CAOS Y EL EFECTO MARIPOSA
Teoría y ejercicios

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos constituyen una rama de la matemática que estudia los procesos en movimiento. Es posible simular cualquiera de estos procesos mediante una función calculada sucesivamente en un proceso llamado "iteración". La iteración permite, a partir de un valor x_i en un instante de tiempo t, calcular otro valor x_{i+1} en el tiempo t+Dt mediante reglas en las que el tiempo no interviene explícitamente.

La expresión general de la ecuación iterada sería: $x_{i+1} = f(x_i)$.

Utilizando las funciones elementales que incluye una calculadora científica se pueden estudiar sistemas dinámicos simples. Por ejemplo, a partir de un valor inicial x_o, pulsando sucesivamente la tecla de la raíz cuadrada estaremos simulando el sistema dinámico: $x_{i+1} = \sqrt{x_i}$ que tiende al valor 1 (llamado punto fijo o atractor del sistema).

La evolución del sistema depende a veces del punto inicial x_o, dando origen a puntos fijos (no cambian al iterarlos), comportamientos periódicos, caóticos etc.

Una órbita (conjunto de puntos iterados) es estable si al iniciar una iteración con un valor "muy próximo" al tomado para la iteración anterior, el resultado no sufre alteración importante.

1.- Utilizando la calculadora analizar el comportamiento de otros sistemas dinámicos:

a) $x_{i+1} = \cos(x_i)$ b) $x_{i+1} = \dfrac{1}{x_i}$ c) $x_{i+1} = x_i^2$.

2. LA ECUACIÓN DE MALTHUS

Los sistemas dinámicos constituyen una rama de la matemática que estudia los procesos en movimiento. Es posible simular cualquiera de estos procesos mediante una función calculada

Queremos estudiar la evolución de una población de una determinada especie. Llamamos x_i al número de individuos de la población en el instante temporal i. Si suponemos que por cada individuo existente en el período i habrá, por término medio, k individuos en el período $i+1$, se tendrá:

$$x_{i+1} = k\, x_i$$

Esta es la llamada **ecuación de Malthus**, propuesta por un economista y pensador del siglo XIX para estimar la evolución de la población humana. Si $k>1$, es decir, si existe algún crecimiento vegetativo de la población, los valores de x_k crecen en progresión geométrica y se disparan de forma exponencial, razón por la cual esta ecuación desató una fuerte polémica entre los contemporáneos de Malthus, suponiendo el primer aldabonazo en la conciencia colectiva de la humanidad sobre el problema de la superpoblación del planeta.

En la representación gráfica se incluye junto a la serie temporal, un gráfico de "telaraña" que representa puntos del tipo (x_i, x_{i+1}), (x_{i+1},x_{i+1}), (x_{i+1},x_{i+2})...... Estos puntos pertenecen alternativamente a la función $y=f(x)$ y a la recta $y=x$.

2.- Utilizando el *modelo de Malthus* se pide:

a) Encontrar la expresión del término general de la progresión geométrica que lo caracteriza (tomar como valor de prueba $k=2$)..

b) ¿Qué relación hay entre k y la tasa de crecimiento por intervalo de tiempo?.

3. LA PARÁBOLA DE MAY

En 1976 el biólogo Robert May formuló otra ecuación para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema cerrado, que difería de la de Malthus. May tuvo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema, que causan que cuando la población se acerca al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, entonces el parámetro k debe disminuir, lo que equivale a considerar este parámetro función del número de individuos.

Con ello se llega a una ecuación dela forma $x_{i+1} = k(x_i)\ x_i$. Podemos tomar como unidad de medida el máximo posible de la población, de manera que x_i expresa la fracción de población existente en el período i con respecto al nivel máximo de población.

May formuló la hipótesis de que $k(x_i)$ debería crecer linealmente cuando x_i creciera, hasta hacerse nulo cuando x_i tomara el valor unidad, es decir, que $k(x_i)$ fuera de la forma $c(1-x_i)$, llegándose así a la ecuación de la **parábola logística de May**:

$$x_{i+1} = c\ (1-x_i)\ x_i$$

Se observa que para valores pequeños de x_i se tiene $1-x_i \approx 1$, con lo que la ecuación resultante es $x_{i+1} = c\ x_i$ equivalente a la ecuación de Malthus con parámetro c. Este parámetro, indica el índice de vitalidad de la población y varía entre cero y cuatro.

A partir del *modelo de La Parábola de May,* vamos a hacer un estudio sistemático de los diferentes comportamientos del sistema en el que pueden producirse situaciones deterministas, periódicas y caóticas.

6.- Teniendo en cuenta que $0 \le x_0 \le 1$ y que $0 \le c \le 4$, modificando ambas variables:

a) ¿Cuál es el comportamiento para los valores de *c* comprendidos entre 0 y 1?.

b) Completa la tabla y encontrar la relación entre el valor del atractor y el índice de vitalidad c.

c	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,50	2,75
atractor							

c) ¿Qué ocurre en $x_o=3$?. ¿Y si $3<x_o<3,5$?.

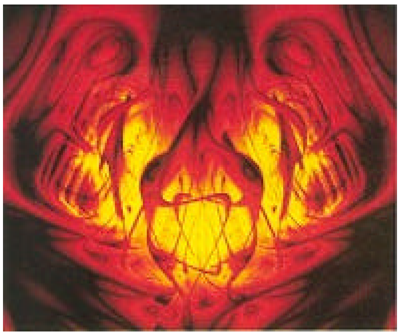
d) Tomando como población inicial 0,5 completar la tabla:

c	3,5	3,627	3,702	3,74	3,83
atractor					

e) Comentar el resultado para otros valores mayores que 3.

