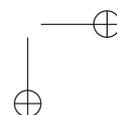
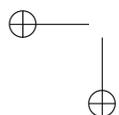
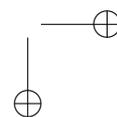
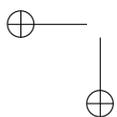
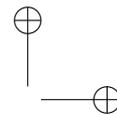
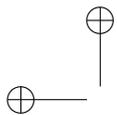


Sistemas dinámicos discretos

Jefferson King
Héctor Méndez
Universidad Nacional Autónoma de México





Prefacio

Vivimos inmersos en una multitud de movimientos. Desde que abrimos los ojos en la mañana hasta el anochecer nuestro día está ocupado por eventos que cambian constantemente. ¿Cómo nuestro cerebro los procesa y nos permite llegar sanos y salvos a la noche?, ¿Cómo le hacemos para entender toda esta maraña?, son preguntas cuya respuesta es un misterio. Desde que nacemos nos hemos ido entrenando en el estudio de los movimientos. Un bebé ve venir la cuchara con la gratificante comida y su cerebro tiene que tomar decisiones muy importantes: hay que abrir y cerrar la boca de tal manera que todo coincida, la comida queda en el lugar correcto y se puede iniciar el siguiente movimiento. No sólo vemos cosas que se mueven, las estudiamos, comprendemos de alguna manera su mecánica, hacemos predicciones y decidimos qué hacer.

Sabemos mucho sobre muchos movimientos. Gateamos, caminamos, corremos y andamos en bicicleta con una soltura que, si lo pensamos un poco, es sorprendente. Cruzamos calles sin ayuda de semáforos, y lo hacemos bien porque de alguna manera, digamos intuitiva, ponemos en una balanza el ancho de la calle, las velocidades y aceleraciones posibles de los autos que queremos sortear, y el conocimiento de la velocidad a la que nosotros mismos podemos correr. Todo esto no es cosa fácil y, sin embargo, nuestro cerebro decide casi instantáneamente si el cruce es seguro o no.

A pesar de toda esa montaña de saberes todavía hay muchísimos fenómenos que escapan a nuestra comprensión completa. Una cosa es saber andar en bicicleta, otra es entender los aspectos físicos y matemáticos que tiene un modelo de este movimiento.

Pongamos otro ejemplo. Sabemos que la población de México crece de tal manera que ya pasamos los 118 millones de personas, pero ¿está este

IV

movimiento desacelerándose?, ¿tiende la población de nuestro país a estabilizarse?

Estas no son preguntas sencillas. Un acercamiento a su solución ha requerido de la participación de físicos, biólogos, actuarios, matemáticos y científicos de otras áreas.

En el estudio del movimiento cada disciplina ha aportado ideas, herramientas y tácticas distintas. La variedad de puntos de vista es en verdad muy amplia. Aún restringiéndonos sólo a los matemáticos el abanico de opciones sigue siendo considerable. La parte de las matemáticas que estudia los distintos movimientos que nos rodean se llama *Sistemas Dinámicos*. Nuestro libro es una introducción a una parte muy importante de esta área: los *Sistemas Dinámicos Discretos*.

Concretamente, nos centramos en lo siguiente: sea $f : X \rightarrow X$ una función continua en un espacio métrico X . Para $k \in \mathbb{N}$, la k -ésima iteración de f se define como la composición reiterada de f consigo misma k veces y la denotamos por f^k . Por ejemplo, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y en general $f^{k+1} = f \circ f^k$. Se entiende que $f^1 = f$ y definimos $f^0 = id$.

Para $x \in X$ definimos la *órbita de x bajo f* como la sucesión

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^k(x), \dots \quad (1)$$

El problema básico es el siguiente:

¿Dada una función continua $f : X \rightarrow X$, qué podemos decir acerca de la órbita de cada punto $x \in X$?

Por ejemplo, ¿es ella una sucesión convergente? Si lo es, ¿a dónde converge? Si no lo es ¿cuáles son sus puntos de acumulación?

Pero sobretodo, la cuestión fundamental relacionada con el problema planteado la podemos formular como sigue: *si x y y son puntos cercanos ¿sus órbitas permanecen cercanas para todo $k \in \mathbb{N}$?*

En términos generales, si las órbitas permanecen cercanas para todos los puntos de, al menos, una cierta localidad, estamos ante un comportamiento dinámico *estable*. Pero si siempre es posible hallar puntos sumamente cercanos cuyas órbitas se alejan entre sí, el comportamiento dinámico se vuelve *inestable* y, en la práctica, *impredecible*.

El estudio de las órbitas producidas por una función o, equivalentemente, de las iteraciones de una función f en un cierto espacio X es el estudio de

un *sistema dinámico discreto*. Es decir, un tal sistema está formado por una función continua, sus iteraciones y el espacio en el que éstas están definidas.

En particular, enfrentarse a sistemas inestables ha llevado a diversas caracterizaciones matemáticas de lo que es un *sistema dinámico caótico*, o de lo que es un sistema dinámico discreto con dinámica *complicada*.

Así, el objetivo de este texto es, en términos generales, establecer nociones matemáticas precisas de *sistemas dinámicos discretos caóticos*, y los resultados importantes básicos que nos permiten estudiarlos.

Nuestro espacio preferente (más no el único) será el el intervalo cerrado $I = [0, 1]$ contenido en la recta real, y los sistemas dinámicos correspondientes serán funciones continuas $f : I \rightarrow I$.

En particular, nos ajustaremos a la definición de *caos* dada por R. L. Devaney en la década de los 80's del siglo pasado. De muchos modos esta definición ha sido un eje alrededor del cual ha girado la discusión de lo que es o debería ser el concepto de caos en matemáticas y es, sin duda alguna, la definición más popular de *sistema dinámico discreto caótico*.

Un hilo conductor de este texto es, entonces, establecer esta definición y explorar sus consecuencias en general y a través de ejemplos concretos.

Sobre los capítulos

Los sistemas dinámicos discretos (*sdd*) han sido objeto de interés científico desde hace mucho tiempo. Pero especialmente con el desarrollo de las computadoras, que permitió por primera vez en la historia visualizar imágenes matemáticas muy complicadas. El estudio de iteraciones de funciones ha llamado poderosamente la atención de multitud de investigadores alrededor de todo el mundo. El resultado ha sido que esta área ha tenido un crecimiento y una diversificación impresionantes, prácticamente inabarcable, que en la actualidad llega a los confines del conocimiento científico en matemáticas y otras ramas de la ciencia.

Este libro es una introducción a ese mundo tan vasto.

Modelar un fenómeno físico, social, biológico o de cualquier naturaleza, que evoluciona con el tiempo, conduce en forma natural a un *sdd*. El Capítulo 1 muestra cómo ocurre esto a través de un breve vistazo al estudio de dinámica de poblaciones. En el Capítulo 2 damos las definiciones generales básicas para iniciar propiamente nuestras aventuras en el mundo del caos.

La aventura se desboca un tanto, por primera vez, con un impresionante teorema del matemático ucraniano O. M. Sharkovskii, tratado en los

VI

Capítulos 3 y 4. Además de su importancia, se puede afirmar que este es un resultado sumamente contemporáneo: su autor lo estableció en los fabulosos 60’s del siglo pasado. Esperamos que el lector se sorprenda gratamente con este teorema.

Las herramientas del cálculo diferencial e integral aparecen de manera frecuente en las demostraciones que presentamos a lo largo del texto. Con la intención de ofrecer una pequeña ayuda a los lectores más jóvenes hemos dedicado el Capítulo 5 a la presentación de las más importantes. En ese mismo capítulo hacemos una introducción a los conceptos básicos de la topología en la recta real.

Es un hecho notable la aparición frecuente y abrumadora, en los *sdd*, del conjunto de Cantor. Una vez más este conjunto confirma que de ninguna manera es la excepción en el mundo de las matemáticas, sino que más bien es (casi) la regla. El Capítulo 6 está dedicado a este conjunto.

En el Capítulo 7 presentamos uno de los ejemplos medulares de este texto: la función *Tienda*. Esta función, tan simple, resulta tener una dinámica bastante complicada pero a la vez, tiene una gran ventaja: en ella se pueden calcular y verificar, de manera práctica, muchos de los conceptos dinámicos. Así, esta función resulta ser un modelo ejemplar y a la vez una especie de laboratorio en el que concretamos nuestros resultados.

A lo largo de todo el texto seguirá apareciendo una y otra vez la función *Tienda* y sus camaradas: la *familia de las Tiendas*.

En los capítulos del 8 al 12 se van agregando ingredientes indispensables para la discusión de la complejidad dinámica, como lo son los de *transitividad topológica*, *sensibilidad a las condiciones iniciales*, *densidad de órbitas periódicas* y el *omega conjunto límite*. Se adereza la discusión con la inclusión –muy necesaria– de importantes resultados de análisis matemático, como el *Teorema de Baire*, que están en la base de varios conceptos dinámicos. Cada uno de estos capítulos es importante en sí mismo y a la vez, como parte del recorrido que vamos haciendo a lo largo del texto. Finalmente, en el Capítulo 9, presentamos la definición de *sistema dinámico caótico*.

En el Capítulo 10 se introduce una herramienta muy valiosa: la *dinámica simbólica*. Ésta se desarrolla de un modo natural en relación con un prominente miembro de la familia de las Tiendas.

El Capítulo 13 lo dedicamos a examinar un *sdd* muy especial que se conoce con el nombre (entre otros) de *máquina de sumar* o *sumadora*. Su

importancia radica en que éste se sitúa justamente en la frontera entre los *sdd* con una dinámica estable o sencilla, y los que tienen una dinámica inestable o complicada. Para analizar este ejemplo se recurre de nuevo a dinámica simbólica, sólo que en una presentación diferente a la hecha en el Capítulo 10.

El otro ejemplo medular, tanto del texto como de los *sdd* en general, es la *familia logística*. Esta familia aparece desde el Capítulo 1, pero se estudia sistemáticamente en los Capítulos 13, 14 y 16. Su estudio conduce ineluctablemente a la teoría de las bifurcaciones, tema básico en dinámica. Nos centramos principalmente en dos tipos de bifurcaciones que tienen lugar en la familia logística y en otras familias: la de *duplicación de periodo* y la *tangente o silla-nodo*.

En el Capítulo 16 se presenta una de las figuras emblemáticas del área: el *diagrama de bifurcaciones de la familia logística*. El capítulo entero es un primer entrón al análisis de este diagrama. Especialmente en este capítulo –pero no es en el único– se recomienda fuertemente al lector pertrecharse con el apoyo de una buena computadora y software adecuado que en la actualidad es posible bajar gratuitamente de internet. Véase [46] en la bibliografía.

Por último, en los dos capítulos finales se presenta material ligeramente más avanzado que en el resto del libro.

El Capítulo 17 se dedica a presentar el concepto de *entropía topológica* que nos permite otra manera de definir y *cuantificar* el caos. Se ejemplifica éste con las dos funciones estelares de este libro: la *Tienda* y la *Logística*.

El Capítulo 18, subiéndonos un escalón más, es una introducción sistemática al estudio de la dinámica en espacios cuyos elementos son los subconjuntos cerrados y acotados de un espacio métrico compacto X . Éstos se denominan *Hiperespacios*. Las funciones continuas $f : X \rightarrow X$ inducen de modo natural funciones en el Hiperespacio correspondiente y el problema es determinar si la dinámica de f en X se traslada también al Hiperespacio.

