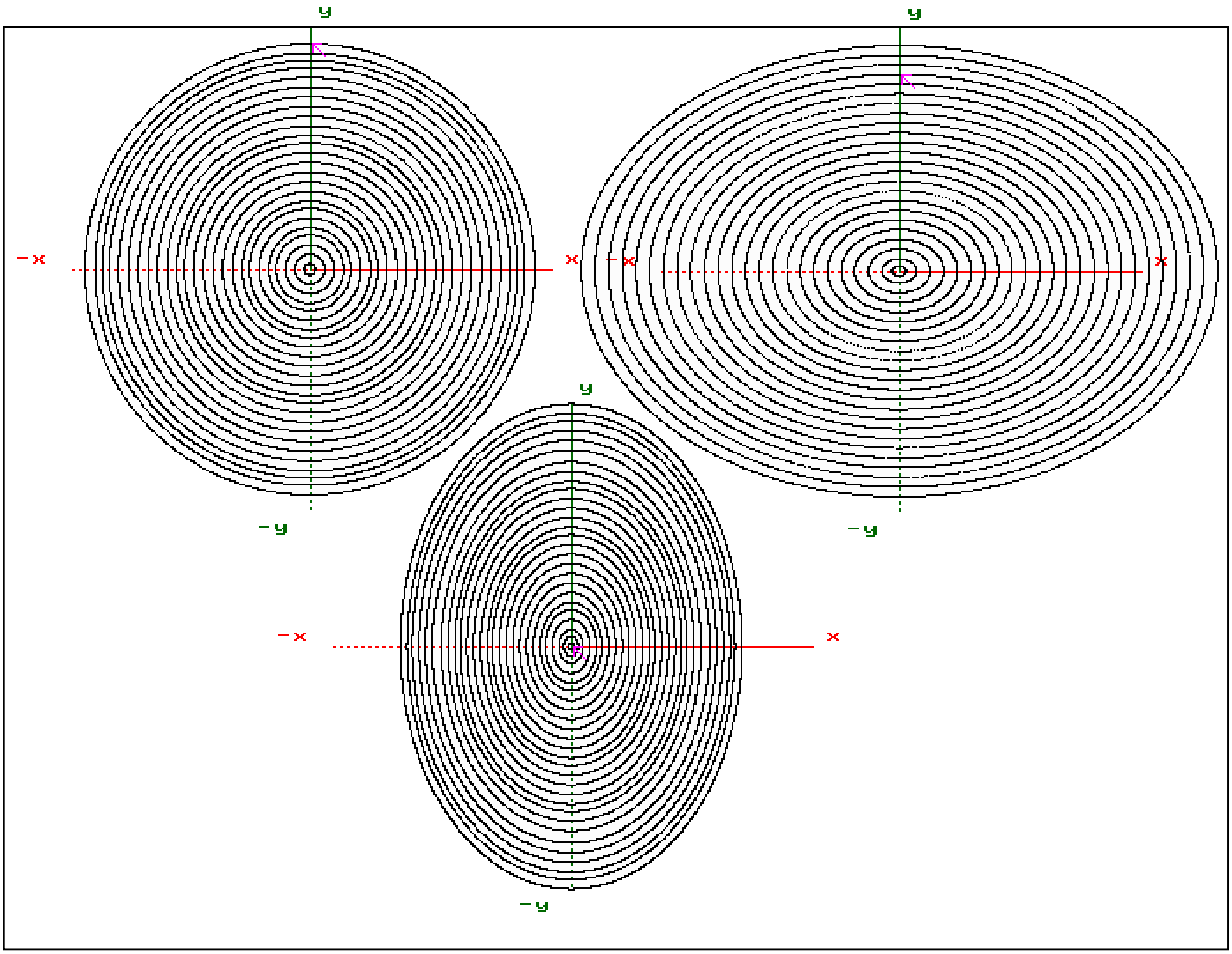
2.- Mover al origen: Mueve el cursor al origen.

3.-Paso del cursor: Nos permite dar el valor del paso para cada una de las coordenadas.

4.-Incremento del paso: Nos permite dar valores para el incremento que usa INTEGRA en cada una de las coordenadas del espacio de estados

5.-No ver coordenadas: En la caja de información de la parte inferior de la pantalla se muestran tanto las coordenadas como el paso, esta opción activa o desactiva dicha opción.

Ahora podemos seleccionar un par de condiciones iniciales y permitir a INTEGRA que dibuje las trayectorias en el espacio de estados para distintas condiciones. Como ya se mencionó, las únicas trayectorias posibles son elipses concéntricas al origen y se muestra en la siguiente figura,

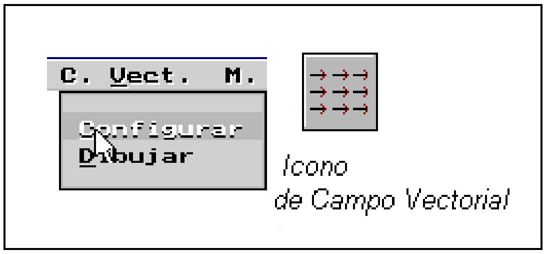


Trayectorias en el espacio de estados para valores 0.5,1 y 1.5 del parámetro "a" del Oscilador Armónico.

Las trayectorias en el espacio de estados del sistema corresponden a soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales.

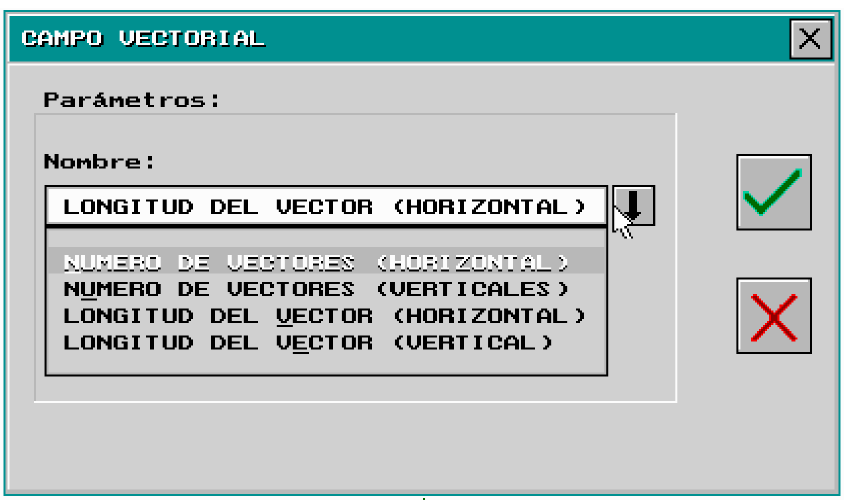
Muchas veces al hacer el análisis de un sistema de ecuaciones diferenciales dado es útil conocer el "campo vectorial" asociado a las ecuaciones. INTEGRA permite dicha visualización, utilizando la opción "campo vectorial" o bien haciendo uso del icono de acción.

En la siguiente figura se muestra el menú que aparece al seleccionar la opción "Campo vectorial", así como el icono de acción, que permite dibujar dicho campo vectorial; mientras que en el menú de "Campo vectorial" aparecen dos opciones: "Configurar" (que se describe más abajo) y "Dibujar", ésta última ejecuta la misma acción que el icono de la barra de herramientas.



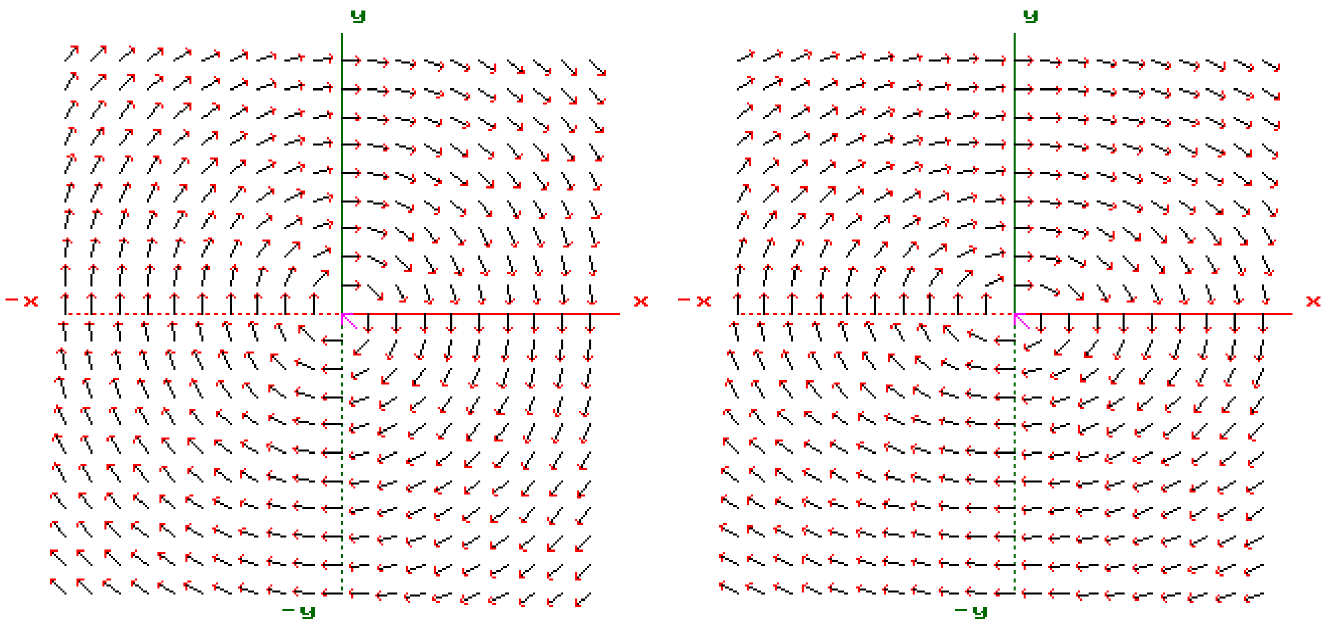
Al seleccionar "Configurar", aparece una nueva ventana de opciones de configuración para el dibujo del campo vectorial, como lo muestra la siguiente ventana.

Como se puede ver en la figura anterior INTEGRA permite modificar los parámetros para dibujar el campo vectorial, eligiendo el número de vectores a pintar tanto horizontales como verticales, además de la longitud de dichos vectores (tanto horizontales como verticales). Esto se ilustra en la siguiente figura.



Ventana de opciones para modificar los parámetros del campo vectorial.

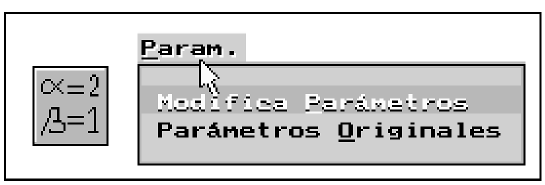
Ahora se muestran algunos campos vectoriales del “oscilador armónico simple”, para diversos valores del parámetro “a”.



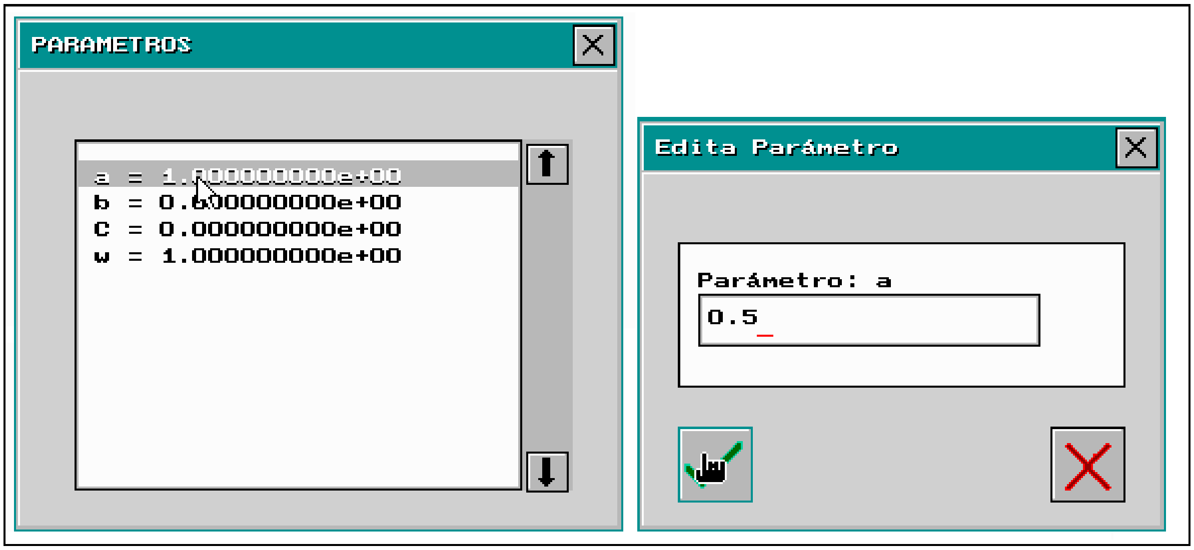
Campos vectoriales obtenidos con INTEGRA para a=1 y a=0.5

Antes de continuar, retomaremos dos puntos mencionados con anterioridad. Primero, al crear el proyecto ***TUTORIAL*** y el sistema ***OSCILADOR LINEAL***, se igualaron los parámetros del sistema a un conjunto de valores (los cuales definen un Oscilador Armónico); al hacer esto se mencionó que estos pueden ser modificados desde el archivo ejecutable y durante esta sección hemos modificado dicho parámetro para obtener distintas imágenes de las trayectorias y campos vectoriales sin mencionar el procedimiento para modificarlo.