4. EL EFECTO MARIPOSA

Cuenta Ian Stewart en su libro *¿Juega Dios a los dados?*, que en el invierno de 1961 el meteorólogo Edward Lorenz, con el objeto de predecir el tiempo, estaba iterando un complejo sistema dinámico con su ordenador para ver cómo se comportaba en un período de tiempo más grande. En vez de esperar durante varias horas, paró su ordenador y anotó los valores de la órbita en un instante intermedio de lo que ya había realizado, con la intención de volver a ponerlo a funcionar cuando fuera a tomar una taza de té.



Un tiempo después puso de nuevo a funcionar su ordenador, para seguir calculando la órbita, con los datos iniciales que había tomado en aquel instante intermedio. Lo que él esperaba que ocurriese es lo siguiente: la máquina repetiría la segunda mitad de la ejecución original, y luego seguiría a partir de allí. La repetición servía como una comprobación útil, pero ahorrándose la primera mitad.

Cuando Lorenz regresó de tomar su taza de té, encontró que la nueva ejecución no había repetido la segunda mitad de la original. Empezaba de la misma manera pero lentamente las dos ejecuciones divergían, hasta que al final no guardaban ningún parecido la una a la otra.

James Gleik, un escritor científico que se entrevistó con Lorenz, cuenta en su libro *Caos* lo que sucedió a continuación:

De repente comprendió la verdad. No había habido un mal funcionamiento. El problema residía en los números que había introducido. En la memoria del ordenador se almacenaban seis cifras decimales: 0,506127. En la impresión para ahorrar espacio, sólo aparecían tres: 0,506. Lorenz había introducido los números redondeados suponiendo que la diferencia, del orden de las milésimas, no tendría consecuencias.

A consecuencia de esto, Lorenz ideó su famosa frase “efecto mariposa”, para explicar lo sucedido: El movimiento de una simple ala de una mariposa en China, hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber tenido. Así que, en el período de un mes, un tornado que habría devastado la costa de América no se forma. O quizás uno que no se iba a formar, se produce

En un sistema dinámico la sensibilidad a las condiciones iniciales las vamos a medir mediante un exponente, llamado de Liapunov que nos determina la tasa de divergencia exponencial de las órbitas adyacentes infinitamente próximas:

Si $x_{i+1}=f(x_i)$ y x_o y x_o+e son dos puntos próximos, después de n iteraciones se tiene $\left|f_n(x_0+e)-f_n(x_0)\right|=e\cdot e^{nl(x_0)}$. Para determinar el exponente de Liapunov $l(x_o)$ que determina la divergencia, mediante logaritmos se obtiene una aproximación para n iteraciones: $l(x_0)=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{f_n(x_0+e)-f_n(x_0)}{e}\right|$. El auténtico valor se obtiene tomando límites cuando n tiende a infinito y e tiende a cero.

7.- Superponer dos series temporales del modelo de May que se diferencien muy poco en sus valores iniciales y encontrar situaciones en que se produzca el “efecto mariposa” y otras en que esto no ocurra. Valorar los resultados de la constante de Liapunov. Un caso de cada tipo serían:

Parámetro	c	P_0	P_0'	Error inicial	Error final	Cte Liapunov
Efecto mariposa	4	0,2	0,19999			
Atractor	3,2	0,2	0,3			

5. CONSTANTE DEL CAOS

Al estudiar un sistema dinámico de parámetro m se observa que a partir de cierto valor m_1 se duplica el período; que para un nuevo valor m_2 se vuelve a duplicar, y así sucesivamente hasta llegar a un valor m_L donde no existe ninguna periodicidad, sino el caos, que se llama **punto de Feigenbaum**, diferente para cada sistema dinámico. En el caso de curva de May es 3,5699456...

La sucesión $\{d_i\}$, siendo $d_i = \dfrac{m_2 - m_1}{m_3 - m_2}$ converge al número **4,6692016091020...**, independientemente del sistema dinámico considerado, llamado **constante de Feigenbaum** o **constante del caos**.

Para algunos autores esta constante está llamada a desempeñar un papel tan importante como la que ha tenido el número p hasta nuestros días.

8.- Obtener una aproximación de la constante del caos para el sistema de la curva logística. Nota: buscar valores de *c* en los que se vea nítidamente el período 2, 4 y 8.

6. MODELO SIMÉTRICO

El sistema logístico o de May no corresponde a una función simétrica. Sea en cambio el sistema dinámico. $x_{i+1} = kx_i\left(1 - x_i^2\right)$ con $0 \le k \le 3$ con valores de *x* positivos y negativos.

9.- A partir del *modelo simétrico*, estudiar el comportamiento para diferentes valores de x_o y *k*. Se representa simultáneamente la gráfica para valores opuestos de P_o.

10.- A partir del *modelo sinusoidal*, De manera análoga al estudio realizado con el modelo de May, analizar el sistema dinámico: $x_{i+1} = a\sin\left(p \cdot x_i\right)$ con $0 \le a \le 1$.

a) Completar la tabla:

k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Evolución										

b) Encontrar la constante de Liapunov para una órbita estable y para otra en que se manifieste el “efecto mariposa”.

c) Obtener una primera aproximación de la constante del caos.