Ambos capítulos representan una continuación natural de lo expuesto previamente y a la vez, constituyen una invitación al lector a continuar explorando el inmenso universo actual de los *sdd*.

Agradecimientos

A partir del año 2000 hemos ofrecido, a los estudiantes de las licenciaturas de matemáticas, actuaría, biología y física de la Facultad de Ciencias de

VIII

la UNAM, cursos de Sistemas Dinámicos Discretos. Primero bajo el nombre de *Seminario de Análisis*, luego, a partir del 2006, como *Sistemas Dinámicos Discretos I y II*. Junto con todos los asistentes a estos cursos fuimos creando, poco a poco, el material que constituye la parte medular del presente texto. Va aquí nuestro reconocimiento y profundo agradecimiento a todos nuestros estudiantes.

Esta obra no hubiera sido posible sin el apoyo infatigable y generoso de nuestros *dibujantes*, o sea de las personas que pacientemente se dedicaron a hacer todas las figuras de este libro: los alumnos de licenciatura Lizbeth Escobedo y Emiliano Geneyro, la diseñadora gráfica Angélica Macías y la Dra. en matemáticas, María de la Paz Álvarez Scherer. A Liz, Paz, Angélica y Emiliano: de veras ¡muchas gracias!

Agradecemos infinitamente también a nuestra querida amiga –y compañera de uno de los autores–, la Dra. María de la Paz Álvarez Scherer, haber revisado tantas partes de la versión original y habernos enriquecido con sus certeras críticas y comentarios.

La edición de este libro, por parte de *Las prensas de Ciencias*, se logró gracias al financiamiento proporcionado por la Dirección General del Personal Académico, Programa UNAM-DGAPA-PAPIME, a través del proyecto con clave PE100713.

Jefferson King

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
`king@servidor.unam.mx`

Héctor Méndez

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
`hml@ciencias.unam.mx`

Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias, enero de 2014.

Índice general

Prefacio	III
Índice general	IX
1. Introducción	1
1.1. Dos modelos de población	2
1.2. Y aparecen los sistemas dinámicos discretos	7
Ejercicios	8
2. Primeras definiciones	9
2.1. Los dos ingredientes	9
2.2. Puntos fijos	10
2.3. Puntos fijos atractores	14
2.4. Análisis gráfico	17
2.5. Puntos periódicos	18
2.6. La <i>Tienda</i>	20
Ejercicios	22
3. La aventura de Sharkovskii I	27
3.1. La caja de herramientas y el Teorema de Li-Yorke	28
3.2. El Teorema de Sharkovskii	35
Ejercicios	42
4. La aventura de Sharkovskii II	45
4.1. Los ejemplos ejemplares	45
4.2. La Duplicadora o Doble de una función	51
4.3. Una incursión fugaz al mundo de las digráficas	58

4.4. Regreso a los ejemplos usando digráficas	65
Ejercicios	67
5. Nociones básicas de cálculo y topología	69
5.1. Conjuntos abiertos y cerrados	69
5.2. Conjuntos compactos y conexos	72
5.3. Sucesiones y subsucesiones	74
Ejercicios	78
6. Una superestrella: El conjunto de Cantor	83
6.1. Construcción	83
6.2. Algunas propiedades de C	85
Ejercicios	91
Comentarios	92
7. Una visita a la <i>Tienda</i>	95
7.1. Más propiedades de la función <i>Tienda</i>	95
7.2. Sharkovskii y la función <i>Tienda</i>	100
Ejercicios	107
8. Transitividad topológica	111
8.1. Funciones transitivas	111
8.2. Espacios completos y el Teorema de Baire	114
8.3. Las órbitas densas sí existen	118
Ejercicios	121
9. Órbitas estables	125
9.1. Una primera idea de estabilidad	125
9.2. Puntos fijos atractores (un poco más general)	126
9.3. Órbitas estables	127
9.4. Sensibilidad a las condiciones iniciales	131
9.5. La definición de caos	132
Ejercicios	134
10. Dinámica simbólica	137
10.1. El conjunto de los puntos atrapados	137
10.2. Dinámica simbólica	142
10.3. Función corrimiento	148

ÍNDICE GENERAL

XI

Ejercicios	151
Comentarios	155
11. Conjugación topológica	159
11.1. Dos ejemplos	159
11.2. Propiedades que se preservan bajo conjugación	161
11.3. La <i>Tienda</i> es equivalente a la <i>Logística</i>	165
Ejercicios	166
12. El omega conjunto límite	169
12.1. Propiedades básicas de el conjunto $\omega(x, f)$	169
12.2. El conjunto $\omega(x, f)$ y la transitividad	175
Ejercicios	177
Comentarios	180
13. Una Sumadora	183
13.1. La función $G : I \rightarrow I$ y sus puntos periódicos	184
13.2. La dinámica de $G : I \rightarrow I$	192
13.3. Otra mirada a la dinámica simbólica	194
13.4. El homeomorfismo que conjuga a G con τ	201
13.5. G restringida al conjunto de Cantor C	203
Ejercicios	208
Comentarios	210
14. Duplicación de periodo en la familia logística	213
14.1. La primera bifurcación de duplicación de periodo	216
14.2. Primera cascada infinita de duplicaciones de periodo	229
14.3. Una mirada mínima a la dinámica de f_{λ_∞}	231
Ejercicios	233
15. Nota sobre la bifurcación tangente	235
15.1. Dinámica de la familia exponencial	235
15.2. La Familia cuadrática	237
Ejercicios	239

16. Diagrama de bifurcaciones, familia logística	243
16.1. Obteniendo el diagrama	244
16.2. Una mirada a la zona caótica	250
16.3. ¿Cómo apareció la ventana de periodo 3?	254
16.4. La abundancia de ventanas	255
16.5. La complejidad de la dinámica en las ventanas	256
Ejercicios	258
17. Introducción a la entropía	263
17.1. Propiedades de las cubiertas abiertas	263
17.2. Definición de entropía	267
17.3. Propiedades de la entropía	272
17.4. La entropía de la <i>Tienda</i> es positiva	275
17.5. Entropía positiva y caos	277
Ejercicios	283
Comentarios	285
18. Dinámica colectiva	287
18.1. El hiperespacio de los compactos	288
18.2. La función inducida	290
18.3. Función inducida, un ejemplo	292
18.4. Un punto de vista más general	297
18.5. De lo colectivo a lo individual	300
18.6. Puntos periódicos, un ejemplo	302
Ejercicios	305
Índice analítico	313

CAPÍTULO 1

Introducción

Una de las áreas científicas, de gran auge e importancia en la actualidad, relacionada con los sistemas dinámicos es la biología matemática. En particular, los sistemas dinámicos discretos aparecen de forma natural en todo lo relativo al estudio del crecimiento de poblaciones.

En este capítulo veremos dos ejemplos clásicos que ilustran este hecho. Nuestro objetivo es, simplemente, acompañar al lector a dar una pequeña vuelta –sin demasiadas pretensiones– alrededor de la problemática de estudiar poblaciones y, de paso, mostrar cómo ésta lleva al planteamiento de sistemas dinámicos discretos.

Cuando se habla de estudiar poblaciones puede tratarse de los habitantes del mundo, de un país o de una localidad, de grupos de niños o de mujeres, de comunidades indígenas o campesinas o urbanas. Puede ser en la actualidad o en una determinada época histórica. O puede tratarse del estudio de ciertas especies biológicas –por ejemplo, las que están en peligro de extinción, o de bacterias u otros microorganismos que se estudian en laboratorios *ad hoc*.

En cualquier caso, es claro que existe una multitud de factores que intervienen en el desarrollo de una determinada población: factores geográficos, ambientales, sociales, de interacción o competencia con otros grupos o con otras especies, de disponibilidad de recursos, del uso racional de éstos, de las políticas gubernamentales al respecto, de la alimentación, de la edad de los individuos, del grado de desarrollo de la tecnología y en fin, la lista puede ser interminable.

La idea general es la de elaborar modelos matemáticos apropiados, que de alguna manera capten la situación de la población bajo estudio y que permitan comprender, y sobretodo, predecir su ulterior destino.

Naturalmente los modelos matemáticos deben ser manejables; es inevitable, entonces, hacer ciertas simplificaciones razonables. Y aunque el desarrollo de las computadoras así como de las teorías matemáticas requeridas permite un grado relativamente alto de sofisticación en los modelos, siempre es recomendable, como punto de partida, buscar la sencillez, la manera más simple posible de proceder, con apego al fenómeno, claro está.

Los ejemplos que veremos en este capítulo son quizá los modelos de población más simples posibles. El primero de ellos, que llamaremos el *modelo lineal*, lograremos analizarlo completamente. El segundo, en cambio, —el *modelo logístico*— ha probado poseer una complejidad dinámica que reta nuestra imaginación.

De hecho, en el terreno de las matemáticas este modelo ha sido un factor de desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos discretos y en los últimos 40 años (o más) ha sido objeto de múltiples investigaciones en todo el mundo por parte de los más reconocidos especialistas del área. Justamente uno de los objetivos de este pequeño libro es aventurarnos en analizar este modelo, desentrañar sus secretos hasta donde nos sea posible. Ello lo haremos a lo largo de varios capítulos. Por lo pronto, en este capítulo, simplemente tendremos el gusto de presentárselo a usted, estimado lector.

1.1. Dos modelos de población

Para estudiar el desarrollo de una determinada población elegimos un cierto momento inicial y una unidad de tiempo apropiada (minutos, segundos, días, meses o alguna otra).

Denotemos con P_n el número de individuos de la población existentes al tiempo n , donde n es un número natural o cero. El instante inicial es cuando $n = 0$ y el correspondiente número de individuos en este instante inicial lo denotamos por $P_0 > 0$.

Imaginemos ahora que a través de la experiencia, la experimentación, la conceptualización teórica o de cualquier otra manera razonable, se ha llegado a comprender o a conjeturar alguna ley que regula el crecimiento de la población. Esta ley sería el punto de partida del establecimiento del modelo matemático. El problema básico, una vez planteado el modelo, consiste en determinar cuál va a ser el futuro de la población; es decir, qué va a pasar con P_n conforme n tiende a infinito.

Ejemplo 1.1. El modelo más sencillo.

Supongamos que en virtud de condiciones dadas, resulte razonable esperar que el número de individuos existentes en cualquier instante de tiempo n sea proporcional al número de individuos en el instante previo, $n - 1$. Es decir, que existe una constante $c > 0$, que no depende de n , tal que

$$P_n = c P_{n-1}. \quad (1.1)$$

Esta ecuación es nuestro modelo matemático que llamaremos el *modelo lineal*. Los factores adicionales a tener en consideración de alguna manera quedan comprendidos en la constante de proporcionalidad c .

¿Qué conclusiones podemos sacar de este modelo?

Para empezar, un razonamiento inductivo (ejercicio 1) nos permite concluir que para todo $n \geq 1$ tenemos

$$P_n = c^n P_0. \quad (1.2)$$

Por lo tanto, conociendo solamente c y P_0 , podemos determinar el valor de P_n para cualquier n .

¿Cuál va a ser, entonces, la evolución de una población sujeta a esta ley?, ¿qué va a suceder conforme pase el tiempo, es decir, conforme n crezca cada vez más?

Claramente, sólo hay tres posibilidades:

- Si $c > 1$, entonces P_n tiende a infinito cuando n tiende a infinito.
- Si $0 < c < 1$, entonces P_n tiende a 0 si n tiende a infinito.
- Si $c = 1$, entonces $P_n = P_0$ para toda $n \geq 1$.