Para poder modificar los parámetros de un sistema se puede recurrir a la opción *Param*, *q*ue se encuentra en la parte superior de la pantalla, o bien al icono de parámetros de la barra de herramientas, que se muestra en la siguiente figura junto con el menú de la opción *Param*..

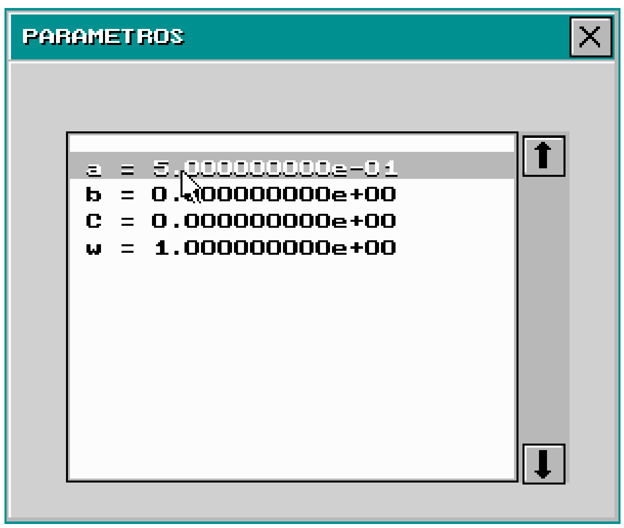


Al presionar el icono o escogiendo la primera opción del menú de *Param*, aparecerá una ventana con los valores actuales de los parámetros, los cuales pueden ser modificados haciendo “click” sobre el valor de parámetro que se quiera modificar e introduciendo el nuevo valor. La siguiente figura muestra dicha ventana.



Ventana de modificación de parámetros.

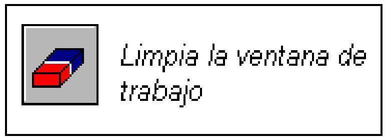
Ya que se ha editado el parámetro deseado y se ha aprobado el nuevo valor, aparecerá la ventana de parámetros con los valores actualizados, la cual se muestra a continuación.



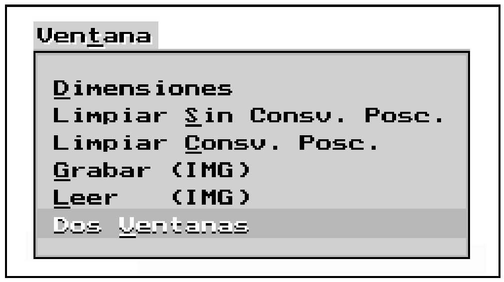
La otra opción de menú para la edición de parámetros permite restablecer los valores originales de los parámetros del sistema.

Algo que no se ha hecho notar es que, una vez que se ha trazado un campo vectorial o alguna trayectoria (o ambas, lo cual se puede hacer en la misma pantalla siguiendo los procedimientos anteriores) y se desea borrar de la pantalla, los gráficos obtenidos para generar unos nuevos (por ejemplo si cambiamos los parámetros y queremos ver el nuevo campo vectorial generado por los nuevos valores, debemos utilizar el icono “borrador” de la barra de herramientas, el cual limpiará totalmente la ventana de trabajo, o bien, utilizar la opción “Ventana” que desplegará un menú con diversas opciones entre las cuales se incluye la de limpiar la ventana de trabajo, así como otras que se describirán más adelante.

En la siguiente figura se muestra el icono “borrador”.



Anteriormente, se mencionó que todas las soluciones del Oscilador Armónico simples son funciones periódicas, ahora expondremos cómo generar gráficas de los cursos temporales con INTEGRA: debemos seleccionar la opción *Ventana*, que desplegará el siguiente menú.



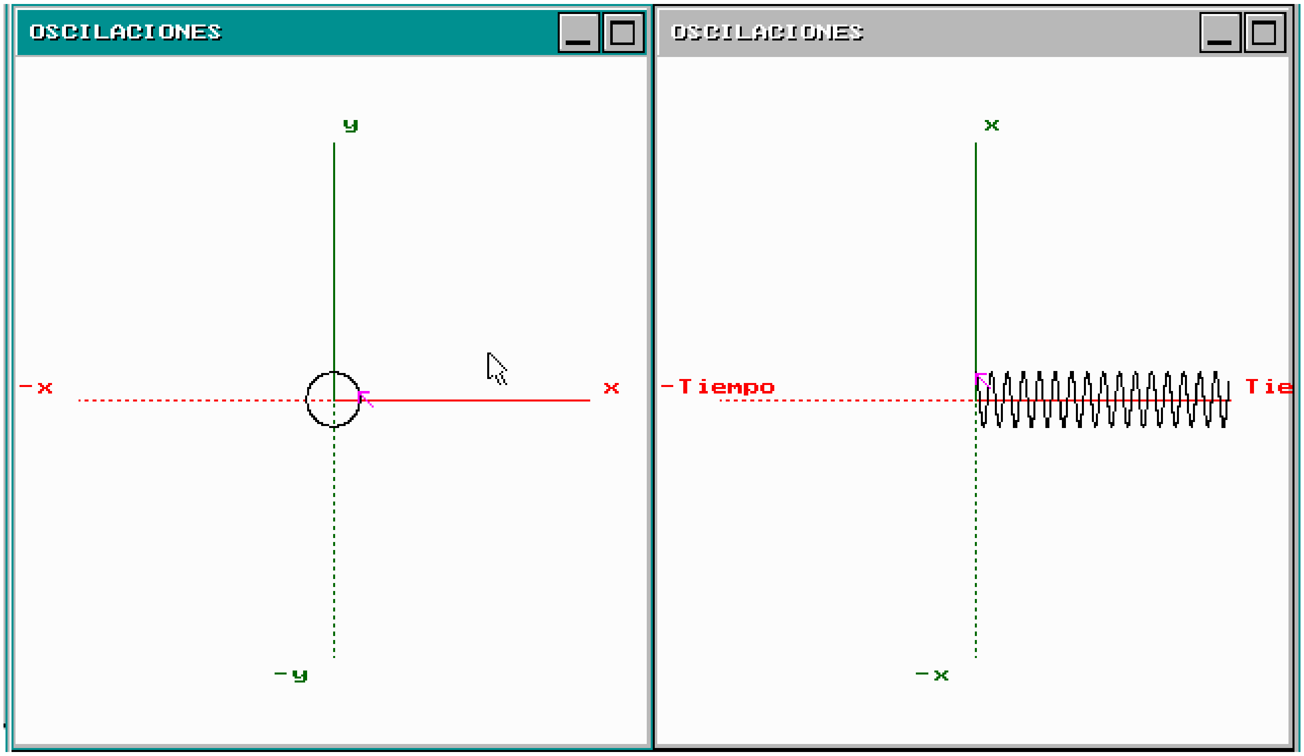
Menú de la opción Ventana

Al desplegarse el menú aparece la opción "Dos ventanas" que al ser seleccionada dividirá la ventana de trabajo en dos ventanas: una será la ventana usual que albergará al espacio de estados, mientras que la otra, será una ventana que albergará un par de ejes coordenados etiquetados con la variable "t" en el eje de las abscisas; el eje de las ordenadas corresponderá a "x" (en general a alguna de las variables del sistema).

Para generar la gráfica de "x" como función del tiempo, hay que seleccionar una condición inicial de la misma forma en que se eligen en el espacio de estados e integrar (como se indicó con anterioridad). INTEGRA generará las gráficas en ambas ventanas al mismo tiempo.

Limpiar las ventanas de trabajo se hace de igual manera que el espacio de estados; se limpiarán ambas ventanas.

En la siguiente figura se ilustran tanto una trayectoria en el espacio de estados como su correspondiente curso temporal, obtenidos con INTEGRA para el "oscilador armónico simple" para una pareja de condiciones iniciales.



Trayectoria en el espacio de estados y curso temporal del Oscilador Armónico simple correspondientes a una pareja (x_0,y_0) que corresponden a un tiempo t_0.

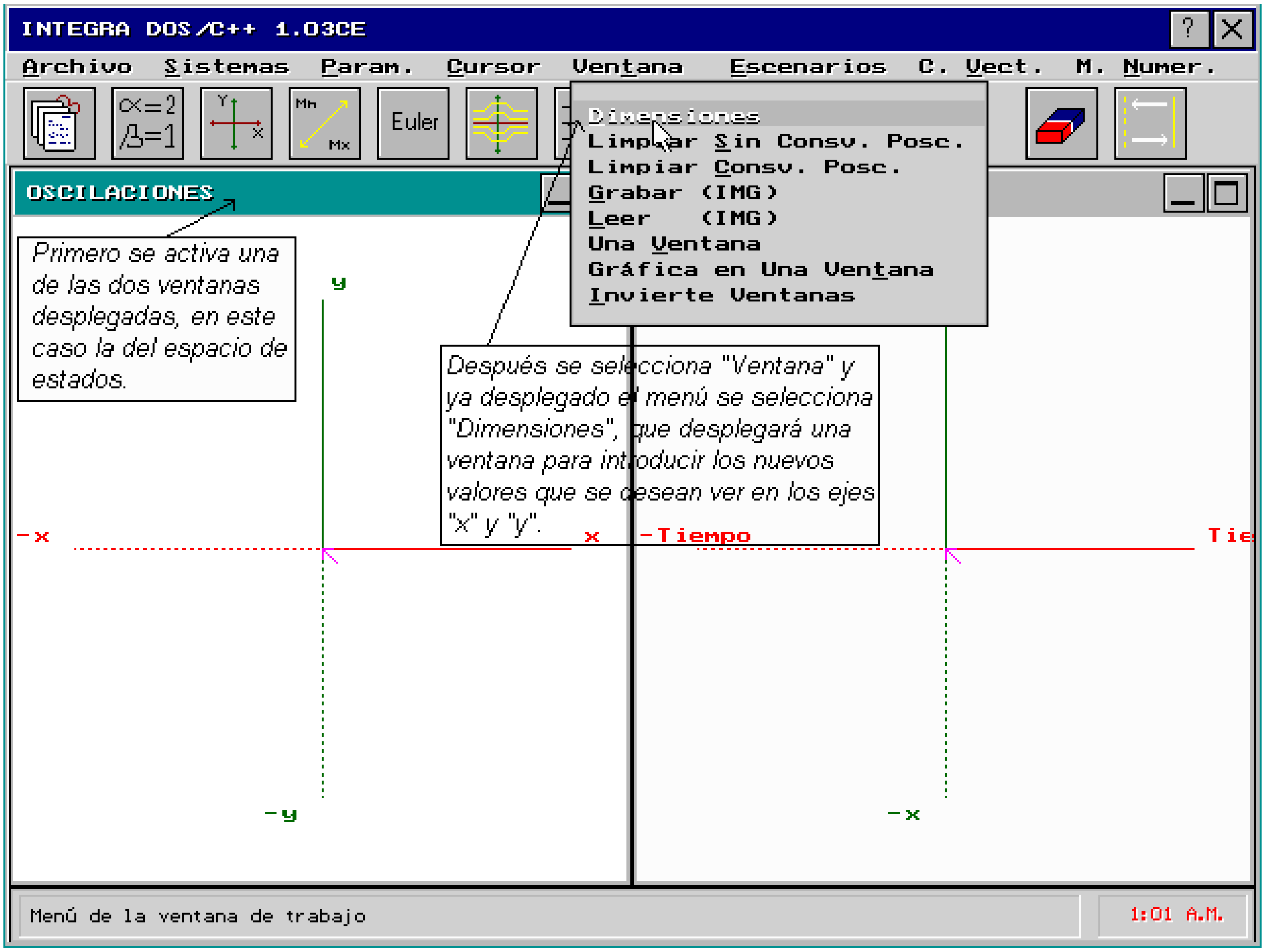
Al desplegarse dos ventanas de trabajo tienen el encabezado de color distinto, esta diferencia de color nos indica cuál de las dos ventanas esta *activada* y cuál no. La ventana que tiene el encabezado de color gris claro es la ventana que se encuentra *inactiva*. La diferencia entre una ventana activa y una inactiva radica en que INTEGRA permite trabajar con cada ventana sin modificar las propiedades de la otra ventana. Basta con hacer "click" sobre una ventana para que ésta se active.