En la primera de estas posibilidades, la población crecería sin cesar, desbordando todas las limitaciones posibles. En la segunda, la población se extinguiría y en la tercera, permanecería constante para siempre, igual a como se encontraba en el instante inicial. En su caso, cada una de estas posibilidades tendría lugar independientemente del número de individuos existentes al instante inicial $n = 0$.

Estas conclusiones, obligadas por la simpleza del modelo, quizá lo hacen parecer como poco realista. Aún así, tiene cierto rango de aplicabilidad.

Además, en ecuaciones diferenciales, el modelo equivalente conduce a la *ley de Malthus* para poblaciones, que ha probado tener cierta importancia, ver las referencias [11] y [21].

Ejemplo 1.2. El modelo logístico.

Hacia mediados del siglo XIX, un notable investigador en biología matemática y otras áreas, el matemático belga Pierre Francois Verhulst, propuso, utilizando ecuaciones diferenciales, un modelo que él mismo llamó el modelo logístico.

La idea esencial de Verhulst, trasladada al terreno de dinámica discreta, es como sigue: supongamos que los recursos de los que dispone determinada población (agua, comida, clima, etc.) y en general, el medio en el que ésta se desarrolla, no cambian significativamente con el tiempo, o simplemente no cambian. En este contexto fijo, es natural que la población no pueda crecer indefinidamente; es decir, las condiciones del medio soportan, a lo más, un número máximo de individuos. Si este número máximo es rebasado, hay sobrepoblación, aparecen muchas dificultades (escasez de recursos, etc.) y víctima de éstas, la población tiende a disminuir. Si, por el contrario, la población está lejos de tal número máximo, todavía hay posibilidades de desarrollo y la población tiende a crecer.

En otras palabras, hay un comportamiento cíclico que podemos resumir así: Denotemos por N al número máximo mencionado y nuevamente por P_n al número de individuos al tiempo $n \geq 0$. Entonces, si $P_n > N$, tenemos que P_n empieza a decrecer, y si $P_n < N$, P_n tiende a crecer; con el tiempo, P_n se va aproximando a su número máximo y si lo rebasa, empieza de nuevo a decrecer, y así sucesivamente.

Este comportamiento debe reflejarlo el modelo.

Verhulst propuso que en lugar de manejar el número total de individuos, se introdujera una *tasa de crecimiento* de la población definida por

$$r_n = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}. \quad (1.3)$$

Esta tasa representa el cambio en el número de individuos de una población, al transcurrir una unidad de tiempo, en comparación con el número de individuos previamente existente.

Por ejemplo, si se supone una tasa de crecimiento constante, es decir, $r_n = r$ para alguna r que no depende de n , obtenemos

$$P_{n+1} = P_n + rP_n = (1 + r)P_n, \quad (1.4)$$

que es el modelo lineal (1.1) con $c = 1 + r$ (ver ejercicio 2).

Normalizamos ahora el tamaño de la población al tiempo n , P_n , en relación con su tamaño máximo; es decir, introducimos

$$p_n = \frac{P_n}{N}.$$

Esta cantidad es un porcentaje; por ejemplo, $p_n = 0.08$ significa que la población al tiempo n es 8% de su tamaño máximo. Nótese que mientras el número de individuos no rebasa el número máximo N se tendrá que $0 < p_n < 1$.

Reemplazando P_n por p_n en (1.3) obtenemos la tasa de crecimiento en términos de la variable normalizada. Nótese que el valor de esta tasa no cambia al hacer esta sustitución.

Gruesamente hablando, Verhulst postuló que en cada instante de tiempo n , la tasa de crecimiento, r_n , debería ser proporcional a todo aquello que existe en el medio (en ese instante), pero que aún no ha sido utilizado por la población. Este “sobrante” existente al tiempo n se cuantificó como $1 - p_n$.

Entonces, para alguna constante apropiada $r > 0$, y para todo tiempo n , debe cumplirse lo siguiente:

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = r(1 - p_n).$$

O equivalentemente:

$$p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n). \quad (1.5)$$

Este es el *modelo logístico* o, mejor dicho, la *familia de modelos logísticos*: la constante r juega el papel de un parámetro que, al irlo variando, nos permite obtener diferentes comportamientos de la población, diferentes modelos.

Obsérvese que sí se comporta como se deseaba: si $P_n > N$, tenemos $p_n > 1$ por lo que la tasa expresada en (1.5),

$$r_n = r(1 - p_n),$$

es negativa, lo cual indica decrecimiento; ahora, si $P_n < N$, $p_n < 1$ y r_n es positiva, lo cual indica crecimiento.

Matemáticamente es sencillo demostrar (lo haremos más adelante, ver ejemplo 11.2 en el capítulo 11, página 160), que la ecuación (1.5) la podemos cambiar por otra que preserva la cualidad cíclica mencionada en el párrafo previo. Esta nueva ecuación conduce a las mismas conclusiones dinámicas, pero es ligeramente más simple:

$$p_{n+1} = rp_n(1 - p_n). \quad (1.6)$$

Llamaremos también a esta ecuación *modelo logístico*.

¿Qué conclusiones sacamos ahora?

Inmediatamente aparecen dificultades al intentar resolver esta pregunta; la primera y más obvia es que, en general, no es posible obtener una expresión para p_n en términos del valor inicial p_0 y r (para darse una idea, ver el ejercicio 3).

Esta dificultad se puede superar en la práctica recurriendo a una simple calculadora y, dados p_0 y r , obtener numéricamente p_n para valores de n bastante grandes (ver ejercicio 4).

Otra posibilidad aún mejor es instrumentar un programa de computadora que, para diferentes valores del parámetro r y, en cada caso, diferentes valores iniciales p_0 , calcule p_n para n variando en un subconjunto grande de números naturales, de modo que nos dé una idea de la tendencia de p_n al crecer n .

Pero aún así subsiste un problema de fondo: ¿es posible sacar conclusiones generales válidas por lo menos para un rango amplio, significativo, de valores de r y de condiciones iniciales p_0 ? Obsérvese que en principio p_0 puede ser cualquier real en el intervalo $[0, 1]$ y r cualquier número real.

Responder esta pregunta requiere estudiar el modelo desde una perspectiva distinta, desde un punto de vista *teórico*, puramente matemático.

Y allí es dónde surgieron las dificultades más serias: como dijimos previamente, la historia nos ha enseñado que desde el punto de vista dinámico, es decir, desde el punto de vista de determinar como evoluciona p_n cuando n tiende a infinito, el modelo encierra un alto grado de complejidad en función del parámetro r . De hecho, el modelo logístico abarca casi todos los comportamientos dinámicos posibles, especialmente los comportamientos *caóticos*.

1.2. Y aparecen los sistemas dinámicos discretos

Las ecuaciones de los modelos presentados son llamadas *ecuaciones de recurrencia*, puesto que su valor al tiempo $n + 1$ está en función de su valor en el tiempo n . Si llamamos x a p_n , podemos reescribir (1.6) como

$$p_{n+1} = f(p_n), \quad \text{donde } f(x) = rx(1 - x).$$

Es decir, obtener el valor al tiempo siguiente es simplemente aplicar esta función al valor en el tiempo presente. Si x_0 denota al estado inicial p_0 , entonces $f(x_0)$ es el valor al momento siguiente, $f(f(x_0))$ es el que sigue de $f(x_0)$, luego viene $f(f(f(x_0)))$, después $f(f(f(f(x_0))))$ y así sucesivamente. Para simplificar la notación, escribimos $f^2(x_0)$ en lugar de $f(f(x_0))$, $f^3(x_0)$ en lugar de $f(f(f(x_0)))$, etc. Este proceso de aplicar repetidamente la función a los valores obtenidos se llama *iterar* la función.

También al modelo del primer ejemplo lo podemos reescribir a través de una función, que en este caso está dada por

$$f(x) = cx.$$

En cualquiera de los dos modelos, dado cualquier número x_0 , la historia futura a partir de esta condición inicial está dada por la sucesión

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots$$

Esta sucesión se llama *la órbita de x_0 bajo la función f* .

El problema principal que nos plantean ambos modelos es determinar el comportamiento de la órbita de cualquier punto bajo la correspondiente función.

En general, un *sistema dinámico discreto* es cualquier función continua f , definida en un espacio métrico (los números reales en nuestros modelos) en el que el problema básico es analizar el comportamiento de las órbitas bajo f .

Los modelos de población son ejemplos naturales de este tipo de sistemas.

En este libro exploraremos sistemáticamente la teoría elemental de sistemas dinámicos discretos. Estableceremos, en particular, los conceptos que forman lo que hoy se conoce como *caos* sobre bases matemáticas sólidas. Desde esta perspectiva –como iteración de funciones– volveremos a examinar los modelos aquí presentados. Esperamos que lo disfruten.

8 1.2. Y APARECEN LOS SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

Ejercicios

EJERCICIO 1.1. Deducir, por inducción, la fórmula (1.2) a partir de (1.1).

EJERCICIO 1.2. Trabajar con la fórmula (1.4) para sacar las mismas conclusiones que en el ejemplo 1.1 pero en términos de la tasa r_n dada por (1.3).

EJERCICIO 1.3. Utilizando y suponiendo p_0 y r dados, y siguiendo la relación 1.6, tenemos que

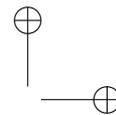
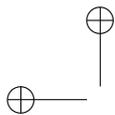
$$p_1 = rp_0(1 - p_0).$$

Comprobar que para $n = 2$ tenemos

$$p_2 = r^2p_0(1 - p_0) - r^3p_0^2(1 - p_0)^2.$$

Buscar una expresión parecida para $n = 3$.

EJERCICIO 1.4. Para $r = 3.2$ y $p_0 = \frac{1}{2}$ e iterando la función $f(x) = rx(1 - x)$ obtener, tal vez utilizando una calculadora, los valores de p_n para $n = 1, 2, \dots, 10$. ¿Observa alguna tendencia, podría predecir a qué valor tiende p_n si $n \rightarrow \infty$? (calcule más valores si es necesario).



CAPÍTULO 2

Primeras definiciones

Presentamos en este capítulo las definiciones iniciales y nuevos ejemplos de sistemas dinámicos discretos. En particular introducimos la función conocida como la *Tienda* e iniciamos el estudio de sus propiedades dinámicas (muchas de ellas realmente sorprendentes).

2.1. Los dos ingredientes

Para obtener un sistema dinámico discreto necesitamos tan sólo dos ingredientes.

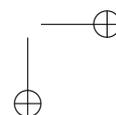
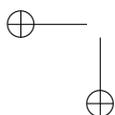
El primero es un espacio métrico, X . Un *espacio métrico* es un conjunto que viene acompañado de una forma de medir distancias entre cualesquiera dos de sus puntos. El conjunto de los números reales \mathbb{R} , el plano \mathbb{R}^2 , el conjunto de los números complejos \mathbb{C} , y el intervalo cerrado $[0, 1]$ en la recta real son ejemplos de espacios métricos.

El segundo ingrediente es una función continua del espacio X en sí mismo, $f : X \rightarrow X$.

Una vez que tenemos estos ingredientes podemos definir, para cada punto $x \in X$, una sucesión de puntos conocida como la *órbita de x bajo f* ,

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}.$$

Aquí el símbolo f^n representa la composición de f consigo misma n veces: $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, y así sucesivamente. A la función $f^n : X \rightarrow X$ se le llama *iteración* de $f : X \rightarrow X$. Definimos $f^0 : X \rightarrow X$ como la función identidad en X .



La interpretación que le damos a la sucesión $o(x, f)$ es la siguiente: En el tiempo $n = 0$ un objeto se encuentra en la posición x ; en el tiempo $n = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en $f(x)$; en el tiempo $n = 2$ el objeto vuelve a cambiar de posición y ahora se encuentra en $f(f(x)) = f^2(x)$; etcétera.

Tiempos:	0	1	2	...	n	...
Posiciones:	x	$f(x)$	$f^2(x)$...	$f^n(x)$...

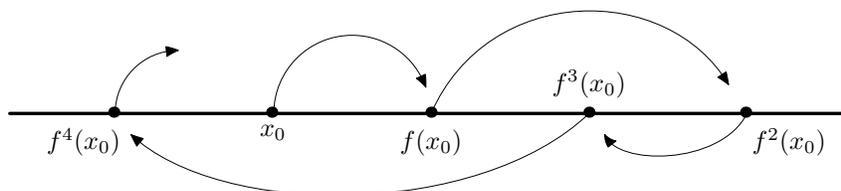


FIGURA 2.1: Primeros elementos de la órbita de x_0 en la recta real.

La meta es estudiar todas las posibles sucesiones $o(x, f)$. De manera muy especial nos interesa su comportamiento cuando n tiende a infinito.

Desde este punto de vista la pareja X y f nos da un modelo matemático del movimiento. Esto es, nos da un *sistema dinámico discreto*. La palabra discreto se refiere a que conocemos la posición del objeto que se mueve sólo cuando el tiempo asume un valor entero mayor o igual a cero.

De aquí en adelante todas las funciones consideradas son funciones continuas. La letras mayúsculas X y Y , representan espacios métricos. La distancia entre dos puntos de X , digamos x y y , la representamos con $d_X(x, y)$. Si no hay confusión acerca del conjunto donde estamos trabajando, entonces sólo escribimos $d(x, y)$. En \mathbb{R} y en \mathbb{R}^2 utilizamos la distancia entre puntos usual. La letra \mathbb{N} representa el conjunto de los números naturales, es decir, el conjunto de los enteros positivos.

2.2. Puntos fijos

Sea $f : X \rightarrow X$. Decimos que $x_0 \in X$ es *punto fijo de f* si $f(x_0) = x_0$. En este caso la órbita de x_0 bajo f es una sucesión muy sencilla,

$$o(x_0, f) = \{x_0, x_0, \dots\}.$$

Como para cada n se tiene que $f^n(x_0) = x_0$, entonces la $o(x_0, f)$ tiende a x_0 . Es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x_0$.

Sea $f : A \rightarrow A$, donde A es un subconjunto de \mathbb{R} . Si $x_0 \in A$ es un punto fijo de f , entonces $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0)$. Por lo tanto este punto, (x_0, x_0) , se encuentra en la intersección de la gráfica de f y la diagonal $\{(x, y) : x = y\}$. En la figura 2.2 se muestra la gráfica de una función con exactamente tres puntos fijos: x_0, x_1 y x_2 .

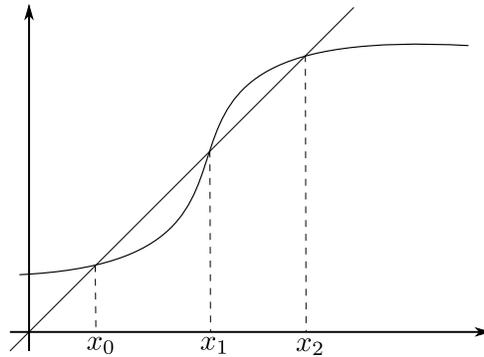


FIGURA 2.2: Tres puntos fijos.

Los puntos fijos juegan un papel muy importante en la dinámica inducida por f . La siguiente proposición contiene el primer hecho interesante donde aparecen este tipo de puntos.

Proposición 2.1. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y sean x_0 y y_0 dos puntos en X tales que la órbita de x_0 converge a y_0 , es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = y_0$. Entonces y_0 es un punto fijo de f .*

Demostración. Como f es una función continua, entonces

$$f(y_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x_0) = y_0.$$

La última igualdad se sigue del hecho de que $\{f^{n+1}(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$. \square

Encontrar puntos fijos de funciones puede parecer una tarea sencilla. Sin embargo, salvo algunos casos, no lo es. Las funciones que tienen como

dominio y contradominio un intervalo forman un buen lugar donde iniciar nuestro estudio de este tipo de órbitas.

Sean a y b en \mathbb{R} tales que $a \leq b$. Un *intervalo* es un subconjunto de la recta real que es distinto del vacío y que tiene una de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, & (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, & (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \end{aligned}$$

o, por último, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Los conjuntos:

- $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ y $(-\infty, \infty)$ son *intervalos cerrados*;
- (a, b) , (a, ∞) , $(-\infty, b)$ y $(-\infty, \infty)$ son *intervalos abiertos*;
- $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ y (a, b) son *intervalos acotados*.

De aquí en adelante, salvo que indiquemos algo distinto, las funciones tienen como dominio de definición un intervalo en \mathbb{R} .

Damos a continuación algunas herramientas que nos ayudarán a encontrar puntos fijos de funciones definidas en intervalos. Recordamos primero el *Teorema del Valor Intermedio, TVI*. Ver capítulo 7 de [40].

Teorema 2.2. Sean A un intervalo en \mathbb{R} y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Sean a y b dos puntos en A tales que $a < b$, y sea $M \in \mathbb{R}$. Si alguna de las siguientes dos condiciones se cumple:

- $f(a) < M < f(b)$,
- $f(a) > M > f(b)$,

entonces existe c , $a < c < b$, tal que $f(c) = M$.

Proposición 2.3. Sean A un intervalo en \mathbb{R} y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Sea $[a, b]$ un intervalo contenido en A .

- i) Si $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.
- ii) Si $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Nota: Por $f([a, b])$ nos referimos a la imagen de $[a, b]$ bajo f ; es decir,

$$f([a, b]) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in [a, b]\}.$$

Demostración. *i)* Como $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces

$$a \leq f(a) \quad \text{y} \quad f(b) \leq b.$$

Sea $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$.

La función h es continua en el intervalo $[a, b]$, además

$$h(a) \geq 0 \quad \text{y} \quad h(b) \leq 0.$$

Por lo tanto existe $c \in [a, b]$ tal que $h(c) = 0$. En consecuencia, $f(c) = c$.

ii) Como $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces existen α, β en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$. Ver figura 2.3.

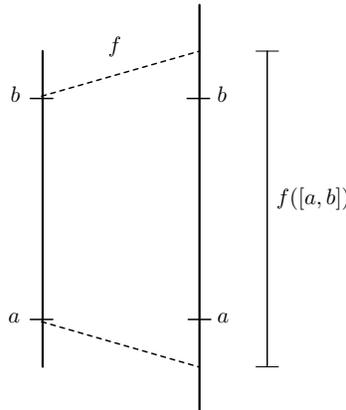


FIGURA 2.3: Intervalo $[a, b]$ contenido en $f([a, b])$.

Notemos que

$$f(\alpha) \leq \alpha \quad \text{y} \quad \beta \leq f(\beta).$$

Consideramos ahora, como antes, una función auxiliar $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$.

Tenemos $h(\alpha) \leq 0$ y $h(\beta) \geq 0$. Por tanto, existe c en $[\alpha, \beta]$, o en $[\beta, \alpha]$, tal que $h(c) = 0$. Entonces $c \in [a, b]$, y $f(c) = c$. \square

2.3. Puntos fijos atractores

A lo largo de esta sección A representa un intervalo en \mathbb{R} , y $f : A \rightarrow A$ es una función continua en A .

Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Decimos que x_0 es un *punto fijo atractor* si existe un intervalo abierto (a, b) , $x_0 \in (a, b)$, tal que

$$f((a, b) \cap A) \subset (a, b) \cap A,$$

y para toda $x \in (a, b) \cap A$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$.

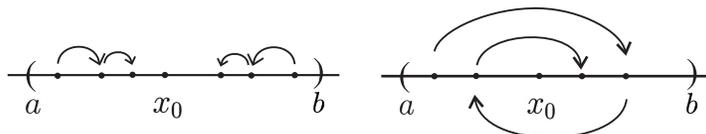


FIGURA 2.4: Ejemplos de punto fijo atractor.

Decimos que x_0 es un *punto fijo repulsor* si existe (a, b) , $x_0 \in (a, b)$, tal que para cada $x \in (a, b) \cap A$, $x \neq x_0$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n = n(x)$, tal que $f^n(x) \notin (a, b) \cap A$.

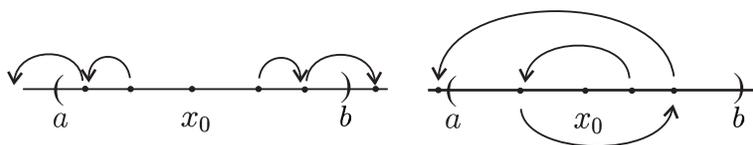


FIGURA 2.5: Ejemplos de punto fijo repulsor.

Obsérvese que la presencia de un punto fijo atractor, o repulsor, x_0 nos da información sobre la dinámica inducida por las iteraciones de la función f en un intervalo abierto que contiene al punto, es decir en una *vecindad* de x_0 . Si estamos ante un atractor, entonces los puntos cercanos tienen, todos ellos, órbitas que convergen al punto fijo. Por otro lado, si estamos ante un repulsor, entonces al menos sabemos que las órbitas de puntos cercanos *escapan* en un tiempo finito (que depende de cada punto) de una vecindad del punto fijo.

Existe una fuerte relación entre la derivada de la función f en un punto fijo $x_0 \in A$ y el hecho de que este punto sea atractor o repulsor. Hablamos de ella en la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0 .*

- i) Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.*
- ii) Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.*

Demostración. Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < 1.$$

Como $f(x_0) = x_0$, tenemos

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < 1.$$

Como la función valor absoluto es continua y f es derivable en x_0 , entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < 1.$$

Sea c un número real fijo tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < c < 1.$$

Existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < c,$$

y así,

$$|f(x) - x_0| < c|x - x_0|.$$

Como la distancia de x a x_0 es menor que δ , se sigue que $|f(x) - x_0| < \delta$. Por tanto

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$

Entonces podemos aplicar f al punto $f(x)$ y obtenemos que

$$|f^2(x) - x_0| \leq c |f(x) - x_0| < c^2 |x - x_0|.$$

Siguiendo este camino obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^n(x) - x_0| \leq c^n |x - x_0|.$$

Así para todo punto x del conjunto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ se tiene que $f^n(x)$ converge a x_0 cuando n tiende a infinito. Es decir, x_0 es un punto fijo atractor bajo f .

Si $|f'(x_0)| > 1$, desarrollamos un argumento similar al seguido antes. Tomamos c de tal manera que $1 < c < |f'(x_0)|$. Para este valor existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$, entonces

$$|f(x) - x_0| > c |x - x_0|.$$

Si sucede que para cada i , $0 \leq i \leq n$, las imágenes $f^i(x)$ se mantiene en el conjunto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, entonces

$$|f^n(x) - x_0| > c^n |x - x_0|.$$

Pero como $c > 1$, esta situación no se puede sostener por mucho tiempo. Es decir, debe existir $N \in \mathbb{N}$, que depende de x , tal que $f^N(x)$ se sale del conjunto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$.