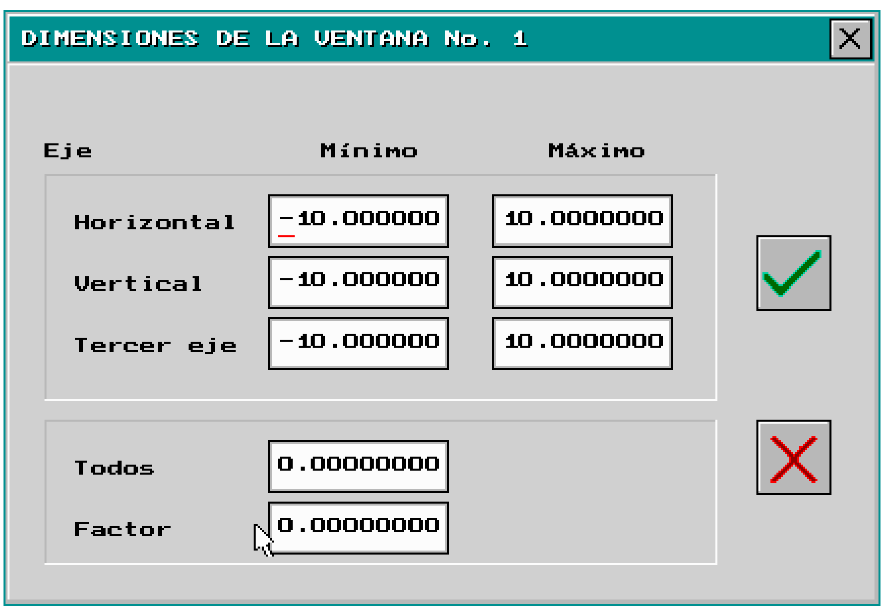
Al hablar de las propiedades de una ventana nos referimos a propiedades de gráficas y de dimensión (tamaño) de la ventana.

Primero veremos cómo modificar las dimensiones de las ventanas, esto es como elegir los intervalos que deseamos ver tanto en el eje "x" como en el eje "y", de igual modo para ventana de cursos temporales.

Una vez que se tenga seleccionada una de las ventanas, por ejemplo la ventana correspondiente al espacio de estados y queremos saber o bien modificar los valores de los intervalos de cada uno de los ejes, lo que debemos hacer es seleccionar la opción *Ventana*, la cual desplegará el menú anteriormente mencionado y seleccionar la opción *Dimensiones;* una vez hecho esto se desplegará una ventana que nos permitirá introducir los valores de los intervalos que deseamos ver. Antes de modificar estos parámetros de dimensión, la ventana muestra los valores actuales de la misma.

La figura siguiente ilustra este procedimiento.

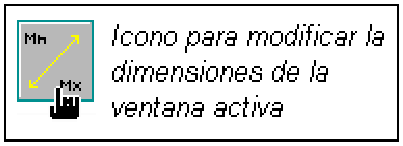




En la ventana de dimensiones, podemos introducir de manera individual (simplemente haciendo "click" en cada casilla) los valores que se desean modificar o dar un valor para todos los extremos de los intervalos con la casilla *Todos*, cuya acción permite que la ventana tenga como límites a y –a donde a es el valor que se introduce.

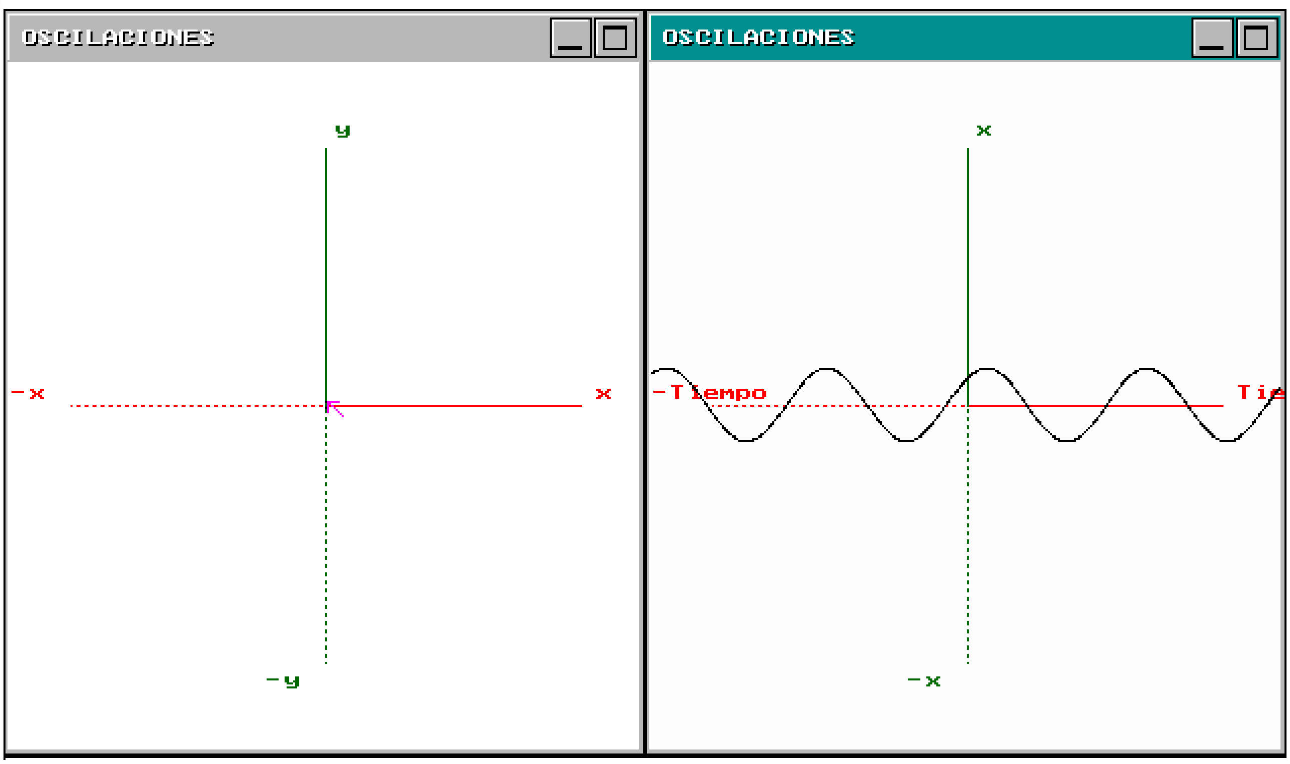
La opción *Factor* es el factor de escala en la ventana, es decir los valores que hemos dado a INTEGRA se multiplicarán por este número. Si no modificamos los valores de *Todos* y *Factor* aparecerán con el valor predeterminado cero. De forma análoga se modifican las dimensiones de la ventana de "cursos temporales".

Otra manera de modificar las dimensiones de la ventana activa es con el icono de acción que se muestra a continuación.



Otra herramienta importante del menú desplegado *Ventana*, es *Gráfica en una ventana*, que nos permite graficar solamente en la ventana activa, manteniendo la otra ventana sin alterarse; por ejemplo generemos un curso temporal, sin dibujar nada en la ventana del espacio de estados:

Activando la ventana de espacio de estados y seleccionado *Gráfica en una ventana*, integramos y la gráfica que se generará solo será el curso temporal.



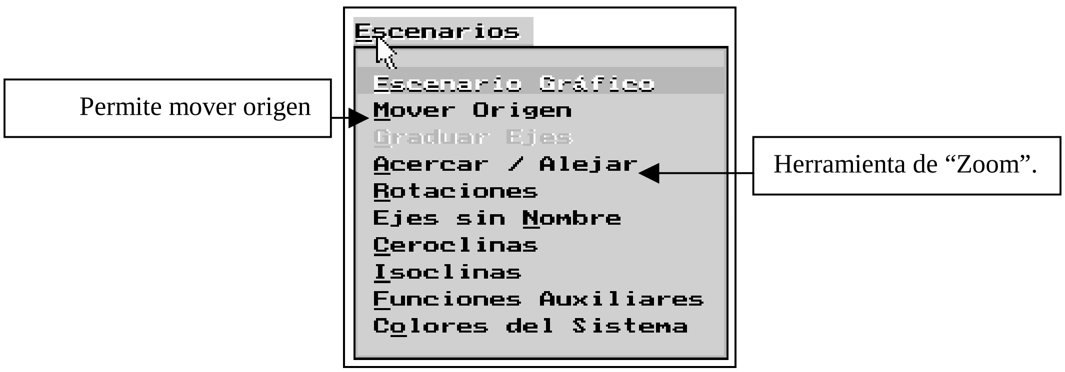
Para finalizar ésta sección, discutiremos el funcionamiento de un par de herramientas de visualización, muy útiles en el análisis de las gráficas generadas con INTEGRA y son: "mover origen" y "acercar/alejar", que sólo funcionan sobre la ventana del espacio de estados.

La opción “mover origen” (del menú *Escenarios*)permite al usuario mover el origen del espacio de estados (que originalmente se encuentra en el centro de la pantalla) a cualquier otra ubicación dentro de la misma ventana, sin embargo los ejes coordenados dibujados nunca podrán salir de la ventana. Una vez activada esta herramienta el origen se mueve utilizando las flechas del teclado.

La opción “Acercar/Alejar” es una herramienta de “zoom” que se activa (al igual que la herramienta “mover origen”) en la opción *Escenarios*.

Para acercar y alejar el origen empleamos las teclas “+” para acercar y “-“ para alejar.
Una vez que se han activado estas herramientas se puede terminar su uso de al presionar la tecla “ESC”,

A continuación se muestra el menú *Escenarios*.



En ésta sección se ha presentado una visión muy general del manejo de INTEGRA al tiempo que analizamos la dinámica del Oscilador Armónico. Algunas de las herramientas no han sido descritas, pero pueden ser exploradas por el usuario sin dificultad alguna, o bien se puede encontrar una descripción completa en el manual del usuario del sistema INTEGRA.

En la siguiente sección presentaremos algunos resultados para los dos sistemas que forman parte del proyecto que se ha generado. En primer lugar, lo hacemos para el ***OSCILADOR LINEAL*** (para valores de parámetros en general) y después para el sistema ***PENDULO***.

3.2-OSCILACIONES LINEALES Y EL PÉNDULO.

Reconsideremos las ecuaciones del sistema que modelan al oscilador lineal:

$$x'=y$$
$$y'=-ax-by+C\cos(wt)$$

3.21-Oscilaciones libres amortiguadas.

Empezaremos el análisis anulando el término correspondiente al forzamiento y tomando en cuenta la fricción, es decir C=0 y b>0.

Entonces el sistema es:

$$x'=y$$
$$y'=-ax-by$$

A este sistema se le conoce como el "Oscilador Amortiguado"

La dinámica del sistema queda determinada por la relación que guardan los parámetros a y b, pues al tratarse de un sistema lineal tenemos que la solución general del sistema es:

$$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \quad si\ \lambda_1\neq\lambda_2$$

o bien

$$x(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda t} \quad si \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda$$

Con

$$\lambda_i=\frac{-b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a},\ i=1,2$$

La naturaleza de los λ_i puede ser de dos tipos:

I) λ_i reales, es claro que en este caso siempre son menores que cero.
II) λ_i complejos con parte imaginaria diferente de cero.