Así x_0 es un punto fijo repulsor de f . □

En los ejercicios 2.4 y 2.5 se discuten algunas de las situaciones que se pueden presentar cuando la derivada de $f : A \rightarrow A$ en un punto fijo es, en valor absoluto, igual a 1. El hecho es que en una vecindad de un punto fijo donde la derivada de f se comporta de esa manera, las dinámicas presentes pueden ser muy diversas.

Si $f(x_0) = x_0$ y x_0 no es atractor ni repulsor, entonces decimos que x_0 es un *punto fijo neutro* de f .

Si $f(x_0) = x_0$ y la derivada de f en x_0 es 0, decimos que x_0 es un *punto fijo súper atractor* de f .

2.4. Análisis gráfico

Dedicamos esta pequeña sección a resaltar las bondades de una imagen.

Sean A un intervalo en \mathbb{R} y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Consideremos un punto $a \in A$ e imaginemos que nos preguntan sobre el comportamineto de los primeros pasos de su órbita $o(a, f)$. Si tenemos la suerte de tener a la mano la gráfica de f , entonces algo se puede hacer.

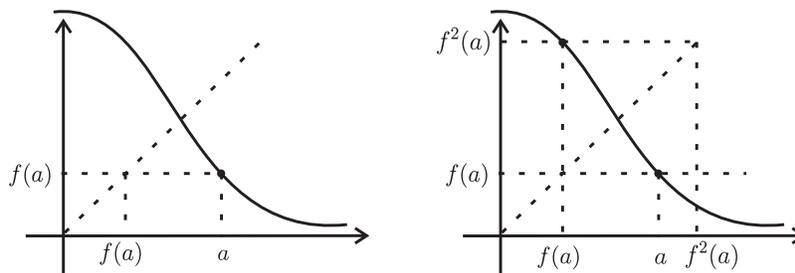


FIGURA 2.6: Dibujando los primeros elementos de la órbita de a .

La idea es poder colocar en el eje horizontal (eje- x) los primeros elementos de $o(a, f)$. En principio $f(a)$ es una altura, por tanto se representa en el eje vertical (eje- y). Para pasar esta información al eje- x trazamos una línea recta horizontal con altura $f(a)$. Al cruzar con la recta identidad $y = x$ encontramos el punto $(f(a), f(a))$. A partir de este punto una recta vertical nos lleva directamente al punto $f(a)$ en el eje- x .

Ahora aplicamos la función f al valor $f(a)$ y obtenemos la altura $f^2(a)$. Siguiendo el procedimiento descrito, ir a la recta $y = x$ y luego bajar verticalmente, podemos dibujar el valor $f^2(a)$ en el eje- x . Ver figura 2.6.

Ya tenemos los puntos a , $f(a)$ y $f^2(a)$, todos en el eje- x .

Podemos seguir este procedimiento varias veces más y así nos vamos dando una idea de cómo es el comportamineto inicial de la órbita del punto a bajo la acción de la función f .

Esta idea es conocida como *análisis gráfico* de una órbita, en este caso de la órbita $o(a, f)$.

2.5. Puntos periódicos

Definición 2.5. Sean $f : X \rightarrow X$ y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un *punto periódico* de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, decimos que $o(x, f)$ es una *órbita periódica*.

Sea $x_0 \in Per(f)$. Decimos que x_0 tiene *periodo* k si

$$k = \min \{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}.$$

Si x_0 es punto fijo de f , entonces $x_0 \in Per(f)$ y x_0 tiene periodo 1.

Si x_0 un punto periódico bajo f de periodo k con $k \geq 2$, entonces para cada $1 \leq j < k$ se tiene que $f^j(x_0)$ es distinto de x_0 .

En algunas ocasiones usamos esta notación: dado $n \in \mathbb{N}$,

$$Per_n(f) = \{x \in Per(f) : x \text{ es de periodo } n\}.$$

Así,

$$Per(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Per_n(f).$$

Si para un punto $x \in X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(x) \in Per(f)$, decimos que x es un *punto preperiódico* de f . En este caso también decimos que x tiene *órbita preperiódica*. A estos puntos también se les denomina *eventualmente periódicos*.

Ejemplo 2.6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x$.

Como la única solución a la ecuación $1 - x = x$ es $x_0 = \frac{1}{2}$, entonces f tiene un solo punto fijo. Por otro lado, $f^2(x) = x$ para todo punto x de \mathbb{R} . De aquí se sigue que todos los puntos distintos de $\frac{1}{2}$ son puntos periódicos bajo f de periodo 2. Obsérvese, además, que en este caso x_0 es un punto fijo neutro de f .

Sea A un intervalo en \mathbb{R} , digamos $A = [a, b]$. Un camino sencillo para construir ejemplos de funciones $f : A \rightarrow A$ que tengan alguna propiedad o característica deseada es el siguiente: Consideramos n puntos distintos en A , digamos a_1, a_2, \dots, a_n ; definimos $f(a_1)$, $f(a_2)$, y así sucesivamente hasta $f(a_n)$, teniendo cuidado de que estos valores, $f(a_i)$, $1 \leq i \leq n$, sean elementos de A . Luego, en cada intervalo de la forma (a_i, a_j) , donde a_i y a_j

son consecutivos, definimos f de tal manera que su gráfica sea el segmento de recta que une el punto $(a_i, f(a_i))$ con el punto $(a_j, f(a_j))$. Por último, si a_i es el mínimo de los puntos donde ya definimos f , definimos $f(x) = f(a_i)$ para los puntos que están en el intervalo $[a, a_i]$. Procedemos de manera análoga en el intervalo que termina en el punto b .

A estas funciones se les llama *lineales por partes*. Ellas están completamente definidas por los valores que asignamos a una cantidad finita de puntos en A . Un procedimiento semejante se puede seguir para construir funciones lineales por partes cuando el intervalo de definición no es acotado.

Si queremos construir una función que tenga un punto periódico de periodo n hacemos lo siguiente: Consideramos n puntos distintos en A , digamos a_1, a_2, \dots, a_n , y consideramos la función lineal por partes definida por

$$f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \dots, f(a_{n-1}) = a_n \quad \text{y} \quad f(a_n) = a_1.$$

La función resultante tiene estos puntos en su gráfica

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n), \quad \text{y} \quad (a_n, a_1),$$

y, claramente, tiene una órbita periódica de periodo n .

Ejemplo 2.7. Usando este método construimos una $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineal por partes con un punto periódico de periodo 3. Definimos $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ y $f(3) = 1$, y con ello f queda definida en el intervalo $[1, 3]$. Completamos la definición de f así: si $x < 1$, definimos $f(x) = 2$, y si $x > 3$, $f(x) = 1$.

En la figura 2.7 se muestra la gráfica de la $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ resultante.

Es inmediato que f tiene un punto periódico de periodo 3, y que todas las propiedades dinámicas interesantes de f se presentan en los puntos que pertenecen al intervalo $[1, 3]$.

Así como hay puntos fijos atractores o repulsores también podemos definir puntos periódicos atractores o repulsores. Sea $x_0 \in X$ un punto periódico de $f : X \rightarrow X$ de periodo N . Decimos que x_0 es atractor, tiene *órbita periódica atractora* bajo f , si x_0 es un punto fijo atractor de la función f^N . De manera análoga, decimos que x_0 tiene *órbita periódica repulsora* bajo f si x_0 es un punto fijo repulsor de la función f^N .

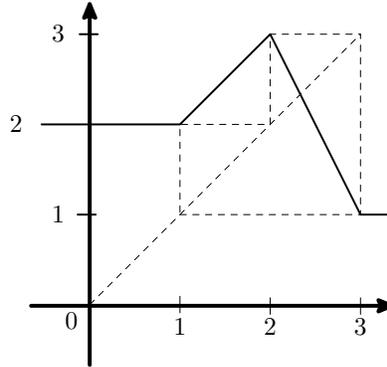


FIGURA 2.7: El punto $x_0 = 1$ es de periodo 3.

2.6. La *Tienda*

Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Es inmediato que T es una función continua en todo punto de \mathbb{R} . Esta función es conocida como la *Tienda*. Poco a poco iremos descubriendo las propiedades dinámicas de T . A pesar de lo sencillo que resulta definir la función *Tienda*, el sistema dinámico que ella induce es muy interesante. La gráfica de la función *Tienda* está en la figura 2.8.

Las tres afirmaciones contenidas en la siguiente proposición no son difíciles de demostrar. Invitamos al lector, en el ejercicio 2.12, a dar los argumentos necesarios.

Proposición 2.8. *Sea x un punto en \mathbb{R} .*

- *Si $x < 0$, entonces $o(x, T)$ es una sucesión decreciente. Además se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = -\infty$.*
- *Si $x > 1$, entonces $T(x) < 0$. Por lo tanto, en este caso también, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = -\infty$.*

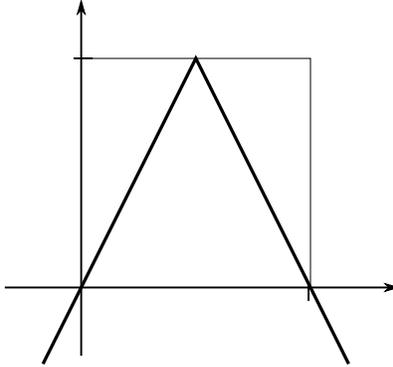


FIGURA 2.8: Gráfica de la función *Tienda*.

- Si $x \in [0, 1]$, entonces $T(x) \in [0, 1]$. Y, por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $T^n(x) \in [0, 1]$.

La primera conclusión es que la parte interesante de la dinámica inducida por $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sucede en el intervalo $[0, 1]$. De aquí en adelante centramos nuestra atención al estudio de las órbitas de T que inician en puntos de este intervalo. Es decir, nos dedicaremos al estudio de la restricción de T al intervalo $[0, 1]$, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Busquemos los puntos fijos de T . Si x es elemento del intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y es punto fijo de T , entonces, por un lado, $T(x) = x$ y, por el otro, $T(x) = 2x$. Por lo tanto, $2x = x$, y $x = 0$. Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ y x es un punto fijo de T , entonces $2 - 2x = x$, $x = \frac{2}{3}$. Observemos que estos puntos son los únicos dos puntos fijos de T .

Los puntos fijos de la función *Tienda*, 0 y $\frac{2}{3}$, son ambos repulsores ya que $T'(0) = 2$ y $T'(\frac{2}{3}) = -2$.

Mostramos a continuación la existencia de un punto periódico de periodo 2 para T .

Observemos que $\{\frac{1}{2}, 1\} \cap Per(T) = \emptyset$. Buscamos $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $T(x_0) \neq x_0$ y $T^2(x_0) = x_0$. Es inmediato que si un punto x_0 cumple estas dos condiciones, entonces $T(x_0)$ debe ser mayor que $\frac{1}{2}$. Como $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, entonces $T(x_0) = 2x_0$. Y dado que $T(x_0)$ es un punto del intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$, entonces

$$T^2(x_0) = T(T(x_0)) = 2 - 2(2x_0).$$

Por tanto, $T^2(x_0) = x_0$ implica

$$2 - 4x_0 = x_0.$$

Así, $x_0 = \frac{2}{5}$. La órbita bajo T de este punto es la siguiente sucesión:

$$o\left(\frac{2}{5}, T\right) = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \dots \right\}.$$

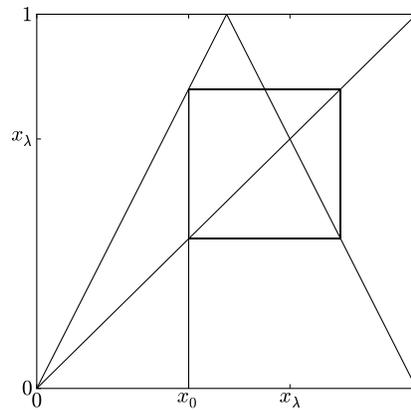


FIGURA 2.9: Órbita de periodo 2 en la *Tienda*.