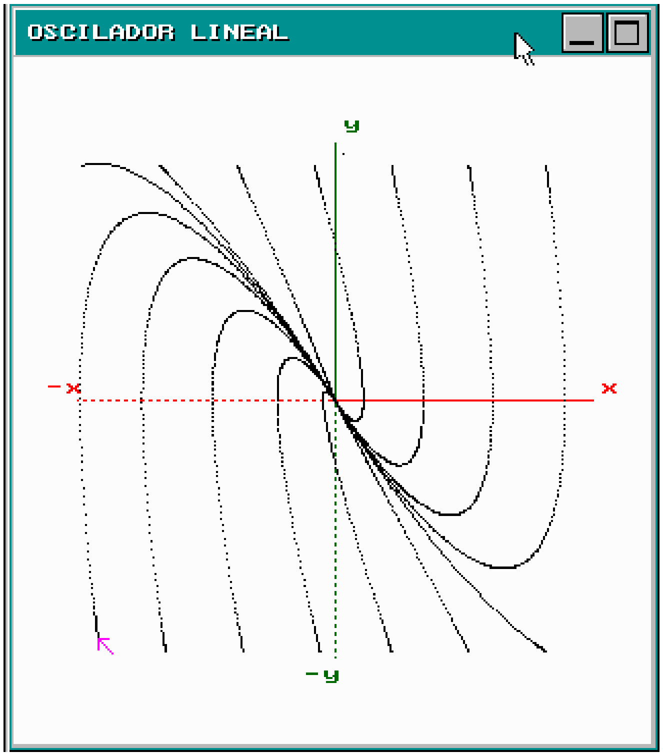
Empezaremos con el caso real, donde podemos tener dos casos distintos

Caso 1a) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, en este caso $x(t)=(C\ +C_2t)e^{\lambda t}$.

Esto solo puede ocurrir si $b^2-4a=0$ entonces $\lambda=(-b/2)$ y $x(t)=(C\ +C_2t)e^{\frac{-bt}{2}}$ ésta función tiende a cero conforme t crece. Veamos que es lo que se obtiene con INTEGRA.

Primero mostramos el espacio de estados del sistema con diversas trayectorias junto con el campo vectorial.

Los valores de los parámetros que se emplearon para los cálculos numéricos fueron a=1 y b=2.



En la figura se muestran las trayectorias en el espacio de estados que se obtienen con I*NTEGRA* para el oscilador lineal con b^2-4a=0. A esta condición se le denomina *"amortiguamiento crítico"*.

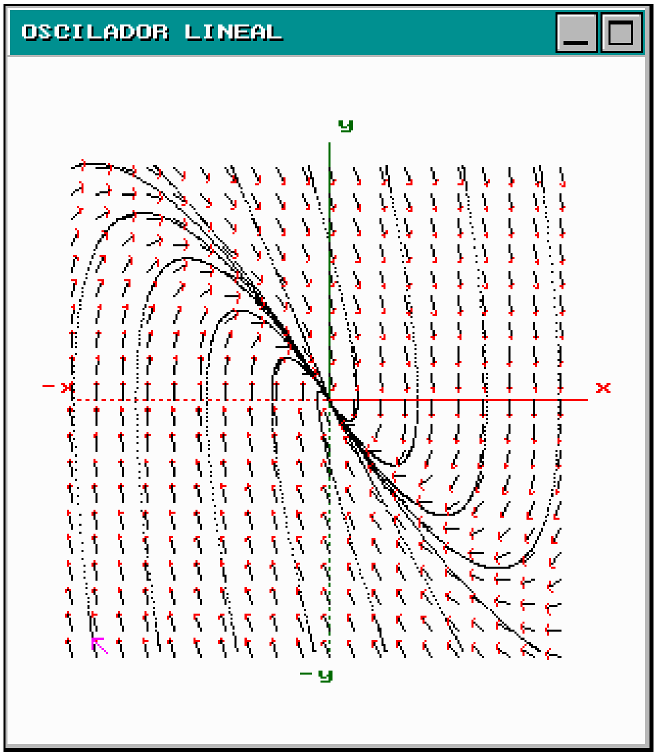
Se observa que las trayectorias convergen al origen, donde está el único equilibrio del sistema, que en este caso es un *"Nodo impropio"*. La figura nos dice que la partícula no oscila pues conforme el tiempo crece su velocidad decrece de manera exponencial y su posición tiende exponencialmente al punto de equilibrio.

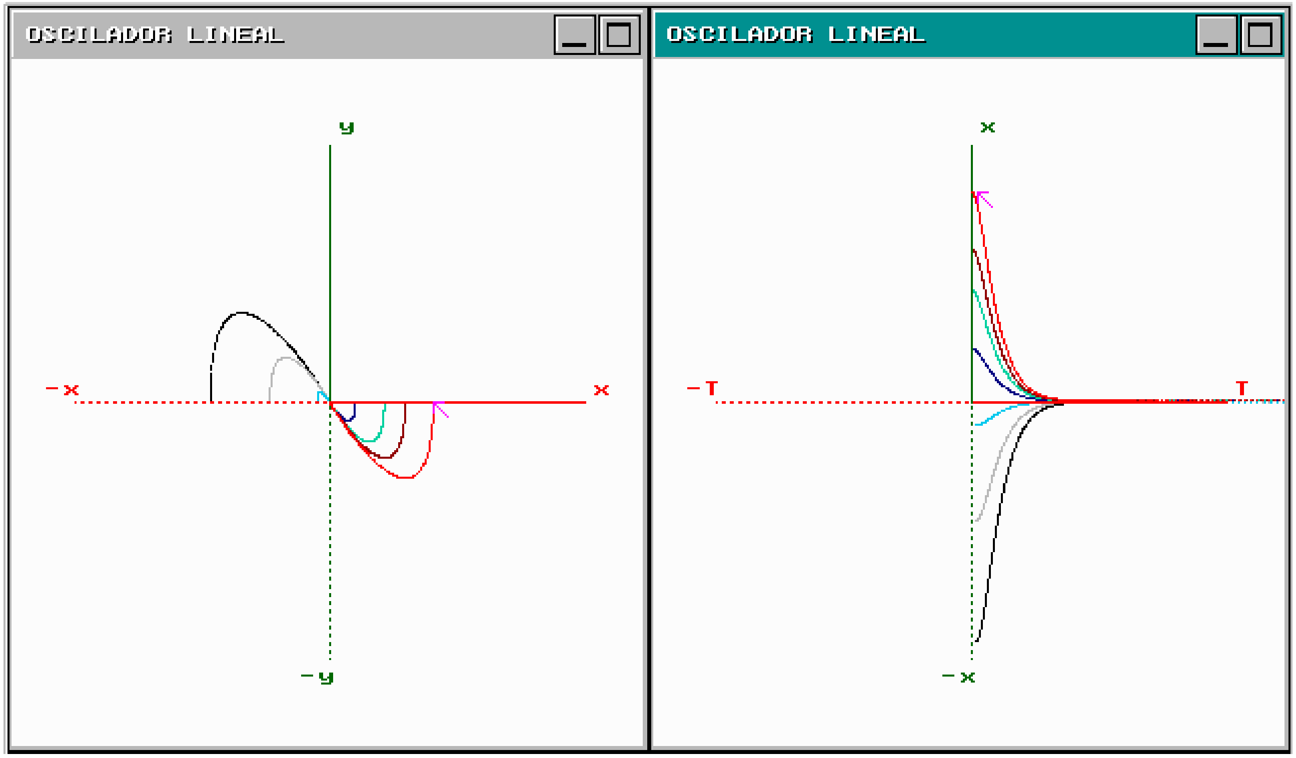
En la figura de abajo se muestran las mismas trayectorias pero también se mira la dirección en la cual son recorridas, pues se muestra también el campo vectorial.

En la página siguiente se muestran trayectorias en el espacio de estados y cursos temporales, para parejas de condiciones iniciales, que hemos generado con un color distinto para cada condición inicial.

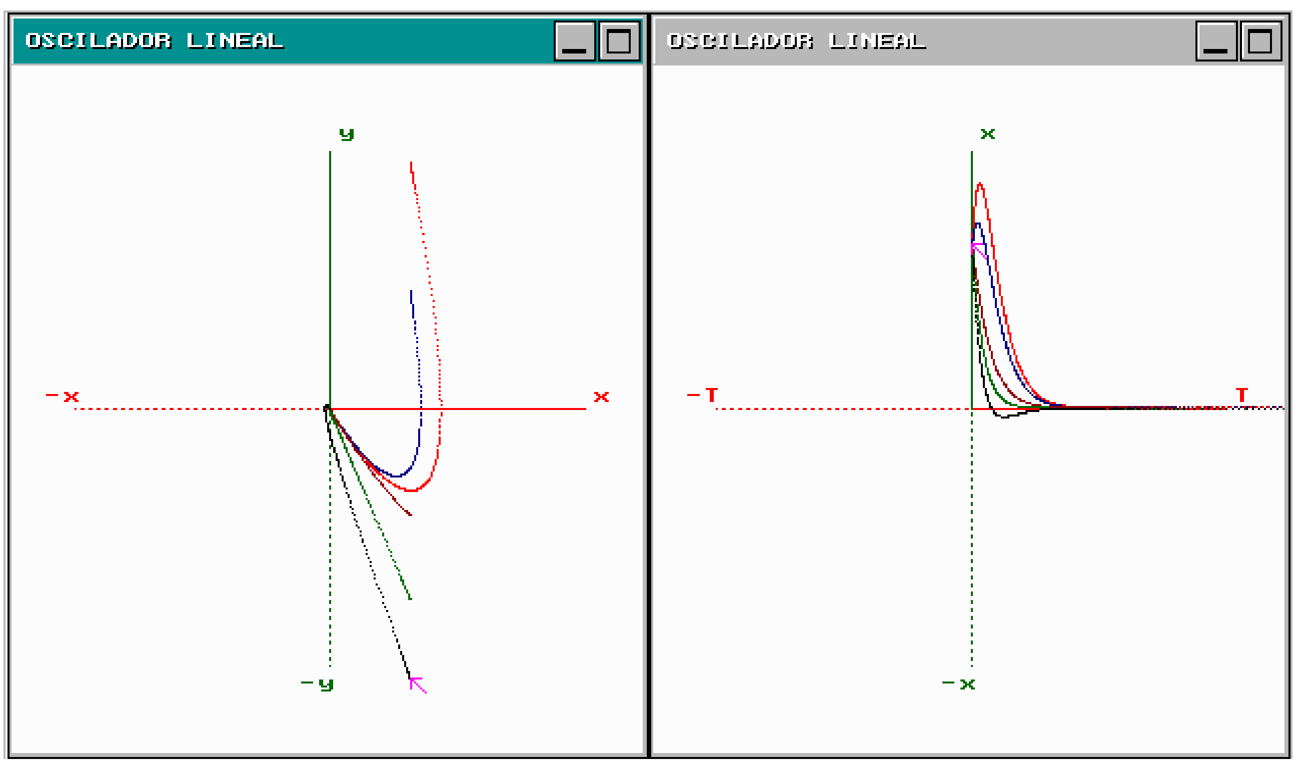
Para hacer esto, se selecciona la opción de *Escenarios* y se elige *Colores de sistema*, donde podemos elegir el color del gráfico, de los ejes y el de las funciones auxiliares.

En la primera figura (de la pág. siguiente) se escogieron diversas posiciones iniciales y velocidades iniciales nulas, en la segunda una sola posición inicial y diversas velocidades.