En resumen, $\frac{2}{5} \in \text{Per}(T)$ y su periodo es 2. De hecho obtuvimos un poco más, resulta que $\frac{4}{5}$ también es un punto periódico bajo T y es de periodo 2.

Estamos, pues, ante una situación un poco más general: Si x es un punto periódico de la función $f : X \rightarrow X$ de periodo n , entonces cada punto en la órbita $o(x, f)$ es también un punto periódico de periodo n (ver ejercicio 2.11).

Ejercicios

Las siguientes definiciones serán útiles en los ejercicios que siguen y en el resto del texto. Aprovechamos esta sección para recordarlas. Sean X y Y dos espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre ellos. Decimos que f es:

- *inyectiva* si para todo par de puntos en X , digamos x y y , tales que $x \neq y$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$.
- *suprayectiva* si para todo punto $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
- *biyectiva* si $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva y suprayectiva.
- un *homeomorfismo* si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva y continua, y su inversa, $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es una función continua también.

Todas la funciones consideradas en los siguientes ejercicios son continuas.

EJERCICIO 2.1. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Demostrar que si f es suprayectiva, entonces f tiene, al menos, un punto fijo.

EJERCICIO 2.2. Mostrar, si es que existe, un homeomorfismo, $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ sin puntos fijos.

EJERCICIO 2.3. Mostrar, si es que existe, un homeomorfismo, $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ sin puntos fijos.

EJERCICIO 2.4. En cada uno de los siguientes casos f es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} , el 0 es punto fijo de f , y $f'(0) = 1$. Demostrar lo siguiente:

- si $f(x) = x + x^3$, entonces 0 es un punto repulsor;
- si $f(x) = x - x^3$, entonces 0 es un punto atractor; y
- si $f(x) = e^x - 1$, entonces para todo $x < 0$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$, y para todo $x > 0$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty$.

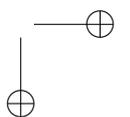
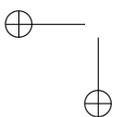
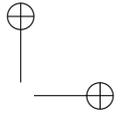
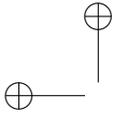
EJERCICIO 2.5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \text{sen}(x)$. Observemos que para todo x se tiene que $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$. Demostrar lo siguiente:

- Si $0 < x \leq 1$, entonces $0 < \text{sen}(x) < x$, y si $-1 \leq x < 0$, entonces $x < \text{sen}(x) < 0$. De aquí se sigue que 0 es el único punto fijo de f . *Sugerencia:* El Teorema del Valor Medio.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$.

EJERCICIO 2.6. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Encontrar todos los puntos periódicos de f .

EJERCICIO 2.7. Sea x_0 , $0 < x_0 < 1$. Mostrar una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$ y para todo $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$, $x \in \text{Per}_2(f)$.

EJERCICIO 2.8. Sean $I = [0, 1]$ y $f : I \rightarrow I$. Supongamos que f es biyectiva. Demostrar que:



- Se cumple una y sólo una de las siguientes dos opciones: Primera, $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Segunda, $f(1) = 0$ y $f(0) = 1$.
- Si $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, entonces para todo $x \in (0, 1)$ se tiene que la órbita de x es una sucesión monótona. Es decir, $f^n(x) \leq f^{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ó $f^n(x) \geq f^{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- f sólo puede tener puntos periódicos de periodo 1 o de periodo 2.

EJERCICIO 2.9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que si $Per(f) = \emptyset$, entonces una de las siguientes dos opciones se cumple:

- Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = -\infty$.

EJERCICIO 2.10. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $Per(f) = \emptyset$ y $Per(g) = \emptyset$. ¿Será cierto que $Per(f \circ g) = \emptyset$?

EJERCICIO 2.11. Si x es un punto periódico de la función $f : X \rightarrow X$ de periodo N , entonces cada punto en la órbita $o(x, f)$ es también un punto periódico de f de periodo N .

EJERCICIO 2.12. Demostrar las propiedades de la función *Tienda*, $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contenidas en la proposición 2.8.

EJERCICIO 2.13. Demostrar que la función *Tienda* tiene un punto periódico de periodo 3. Ver figura 2.10. ¿Cuántas órbitas de periodo 3 tiene T ?

EJERCICIO 2.14. Sea $x_0 \in Per(f)$. Supongamos que el periodo de x_0 es N . Sea $m \in \mathbb{N}$. Demostrar lo siguiente: $f^m(x_0) = x_0$ si y sólo si m es un múltiplo de N .

EJERCICIO 2.15. Sean $f : X \rightarrow X$, n y m números naturales, $n \neq m$, y x y y puntos periódicos bajo f de periodos n y m , respectivamente. Demostrar que las órbitas $o(x, f)$ y $o(y, f)$ son ajenas.

EJERCICIO 2.16. Sea $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $L(x) = 4x(1 - x)$. La gráfica de L , restringida al intervalo $[0, 1]$, se puede observar en la figura 2.11. Resulta que esta función induce uno de los sistemas dinámicos más interesantes, algo que iremos descubriendo a lo largo de este texto. Su nombre es *función Logística*.

Demostrar lo siguiente:

- Si $x < 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(x) = -\infty$.
- Si $x > 1$, entonces también se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(x) = -\infty$.

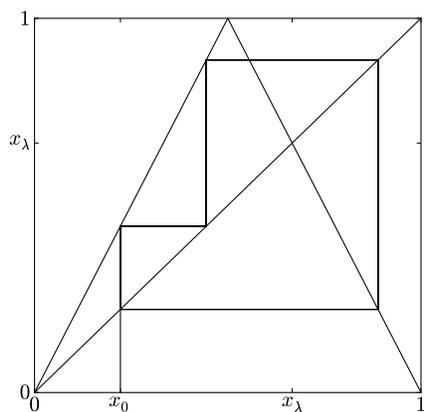


FIGURA 2.10: Órbita periódica de periodo 3 de la función *Tienda*.

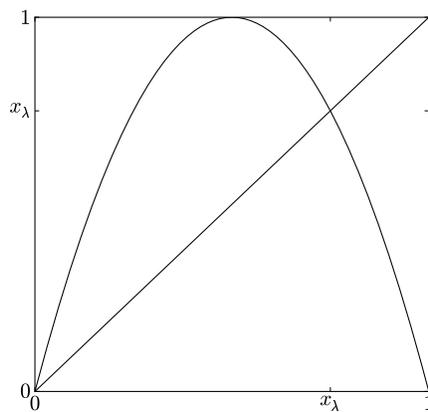


FIGURA 2.11: Gráfica de la función Logística $L(x) = 4x(1 - x)$ en $[0, 1]$.

- Si $x \in [0, 1]$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $L^n(x) \in [0, 1]$.
- Las restricciones $L|_{[0, \frac{1}{2}]} : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$ y $L|_{[\frac{1}{2}, 1]} : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, 1]$ son homeomorfismos.
- L tiene exactamente dos puntos fijos.

- L tiene al menos una órbita de periodo 2.
- L tiene al menos una órbita de periodo 3.

EJERCICIO 2.17. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en todo \mathbb{R} . Supongamos que existen dos puntos fijos de f , digamos a y b , $a < b$, tales que $|f'(a)| < 1$ y $|f'(b)| < 1$. Demostrar que f tiene al menos otro punto fijo c tal que $a < c < b$.

EJERCICIO 2.18. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes y $m < -1$. Demostrar lo siguiente:

- Para toda pareja x y y en \mathbb{R} y para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|f^n(x) - f^n(y)| = |m|^n |x - y|.$$

- f tiene un solo punto fijo, que llamaremos x_0 , y éste es repulsor.
- Para todo $x \neq x_0$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - x_0| = \infty.$$

EJERCICIO 2.19. Sean $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $a \in [0, 1]$. Si a es un punto periódico bajo f^2 de periodo 3, entonces a es punto periódico de f de periodo 3 o 6.

EJERCICIO 2.20. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ dada por

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right).$$

Demostrar lo siguiente:

- f tiene en $x_0 = 0$ un punto fijo repulsor.
- f tiene en $x_1 = -1$ un punto periódico de periodo dos.
- Existe $\delta > 0$ tal que si $-1 < x < -1 + \delta$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(-1)| = 0.$$

De aquí se sigue que para todo par de puntos $-1 < x, y < -1 + \delta$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

Este sencillo resultado adquiere relativa importancia en el capítulo 9.

EJERCICIO 2.21. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sean a , b y c en \mathbb{R} . Demostrar las siguientes afirmaciones:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(b) = a$ y $f(c) = b$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(c) = a$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(b) = \infty$ y $f(c) = b$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(c) = \infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(b) = -\infty$ y $f(c) = b$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(c) = -\infty$.

CAPÍTULO 3

La aventura de Sharkovskii I

En capítulos previos hemos visto ejemplos de funciones continuas con puntos periódicos de diversos periodos. La existencia de tales funciones invita a pensar si existe alguna relación, alguna ley causal, que obligue a una función a tener puntos periódicos de tales o cuales periodos pero no de otros. En términos más precisos: ¿Será que la existencia de un punto periódico de periodo n garantiza la existencia de otros puntos periódicos y, de ser así, de qué periodos son?

El caso de la función vista en el ejemplo 2.6 del capítulo 2 permite una primera respuesta a esta pregunta: la existencia de puntos de periodo 1 y 2 no implica la de otros periodos. El ejercicio 3.2 al final de este capítulo permite agregar algo más: si sólo se sabe que f tiene puntos de periodo 1, no se puede asegurar que tenga puntos de algún otro periodo.

Suscintamente podemos expresar estas conclusiones iniciales del modo siguiente: Denotamos por P_f al conjunto de periodos de órbitas periódicas de una función cualquiera $f : A \rightarrow A$, A un intervalo en \mathbb{R} . Es decir,

$$P_f = \{m \in \mathbb{N} : f \text{ tiene una órbita de periodo } m\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 1 \in P_f \text{ y } 2 \in P_f &\not\Rightarrow n \in P_f, \quad \text{con } n \geq 3; \\ 1 \in P_f &\not\Rightarrow n \in P_f, \quad \text{con } n \geq 2. \end{aligned}$$

Por otro lado, es fácil demostrar que si existen puntos de periodo $n \geq 2$, necesariamente existe algún punto de periodo 1 (ver la proposición 3.1 más adelante). Si $n > 2$ podríamos preguntarnos, también, si la existencia de un

28 3.1. LA CAJA DE HERRAMIENTAS Y EL TEOREMA DE LI-YORKE

punto periódico de periodo n implica la de uno de periodo 2. En particular, ¿si existe un punto de periodo 3, implica que haya puntos de periodo 2 (y por lo tanto, de periodo 1)?

Las posibilidades de preguntas concretas –englobadas en la pregunta inicial– son infinitas.

En 1962 el matemático ucraniano Oleksandr Mikolaiovich Sharkovskii estableció un sorprendente teorema que daba una respuesta completa a esta pregunta. Sharkovskii descubrió que hay un orden inherente a la presencia de puntos periódicos de una función continua; la existencia de una órbita de periodo $n > 1$ en una tal función, obliga necesariamente a la existencia de órbitas de otros periodos $k \neq n$. Sharkovskii determinó exactamente cuáles son esos otros periodos k obligados por la existencia de periodo n . Su trabajo no fue conocido de manera amplia en aquel entonces y en la década siguiente, dos matemáticos, Tien-Yien Li y James Yorke [28], descubrieron, en particular, en forma independiente de Sharkovskii, el extraordinario papel que juega la existencia de una órbita de periodo 3: ¡implica la existencia de órbitas de todos los periodos!

Dedicaremos este capítulo a estudiar estos resultados.

3.1. La caja de herramientas y el Teorema de Li-Yorke

A manera de preparativos para lo que viene, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sean A un intervalo en \mathbb{R} , y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Si f tiene un punto de periodo $n \geq 2$, entonces f tiene un punto de periodo 1.*

Demostración. Tomemos una órbita de periodo $n \geq 2$ y coloquemos sus n elementos de menor a mayor como sigue:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

Sabemos que $f(x_1)$ es alguno de los otros puntos de la órbita, por lo tanto $f(x_1) > x_1$. Con un argumento análogo para x_n , tenemos que $f(x_n) < x_n$, ver figura 3.1. Esto significa que, en la gráfica de f , el punto $(x_1, f(x_1))$

está por encima de la diagonal $y = x$ y el punto $(x_n, f(x_n))$ por abajo; por lo tanto, por el Teorema del Valor Intermedio, existe x_0 en el intervalo (x_1, x_n) tal que $f(x_0) = x_0$. \square

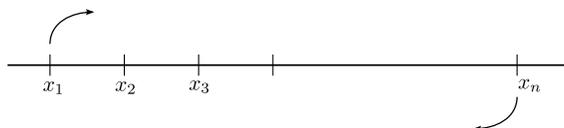


FIGURA 3.1: Órbita de periodo n .

Las siguientes dos proposiciones constituyen la herramienta básica del capítulo. La demostración de la primera de ellas la dimos en el capítulo 2.

Proposición 2.3. Sean A un intervalo en \mathbb{R} y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Sea $[a, b]$ un intervalo contenido en A . Si $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Proposición 3.2. Sean A un intervalo en \mathbb{R} y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Sean $[a, b]$ y $[c, d]$ dos intervalos contenidos en A . Si $[c, d] \subset f([a, b])$, entonces existe un subintervalo de $[a, b]$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, tal que $f([\alpha, \beta]) = [c, d]$.

Demostración. Damos sólo las ideas básicas de la argumentación y dejamos al lector completar los detalles; ver ejercicio 3.1.

Como $[c, d] \subset f([a, b])$, existen dos puntos en $[a, b]$, ξ y η , tales que $f(\xi) = c$ y $f(\eta) = d$.

Consideremos el caso $\xi < \eta$. Obsérvese que es posible que existan puntos distintos de ξ en el intervalo $[\xi, \eta]$ tales que su imagen bajo la función sea a . Sea α el mayor de estos puntos, es decir,

$$\alpha = \text{máx} \{x \in [\xi, \eta] : f(x) = a\}.$$

Ahora, como $[a, b] \subset f([\alpha, \eta])$, existen puntos en $[\alpha, \eta]$ tales que su imagen bajo la función es b . Sea β el mínimo de estos puntos, es decir,

$$\beta = \text{mín} \{x \in [\alpha, \eta] : f(x) = b\}.$$

Claramente $\alpha < \beta$.

30 3.1. LA CAJA DE HERRAMIENTAS Y EL TEOREMA DE LI-YORKE

Por la forma que escogimos a α y β tenemos que

$$f([\alpha, \beta]) = [c, d].$$

La otra posibilidad, $\eta < \xi$, se argumenta de manera similar. □

Para iniciar propiamente nuestra expedición por los caminos de Sharkovskii, vamos a demostrar, primero, el Teorema de Li-Yorke, el cual afirma que la existencia de periodo 3 garantiza la de todos los demás periodos.¹

Con ayuda de los resultados anteriores la demostración no es complicada; sin embargo, para fijar ideas empezaremos con un caso particular, que es la siguiente proposición.

Proposición 3.3. *Sean A un intervalo en \mathbb{R} y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Si f tiene una órbita de periodo 3, entonces f tiene una órbita de periodo 2.*

Demostración. Sea $a \in A$, supongamos que su órbita es de periodo tres, esto es, $o(a, f) = \{a, b, c\}$, con $a < b < c$. Existen dos formas de recorrer esta órbita. Ver figura 3.2.

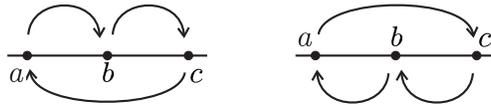


FIGURA 3.2: Órbita de periodo 3, dos posibles recorridos.

Tomemos el primer caso, el de la izquierda. La demostración para el segundo caso es similar.

Llamamos I al intervalo $[a, b]$ y J al intervalo $[b, c]$.

Como $f(a) = b$, $f(b) = c$ y $f(c) = a$, tenemos las siguientes contenciones:

$$J \subset f(I) \quad \text{y} \quad I \cup J \subset f(J). \tag{3.1}$$

Ver figura 3.3.

¹Utilizaremos frecuentemente la frase “la existencia de periodo n ”, como sinónimo de “la existencia de puntos periódicos de periodo n ”.

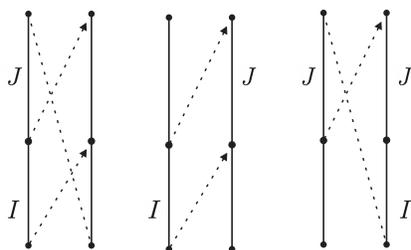


FIGURA 3.3: $J \subset f(I)$ y $I \cup J \subset f(J)$.

De la contención $I \cup J \subset f(J)$ y de la proposición 3.2 se sigue que existe un intervalo $A_1 \subset J$ tal que $f(A_1) = I$.

Asimismo, la contención $A_1 \subset J \subset f(I)$ implica la existencia de un intervalo $A_2 \subset I$ tal que $f(A_2) = A_1$. De aquí que $f^2(A_1) = I$, y con ello, $A_2 \subset f^2(A_2)$. Ver figura 3.4.

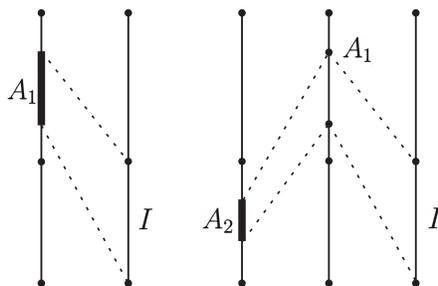


FIGURA 3.4: Intervalos A_1 y A_2 .

Por lo tanto, existe $x_0 \in A_2$ tal que $f^2(x_0) = x_0$. Este es nuestro candidato para punto periódico de periodo 2.

Como $x_0 \in A_2 \subset I$ y $f(x_0) \in A_1 \subset J$, entonces

$$f(x_0) \neq x_0 \quad \text{ó} \quad x_0 = b = f(x_0).$$

La segunda opción es imposible ya que b es de periodo 3.

Por lo tanto, la órbita de x cumple que

$$f(x_0) \neq x_0 \quad \text{y} \quad f^2(x_0) = x_0.$$

O sea que x_0 es de periodo 2. □

32 3.1. LA CAJA DE HERRAMIENTAS Y EL TEOREMA DE LI-YORKE

Teorema 3.4. (Li-Yorke) *Sea A un intervalo en \mathbb{R} . Si una función continua $f : A \rightarrow A$ tiene una órbita de periodo 3, entonces, f tiene una órbita de periodo n para todo número natural n .*

Demostración. Tomemos una órbita de periodo tres, $o(a, f) = \{a, b, c\}$, recorrida como en el caso que analizamos en la proposición 3.3. Y, como antes, definimos $I = [a, b]$ y $J = [b, c]$.

Sea $n \in \mathbb{N}$; demostraremos que f tiene una órbita de periodo n .

Dado que ya sabemos que

$$3 \in P_f \Rightarrow 2 \in P_f \Rightarrow 1 \in P_f,$$

podemos suponer que $n > 3$.

Como $I \subset f(J)$, existe un subintervalo cerrado $A_1 \subset J$ tal que $f(A_1) = I$. De $I \cup J \subset f(J)$ sabemos que existe $A_2 \subset J$ tal que $f(A_2) = A_1$.

De la misma contención se sigue que existe $A_3 \subset J$ tal que $f(A_3) = A_2$. Ver figura 3.5.

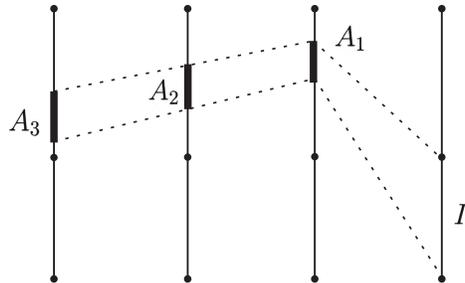


FIGURA 3.5: Intervalos A_1 , A_2 y A_3 .

Siguiendo este proceso definimos los intervalos A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , todos ellos contenidos en J , y tales que $f(A_i) = A_{i-1}$, $2 \leq i \leq n - 1$.

Como $A_{n-1} \subset J \subset f(I)$, existe $A_n \subset I$ tal que $f(A_n) = A_{n-1}$. Al final obtenemos el esquema de la figura 3.6.

La figura 3.7 muestra como queda nuestro dibujo si $n = 5$.

Por la forma en que fuimos construyendo los intervalos tenemos que

$$A_n \subset I = f^n(A_n).$$

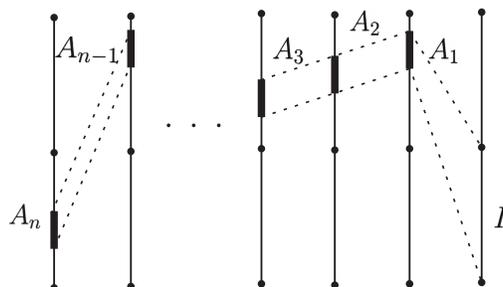


FIGURA 3.6: Intervalos de A_1 a A_n .

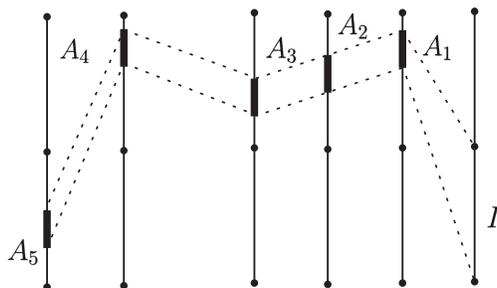


FIGURA 3.7: El caso n igual a 5.

Por la proposición 2.3, existe $x_0 \in A_n$ punto fijo de f^n , es decir, tal que $f^n(x_0) = x_0$.

Sólo resta convencernos de que el periodo de este punto x_0 es exactamente n . Obsérvese que $x_0 \in I$ y que para todo $j, 1 \leq j \leq n-1, f^j(x_0) \in J$.

Como $n > 3$, la cantidad de elementos consecutivos de la órbita de x_0 que están en J es $n-1 \geq 3$. De aquí que x_0 no es el punto b .

Los puntos $f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)$ pertenecen al intervalo $[b, c]$, por lo que

$$x_0 < b \leq f^j(x_0)$$

para j con $1 \leq j \leq n-1$.