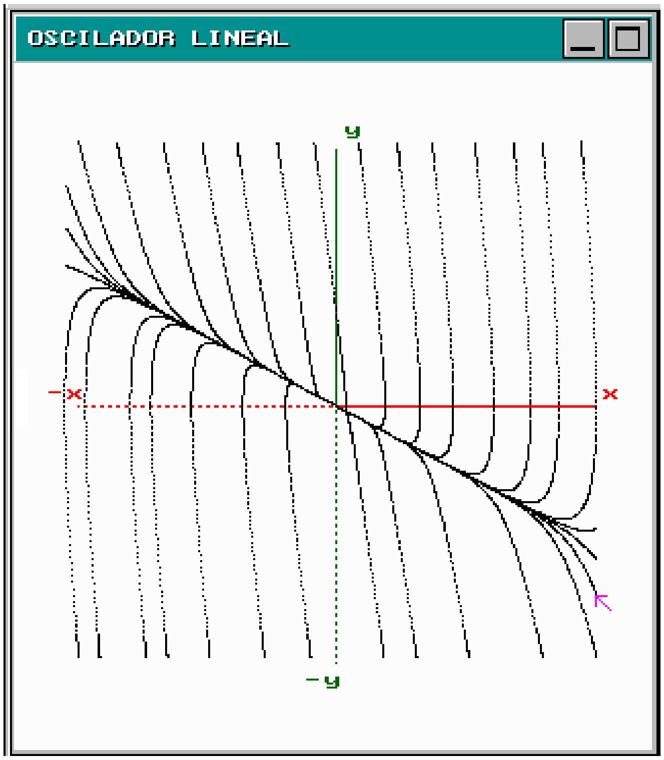
Trayectorias y cursos temporales para diversas posiciones iniciales y velocidades iniciales nulas.



Trayectorias y cursos temporales para una sola posición inicial y diversas velocidades iniciales. Se observa que en algunos casos, si la magnitud de la velocidad inicial es lo suficientemente grande, ésta puede cruzar el equilibrio.

Caso 1b) $0>\lambda_1>\lambda_2$ esto solo ocurre si b^2-4a>0, a esta condición se le conoce como "*superamortiguamiento*". En este caso la solución es:

$$x(t)=C_1e^{(\frac{-b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a})t}+C_2e^{(\frac{-b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a})t}$$

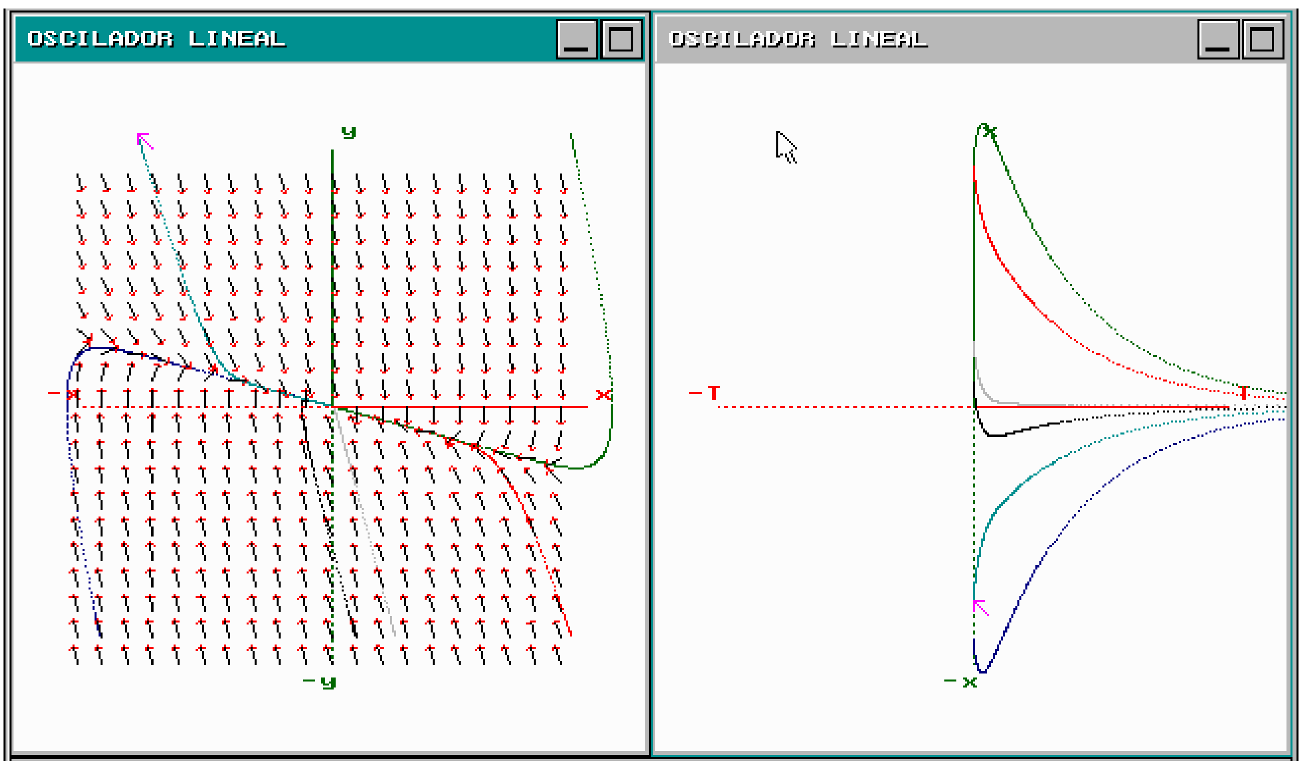


Las soluciones también tienden a cero de manera exponencial conforme el tiempo crece.

En la figura se muestran algunas trayectorias en el espacio de estados obtenidas con INTEGRA, para a=1 y b=4.

Lo que se observa es que el origen que (el único equilibrio) tiene una naturaleza diferente, pues la convergencia de las trayectorias es más rápida, .Ahora el origen es un "Nodo Estable". Tampoco en este caso se presenta una dinámica oscilatoria, aunque también existe la posibilidad de algún cruce por el equilibrio.

En la parte inferior se muestra el campo vectorial y algunas curvas en el espacio de estados, así como cursos temporales para algunas parejas de condiciones iniciales, donde se ilustra que no hay oscilaciones.



.

Caso 2) Aquí veremos qué se obtiene para el caso complejo, esto ocurre si $b^2-4a<0$, en ese caso tenemos que

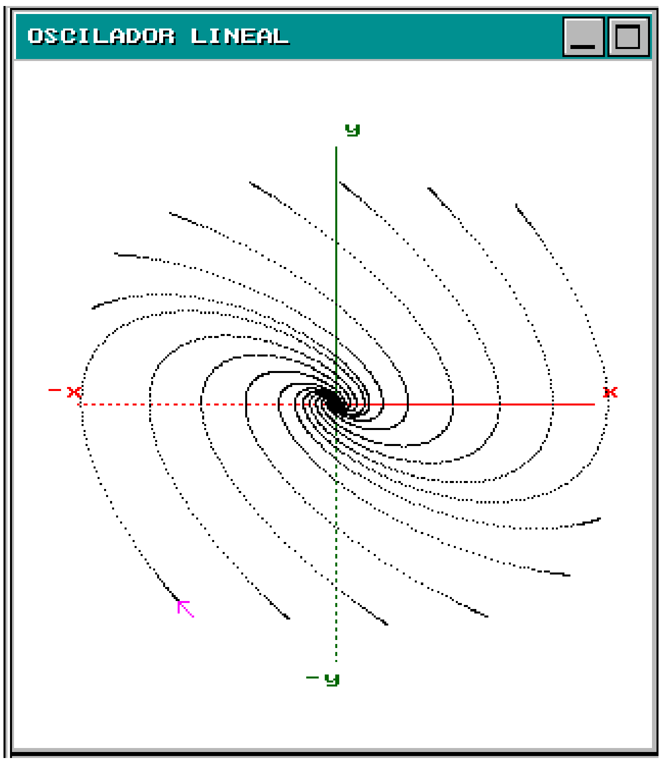
$$\lambda_1 = \frac{-b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a} = \alpha + i\beta \quad y \ \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$$

En este caso la solución general puede escribirse de la forma:

$$x(t)=Ce^{\alpha t}\cos(\beta t+\delta)$$

Esta solución es una función tiene una amplitud que tiende a cero conforme el tiempo crece, sin embargo sí oscila en torno a la posición de equilibrio.

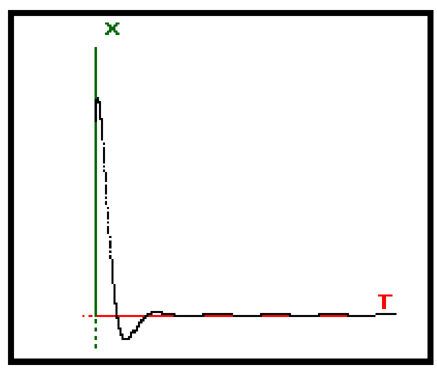
Utilizaremos a=0.5 y b=0.8 para generar la siguiente figura en el espacio de estados.



Aspecto típico del espacio de estados en el caso de valores propios complejos. Como se mira en la ilustración, sí existen oscilaciones en torno al equilibrio, pero la amplitud de éstas decae exponencialmente con el tiempo.
Este caso se conoce como el *"Oscilador Subamortiguado"*.

El equilibrio es un *foco estable*.

Abajo presentamos el aspecto de un curso temporal.



Trayectorias en el Espacio de Estados. A la derecha, curso temporal para el caso complejo.

Con esto hemos terminado la sección de Oscilaciones Libres Amortiguadas.

En la siguiente sección trataremos el sistema con el término de forzamiento no nulo.

3.22-Oscilaciones Armónicas Forzadas

Primero exploraremos el caso del Oscilador Armónico Forzado, es decir el sistema:

$$x' = y$$
$$y' = -ax + C\cos(wt)$$

Al tratarse de un sistema afín, la solución general del sistema es una función de la forma:

$$X(t) = X_h + X_p$$

Donde Xh es la solución del sistema homogéneo (en este caso el Oscilador Armónico) y Xp una función que resuelva de manera particular el sistema afín.

En el caso del oscilador armónico forzado la solución general es:

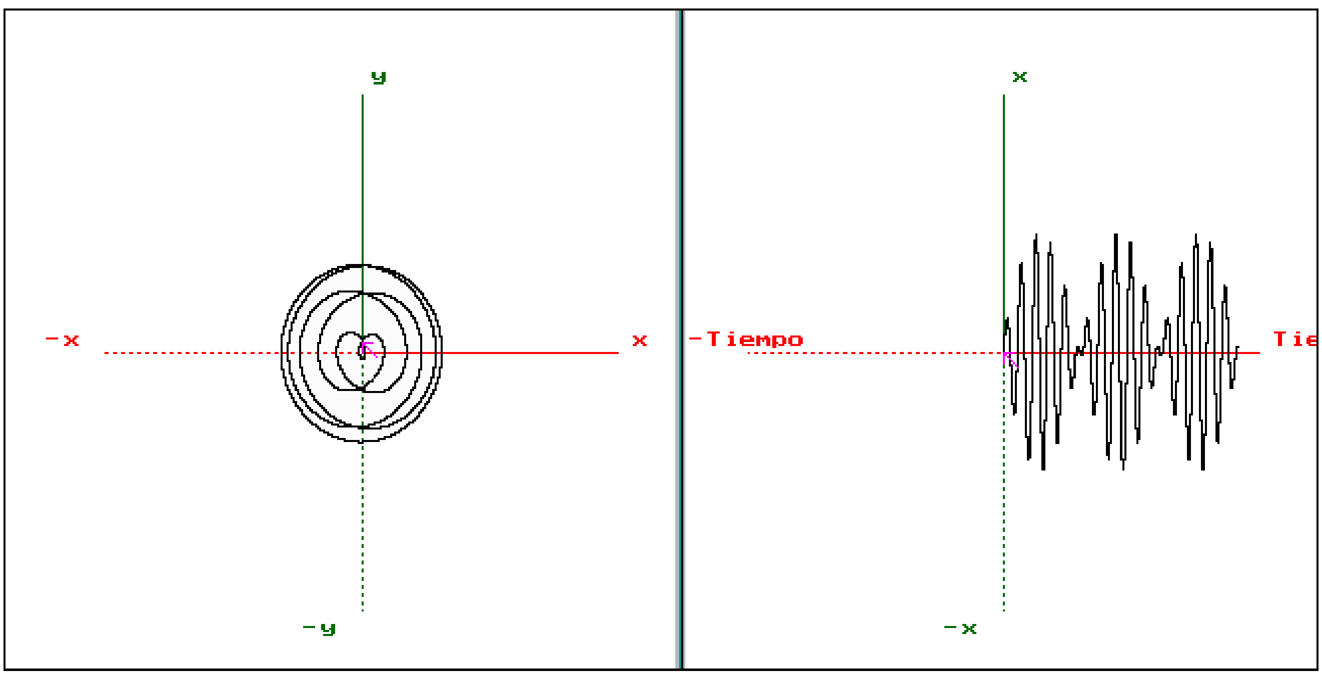
$$X(t) = C_1\cos(\sqrt{a}\,t + \phi) + \left(\frac{C}{a - w^2}\right)\cos(wt)$$

Que podemos escribir como:

$$X(t) = C_1\cos(\sqrt{a}\,t) + C_2\operatorname{sen}(\sqrt{a}\,t) + \left(\frac{C}{a - w^2}\right)\cos(wt)$$

Esta solución se encuentra bajo la hipótesis de que $a \neq w^2$.

Observemos que es lo que se obtiene con INTEGRA para los valores de w=1.2 a=1 y C=1.



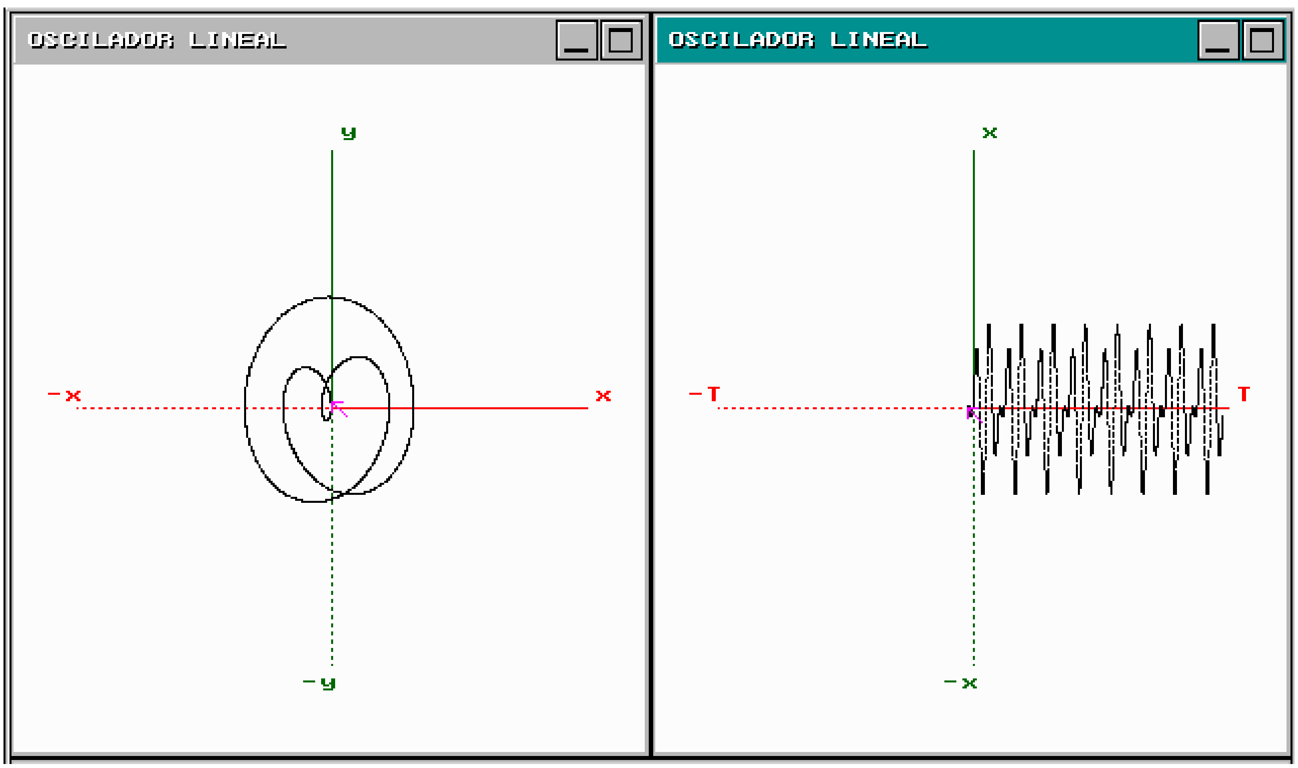
Lo que se observa es una órbita cerrada y un curso temporal ¿periódico? Aparentemente "envuelto" en otra función que pareciera "senoidal". Lo que ocurre es lo siguiente: En la solución general los dos primeros términos son funciones periódicas de frecuencia $\sqrt{a}$, mientras que el tercer término (también es una función periódica) de frecuencia w; entonces la única forma para que la solución sea periódica, es que las frecuencias de ambas funciones sea cantidades conmensurables es, decir que ($\sqrt{a}$ /w)=p/q con p y q enteros. La amplitud envolvente se da para frecuencias cercanas, pero en general miraremos amplitudes que varíen periódicamente en el tiempo, por ejemplo si obligamos a que la solución cumpla con que X=Y=0 para to=0, encontramos que:

$$x(t)=\frac{C}{(a-w^2)}\,sen\left(\frac{(a+w)t}{2}\right)sen\left(\frac{(a-w)t}{2}\right)$$

De ahí se mira que la frecuencia más grande es (a+w)/2 y que la amplitud es una función periódica dada por:

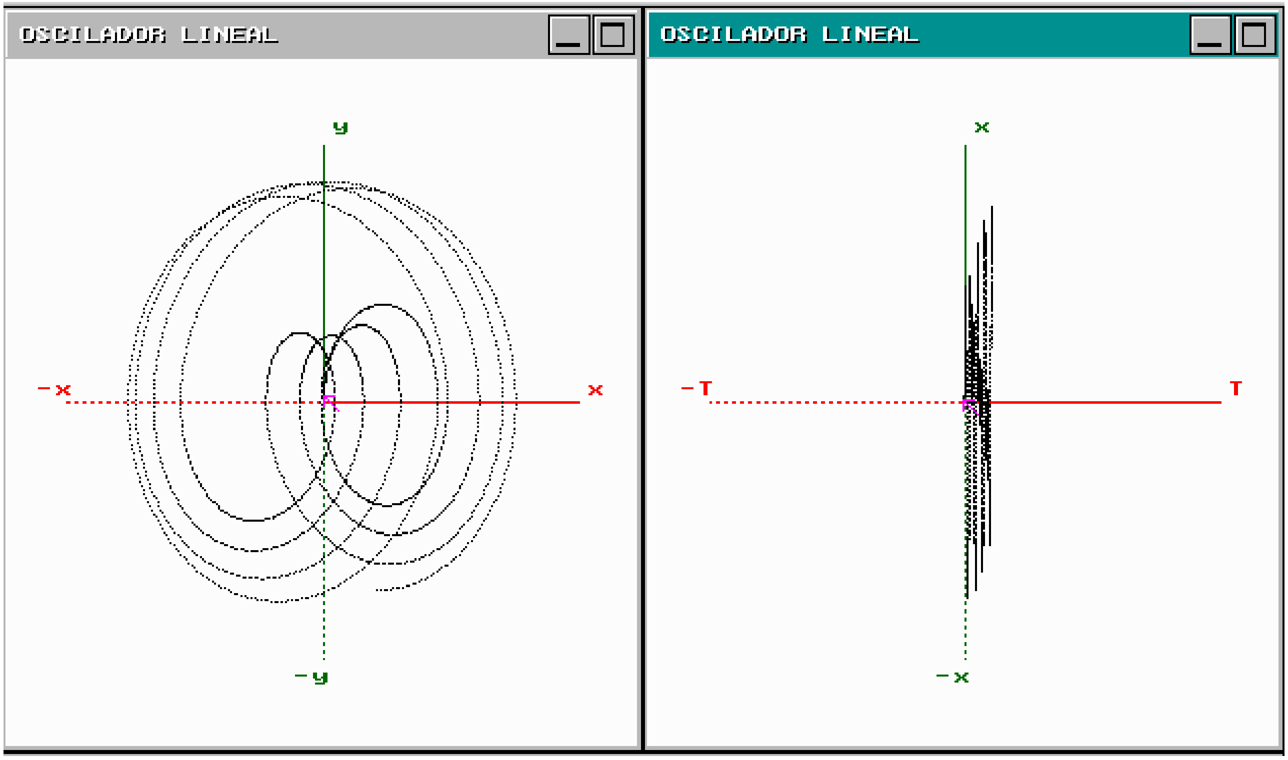
$$\frac{C}{(a-w^2)}\,sen\left(\frac{(a-w)t}{2}\right)$$

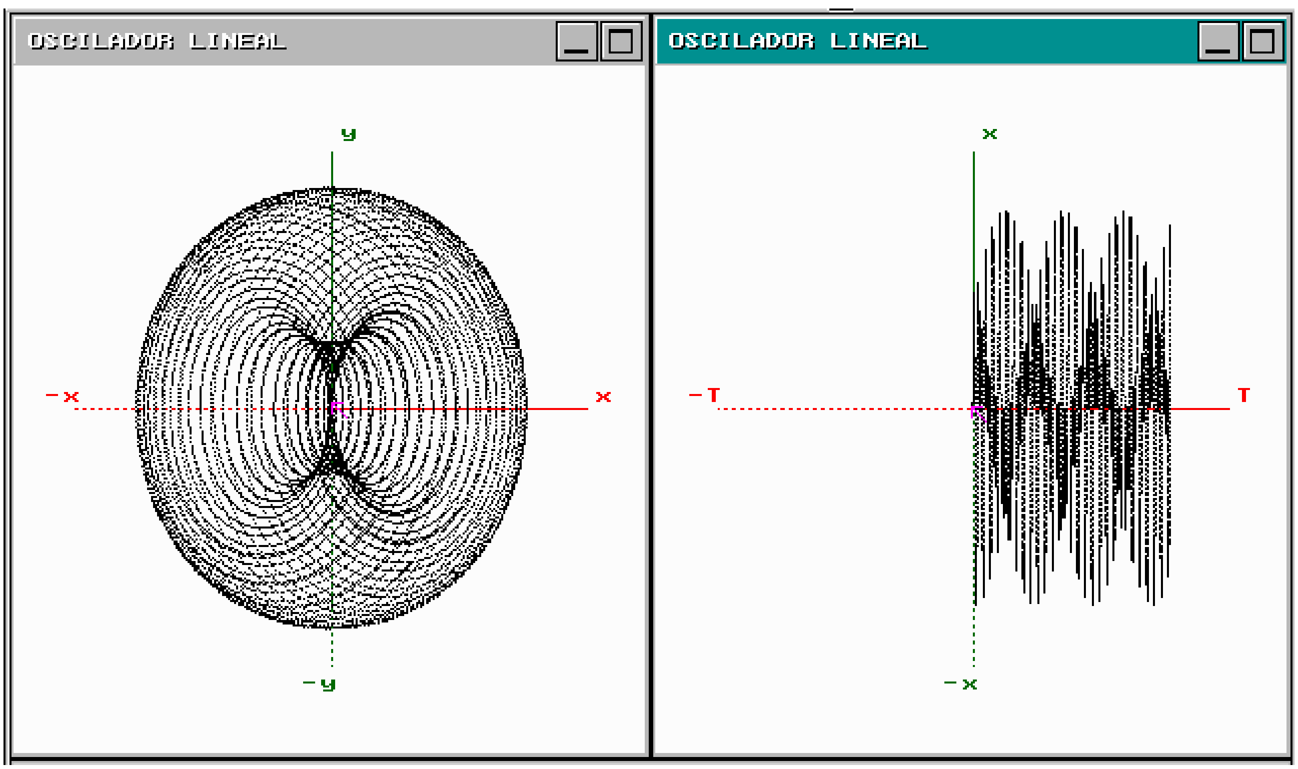
A continuación mostraremos algunas trayectorias junto con su correspondiente curso temporal.

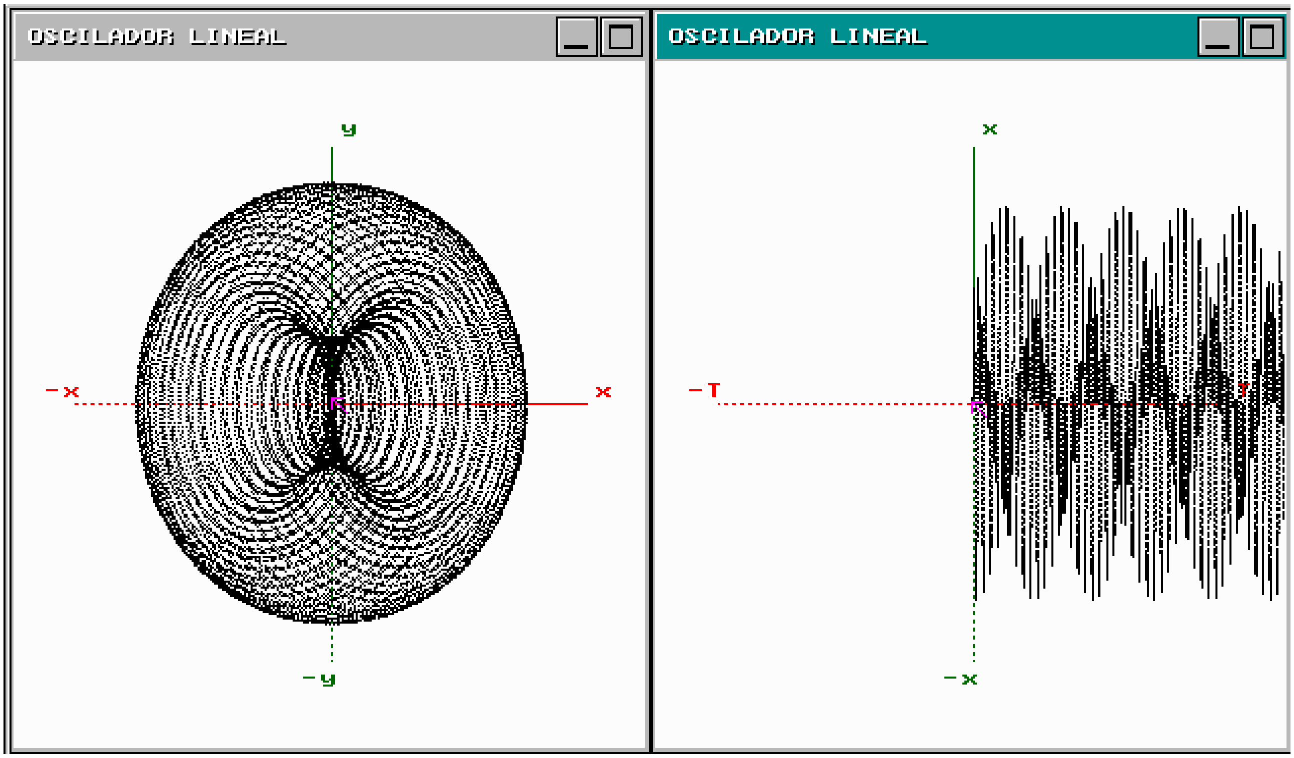


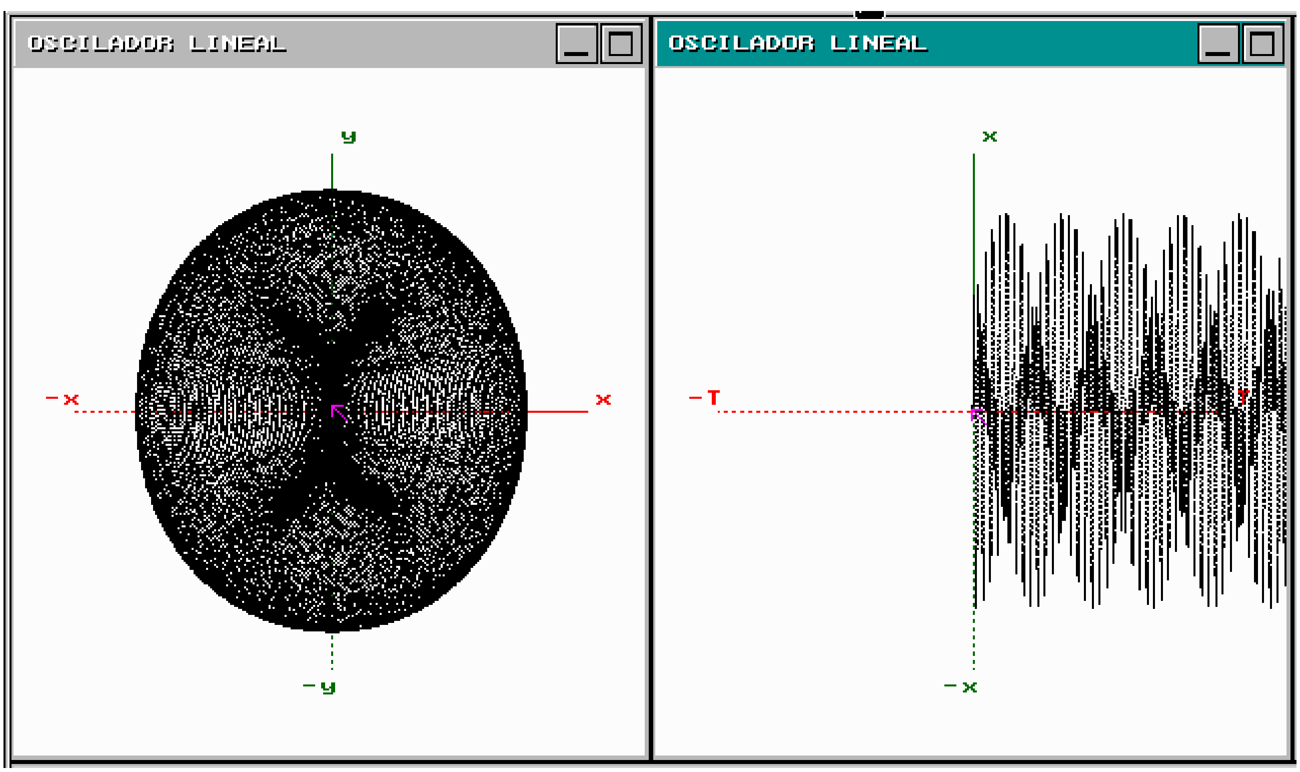
Trayectoria en el espacio de estados y curso temporal para a=1 w=1.5

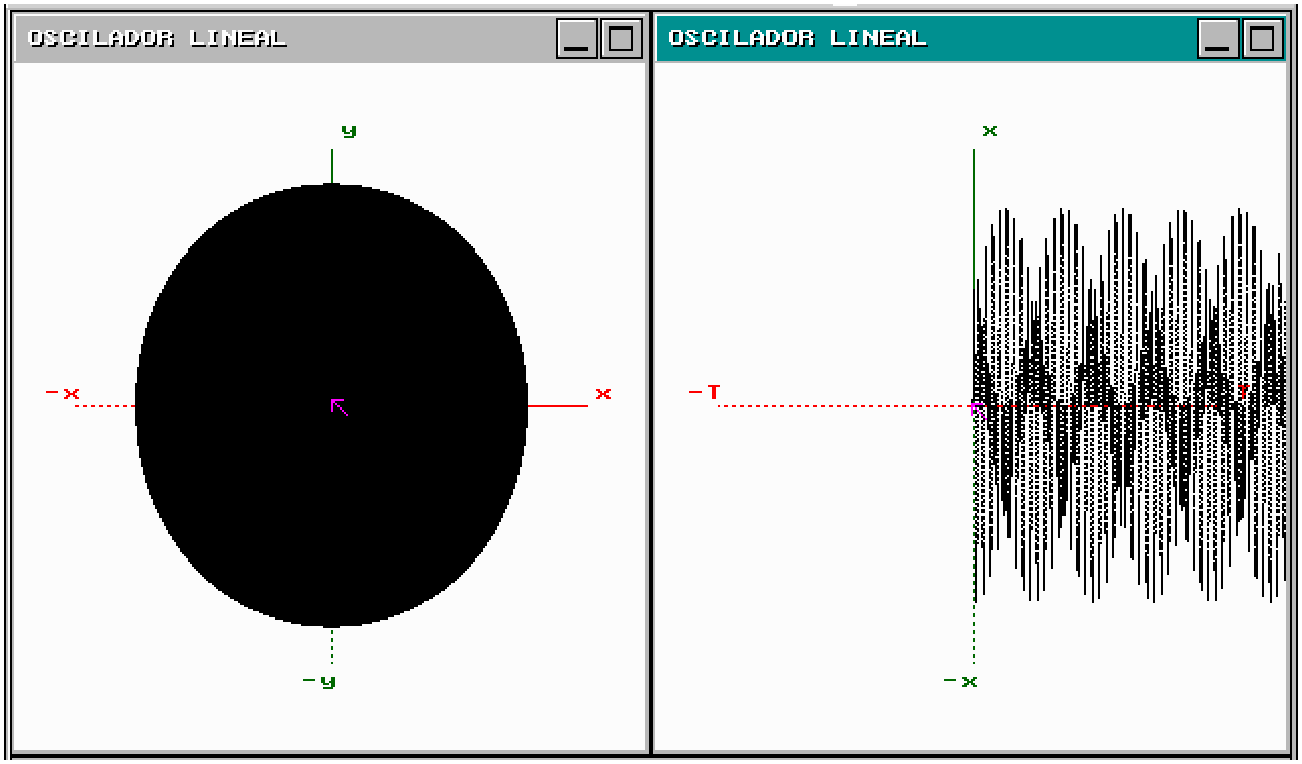
A continuación mostramos una secuencia para los valores a=0.24 y w=0.26 donde observamos aperiodicidad, pues conforme el tiempo crece la curva en el espacio de estados no se cierra: ésta empieza a llenar totalmente un área acotada por la amplitud de la envolvente.


OSCILADOR LINEAL
y
-x
x
-y
OSCILADOR LINEAL
x
-T
T
-x


OSCILADOR LINEAL
y
-x
x
-y
OSCILADOR LINEAL
x
-T
T
-x


OSCILADOR LINEAL
y
-x
x
-y
OSCILADOR LINEAL
x
-T
-x


OSCILADOR LINEAL
y
-x
x
-y
OSCILADOR LINEAL
x
-T
-x



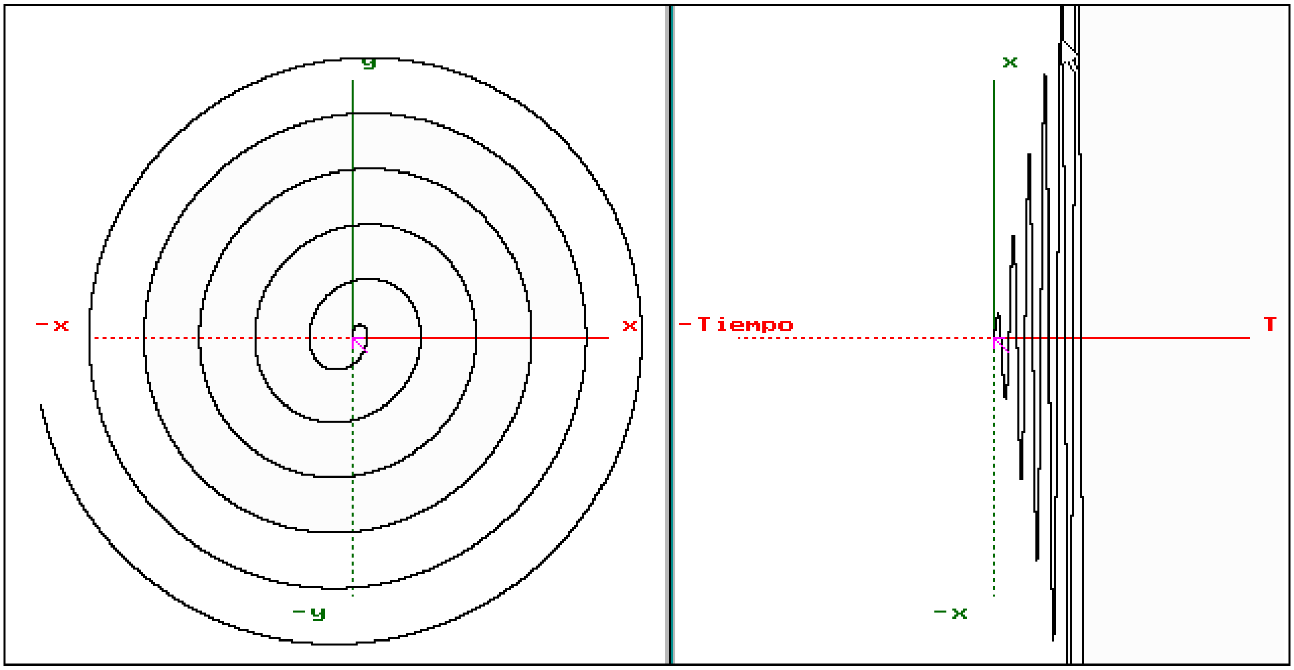
Con la secuencia anterior hemos terminado el análisis para el caso de frecuencias diferentes.

Ahora supondremos que $a=w^2$. En este caso la solución está dada por

$$X(t)= A\cos\left(\sqrt{a}t+\delta\right)+\left(\frac{Ct}{2}\right)sen(wt)$$

La amplitud de las oscilaciones crece linealmente con el tiempo, a este fenómeno se le llama *resonancia*. Tal vez sea el resultado más interesante del oscilador armónico forzado, ya que indica que no se necesitan fuerzas grandes para provocar una gran oscilación, basta con aplicar pequeñas fuerzas con una frecuencia adecuada.

A continuación se muestra una trayectoria en el espacio de estados junto con su correspondiente curso temporal con (0,0) como condición inicial y a=0.25,w=0.5,C=1.



Espacio de estados y curso temporal para frecuencias iguales y (0,0) como condición inicial.

Con esto concluimos el análisis para el oscilador armónico forzado periódicamente. Hasta el momento se ha logrado ver que los resultados obtenidos con INTEGRA concuerdan con lo que se obtiene teóricamente.

3.23-Oscilaciones amortiguadas con Forzamiento Periódico.

Para terminar con el oscilador lineal consideraremos el caso con todos los parámetros mayores que cero.

$$x' = y$$
$$y' = -ax - by + C\cos(wt)$$

Como mencionamos en la sección anterior tenemos que la solución del sistema afín es de la forma.

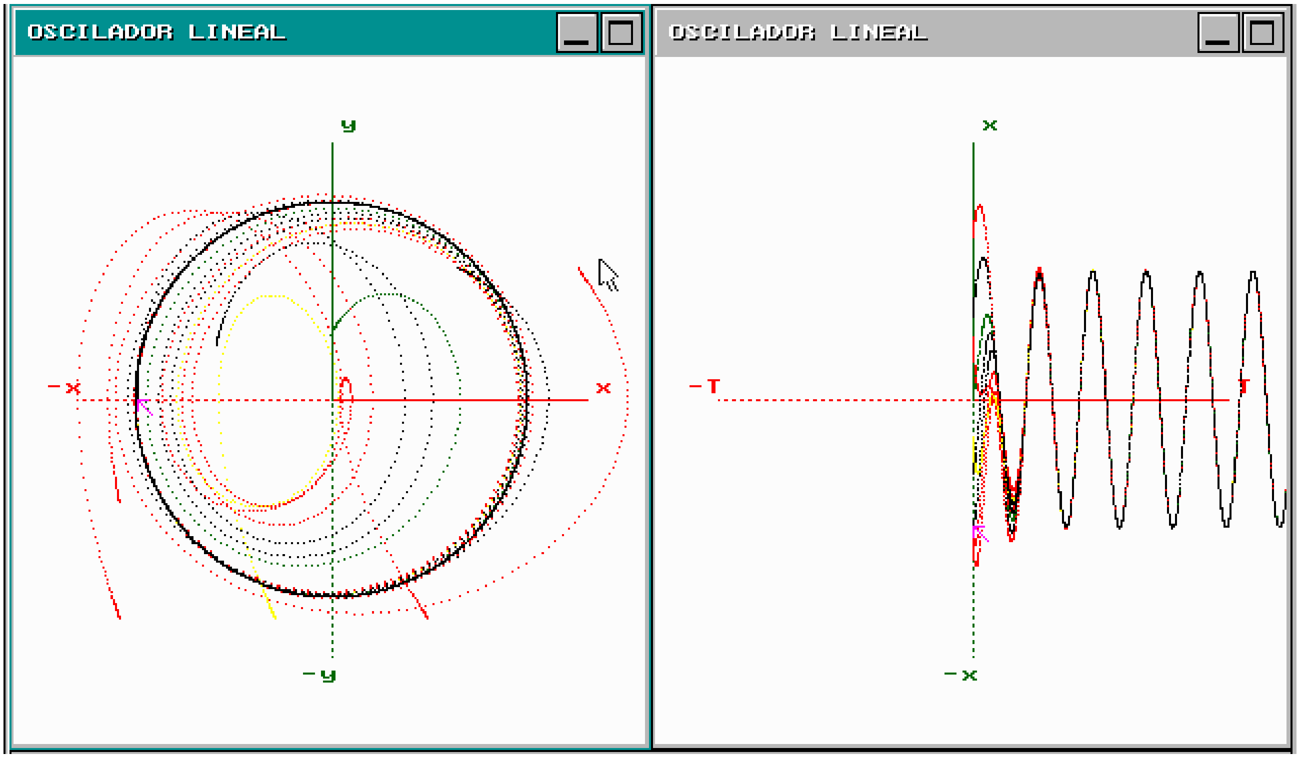
$$X(t) = Xh + Xp$$

La solución Xh para el caso amortiguado se desvanece conforme el tiempo se incrementa y la solución Xp que resuelve el sistema de manera particular es:

$$x_p = \left(\frac{C}{\sqrt{((a - w^2)^2 + 2b^2 w^2}} \right) \cos(wt - \delta)$$

Con $\delta = \arctan(bw/(a-w^2))$.

Esta función es la única solución periódica del sistema, pues $X(t)=Xh+Xp$ es la solución general y como Xh tiende a cero, entonces a tiempos largos decir es que el sistema está enteramente gobernado por el forzamiento pero siempre sintiendo un pequeño efecto provocado por Xh. Para tiempos pequeños el sistema tiene un comportamiento *“transitorio”* que eventualmente convergerá a Xp.(que en el espacio de estados estará identificado la como única trayectoria periódica); todas las demás trayectorias convergerán a ella. A continuación se lo dicho.



Trayectorias en el espacio de estados y cursos temporales. Se puede observar la existencia de un atractor periódico en ambas ilustraciones.

Con esto hemos terminado el análisis del sistema ***OSCILADODR LINEAL***.

Ahora estudiaremos brevemente la dinámica del péndulo.

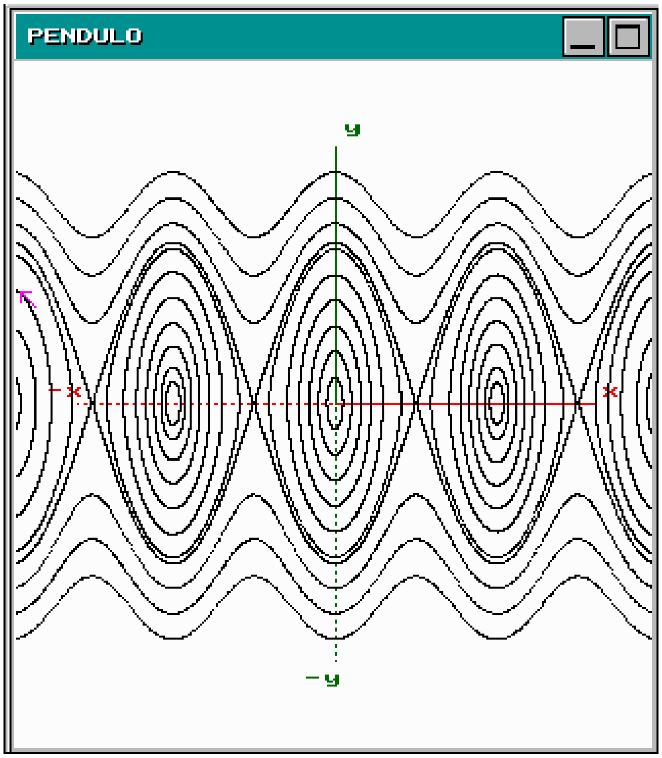
3,24-El péndulo

El análisis de la dinámica del péndulo lo haremos directamente del espacio de estados del sistema.

El sistema que modela la dinámica del péndulo es:

$$x' = y$$
$$y' = -(g/l)\operatorname{sen}(x)$$

Con g=9.81 y l=1 para los cálculos numéricos.



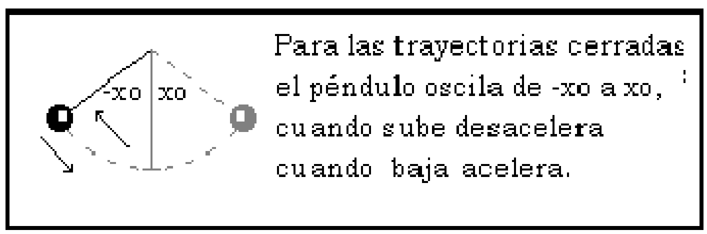
Trayectorias en el espacio de estados para diversas condiciones iniciales.

Se presentan dos tipos de comportamiento claramente diferentes, separados por una trayectoria que puede pensarse como un caso límite de los dos .

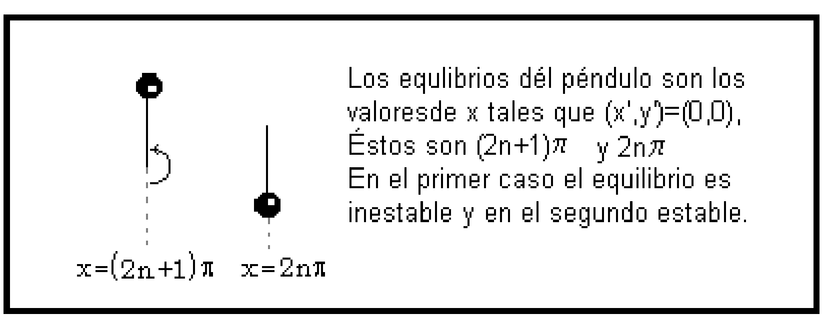
Para entender que es lo que ocurre nos concentraremos primero en las trayectorias cerradas que corresponden a una dinámica oscilatoria semejante a la del Oscilador Armónico, esto solamente es válido para ángulos "pequeños", pues es solamente para la aproximación sen(x)≈x, además la velocidad inicial debe también tener un valor no mayor a los que conforman la curva "separatriz".

En términos mecánicos, lo que ocurre es que el péndulo recorre un arco de circunferencia tanto de ida como de vuelta infinitamente, como se ilustra a continuación.

La dinámica no oscilatoria ocurre cuando la partícula recibe un valor de velocidad lo suficientemente grande que logra que ésta de más de una revolución, pero ¿Qué dinámica representa la separatriz?.



Para responder a esa pregunta observemos los equilibrios del sistema que se ilustran en la siguiente figura.



La separatiz corresponde a una trayectoria con un x_o de equilibrio inestable. Del espacio de estados se observa que la velocidad debe ser tan pequeña como se quiera para que la dinámica no sea oscilatoria. ¿Cuánto tiempo se necesita para que se complete una revolución?, ¿Se contradice la unicidad de las soluciones?

Con esa pregunta terminamos el presente documento.

Una descripción detallada del sistema INTEGRA se puede encontrar en el manua del usuario en la página de Internet del Laboratorio de Dinámica no Lineal.

Apéndice I.Funciones Válidas para definir las ecuaciones en INTEGRA.

Las funciones matemáticas válidas para definir las ecuaciones diferenciales y las funciones auxiliares son las siguientes:

NOMBRE	*PARÁMETROS*	*ACCIÓN*
sin	1	Seno de x
cos	1	Coseno de x
tan	1	Tangente de x
asin	1	Arco seno de x
acos	1	Arco coseno de x
atan	1	Arco tangente de x
sinh	1	Seno hiperbólico de x
cosh	1	Coseno hiperbólico de x
tanh	1	Tangente hiperbólico de x
fabs	1	Valor absoluto de x
floor	1	Mayor entero menor o igual a x
fmod	2	Calcula el módulo de x/y
exp	1	Exponencial de *e* a la x
ldexp	2	Calcula x por 2 exponente a la y
log	1	Logaritmo natural de x
log10	1	Logaritmo base 10 de x
sqrt	1	Raíz cuadrada de x
pow	2	x a la y
fact	1	Factorial de x
inv	1	Inverso de x
sig	1	Signo de x (1 si x>=0,-1 siX<0)
?	0	Permite hacer comparaciones

Las funciones trigonométricas se manejan en radianes.