Por lo tanto la órbita de x_0 es de periodo n . □

Corolario 3.5. *La función Tienda, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, tiene órbitas periódicas de todos los periodos.*

34 3.1. LA CAJA DE HERRAMIENTAS Y EL TEOREMA DE LI-YORKE

Demostración. La órbita del punto $\frac{2}{9}$ bajo la función T ,

$$o\left(\frac{2}{9}, T\right) = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \dots\right\},$$

es de periodo 3 (ver ejercicio 2.13, capítulo 2). Por tanto esta función tiene puntos periódicos de todos los periodos. \square

La función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, induce un sistema dinámico donde todos los movimientos periódicos posibles están presentes. Para obtener una órbita con un periodo n dado sólo hay que partir de la condición inicial adecuada. Todos estos puntos periódicos están contenidos en el intervalo $[0, 1]$.

Como se puede observar, tanto en la demostración de la proposición 3.3 como en la del teorema 3.4, hicimos uso repetidas veces de la proposición 3.2. Hacer esto será un recurso frecuente en este tema, por lo que conviene establecer la siguiente generalización de la proposición 3.2.

Proposición 3.6. *Sea f continua en un intervalo A y sean J_0, J_1, \dots, J_n intervalos compactos contenidos en A tales que*

$$f(J_i) \supseteq J_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Entonces, existe un intervalo compacto K contenido en J_0 tal que

$$f^i(K) \subseteq J_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1,$$

y $f^n(K) = J_n$.

Si además $J_0 \subseteq J_n$, entonces existe un punto $y \in J_0$ tal que $f^i(y) \in J_i$, para $i = 1, \dots, n-1$, y $f^n(y) = y$.

Demostración. La idea de la demostración de la primera parte de esta proposición es esencialmente la misma que la que utilizamos para demostrar el teorema 3.4. Aquí simplemente la formalizamos por inducción.

El caso $n = 1$ se sigue de la proposición 3.2.

Sea $n > 1$ y supongamos que la proposición es válida para $n-1$, es decir cuando tengamos n intervalos que cumplan la hipótesis.

Sean J_0, J_1, \dots, J_n tales que

$$f(J_i) \supseteq J_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Aplicamos la hipótesis de inducción a los intervalos J_1, \dots, J_n : entonces, existe un intervalo compacto $K_1 \subseteq J_1$ tal que

$$f^i(K_1) \subseteq J_{i+1} \quad \text{para } i = 1, \dots, n-2$$

y $f^{n-1}(K_1) = J_n$.

Por la proposición 3.2, existe un intervalo compacto $K \subseteq J_0$ tal que $f(K) = K_1$ y, consecuentemente,

$$f^i(K) = f^{i-1}(f(K)) = f^{i-1}(K_1) \subseteq J_i$$

para $i = 1, \dots, n-1$ y

$$f^n(K) = f^{n-1}(K_1) = J_n.$$

La segunda parte de la proposición se sigue de la primera y de la proposición 2.3. \square

3.2. El Teorema de Sharkovskii

Examinamos, para empezar, unos ejemplos ilustrativos. El primero nos muestra que periodo 4 no implica periodo 3. El segundo nos muestra que la existencia de todos los periodos pares no implica la existencia de un sólo periodo impar mayor que 1.

Ejemplo 3.7. Sean $I = [1, 4]$ y $f : I \rightarrow I$ una función lineal por partes definida por $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 4$ y $f(4) = 1$ (ver figura 3.8).

Por como está definida la función, $\{1, 2, 3, 4\}$ es una órbita periódica de periodo 4. Existe un único punto fijo $x_0 \in [2, 3]$ que es repulsor y claramente la órbita de todo punto $x \neq x_0$ en $[2, 3]$ eventualmente escapa de este intervalo (i.e., existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin [2, 3]$).

Asimismo, es fácil comprobar que $x_1 = \frac{3}{2}$ es un punto de periodo 2 y que, exceptuando la órbita de x_1 , todos los puntos en $[1, 2] \cup [3, 4]$ son de periodo 4 (ejercicio 3.3).

Por lo tanto, los únicos periodos presentes en f son 1, 2 y 4. Es decir, periodo 4 no implica periodo 3.

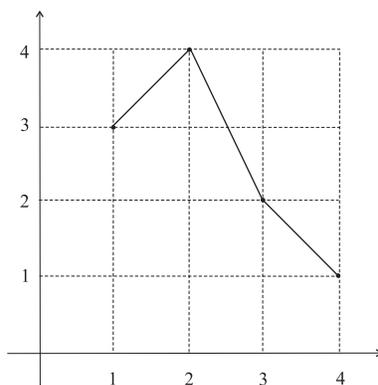


FIGURA 3.8: Periodo 4 no implica periodo 3.

Ejemplo 3.8. Sean $I = [0, 2]$ y $f : I \rightarrow I$ una función lineal por partes determinada por $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = 2$, $f(1) = 1$ y $f(2) = 0$. En la figura 3.9 aparecen las gráficas de f y de f^2

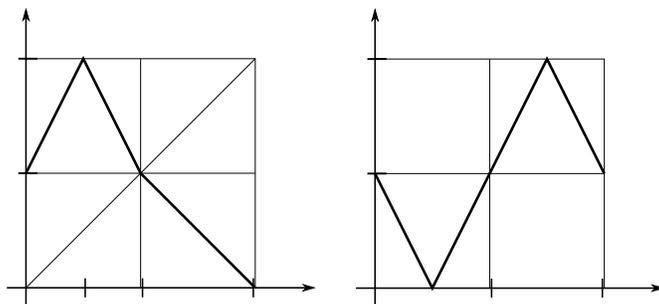


FIGURA 3.9: Gráficas de f y f^2 .

Nótese que

$$f([0, 1]) = [1, 2] \quad \text{y} \quad f([1, 2]) = [0, 1],$$

por lo que, a excepción del punto fijo $x_0 = 1$ las órbitas periódicas de f sólo pueden ser de periodo par.

Es fácil comprobar que la órbita de $\frac{1}{7}$ bajo f^2 es de periodo 3. Por consiguiente f^2 tiene órbitas de periodo n para todo número natural n , y como f no tiene órbitas de periodo impar mayor que 1, f tiene órbitas de periodo $2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, si $n > 1$ es impar y x_0 es de periodo n para f^2 , es decir

$$(f^2)^n(x_0) = f^{2n}(x_0) = x_0,$$

podría ser que x_0 fuese de periodo n para f , pero en este caso eso es imposible porque f no tiene puntos periódicos de periodo impar > 1 .

En conclusión, ¡ f admite todos los periodos pares y ningún impar $n > 1$!

No es casualidad que en el ejemplo 3.7 aparezcan los periodos 4, 2 y 1: es un hecho que siempre que exista periodo 4, habrá periodo 2. En general, siempre que exista periodo 2^k , con k mayor que 1, existirá también periodo 2^j para todo $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Proposición 3.9. *Si $f : A \rightarrow A$ es continua en un intervalo A y tiene una órbita de periodo 4, entonces f también tiene una órbita de periodo 2.*

Demostración. Sean

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

los elementos de la órbita de periodo 4 contenida en A .

Hay muchas maneras de que una función recorra una órbita de periodo 4 pero las podemos reducir a dos casos distintos:

(i) $f(\{x_1, x_2\}) = \{x_3, x_4\}$, o

(ii) uno de los 2 puntos x_1 o x_2 , va a dar —bajo f — al conjunto $\{x_3, x_4\}$,

pero el otro no.

Supongamos que ocurre el caso (i).

Denotemos al intervalo $[x_1, x_2]$ por I y al intervalo $[x_3, x_4]$ por J .

Como $f(\{x_1, x_2\}) = \{x_3, x_4\}$, tenemos que

$$f(\{x_3, x_4\}) = \{x_1, x_2\}$$

y, por lo tanto,

$$f(I) \supseteq J \quad \text{y} \quad f(J) \supseteq I.$$

En consecuencia, $f^2(I) \supseteq I$.

De acuerdo a las proposición 3.6 existe un intervalo compacto K contenido en I tal que

$$f(K) \subseteq J \quad \text{y} \quad f^2(K) = I \supseteq K.$$

Por la proposición 2.3, existe $x \in K$ punto fijo de f^2 , es decir, tal que $f^2(x) = x$. Como $f(x) \in J$ y $K \cap J = \emptyset$, $f(x) \neq x$, y concluimos que x es de periodo 2.

Consideremos ahora el caso (ii).

Hay dos posibilidades: que

$$f(x_1) \in \{x_3, x_4\} \quad \text{y} \quad f(x_2) < x_3,$$

o bien, que

$$f(x_2) \in \{x_3, x_4\} \quad \text{y} \quad f(x_1) < x_3.$$

Supongamos que ocurre la primera de éstas. Entonces, $f(x_2) = x_1$.

Hagamos ahora $I = [x_1, x_2]$ y $J = [x_2, x_3]$. Entonces,

$$f(I) \supseteq I \cup J \quad \text{y} \quad f(J) \supseteq I.$$

Nótese que ésta es una situación idéntica a la que encontramos cuando probamos la proposición 3.3 y el teorema 3.4 (véanse las condiciones en (3.1)). Razonando del mismo modo que ahí, se concluye que f tiene un punto de periodo 2 (de hecho tiene puntos de todos los periodos). La segunda posibilidad se demuestra en forma análoga y se deja al lector. \square

Corolario 3.10. *Si $f : A \rightarrow A$ es continua en un intervalo A y tiene una órbita periódica de periodo 2^k , con $k > 1$, entonces, para cada $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, f tiene una órbita periódica de periodo 2^j .*

La demostración puede hacerse por inducción a partir de la proposición 3.9 y la dejamos al lector (ejercicio 3.5).

Las proposiciones 3.1, 3.9 y el corolario 3.10 son casos particulares del Teorema de Sharkovskii. A su vez, los ejemplos 3.7 y 3.8 ilustran también aspectos particulares del mismo.

Vayamos al teorema general.

Considérese a los números naturales ordenados de la siguiente peculiar manera. Por conveniencia técnica denotamos a este orden con el símbolo \triangleright

y a todo el arreglo lo llamamos *Tabla S* o, simplemente, *TS*.

$$\begin{aligned}
 &3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \\
 &2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright 2 \cdot 9 \triangleright \dots \\
 &2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright 2^2 \cdot 9 \triangleright \dots \\
 &2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright 2^3 \cdot 9 \triangleright \dots \\
 &\dots \\
 &\dots \triangleright 2^5 \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.
 \end{aligned}$$

Tabla S

O sea, en el primer renglón de *TS* aparece la infinidad de números impares. En el segundo, estos mismos impares pero multiplicados por 2; en el tercero, los impares multiplicados por 2^2 , y así sucesivamente (en el $k + 1$ -ésimo renglón están los impares multiplicados por 2^k). Finalmente, en el renglón de hasta abajo aparecen todas las potencias de 2. Nótese que esta lista abarca a todos los números naturales y que el último renglón está en orden inverso al de todos los demás renglones.

Por definición, el símbolo \triangleright (que representa al orden Sharkovskiiiano) significa lo siguiente: $n \triangleright m$ si, y sólo si, m está en el mismo renglón que n pero a la derecha de éste, o en algún renglón abajo del renglón que ocupa n . Asimismo, $n \triangleright m$ si, y sólo si, n está en el mismo renglón que m pero a la izquierda de éste, o en algún renglón arriba del renglón que ocupa m . Es lo mismo escribir $n \triangleright m$ que $m \triangleleft n$.

El Teorema de Sharkovskii lo dividimos en tres partes y lo enunciamos como sigue:

Teorema 3.11. *Sea A un intervalo en \mathbb{R} . Sean n y m números naturales.*

i) Si una función continua $f : A \rightarrow A$ tiene un punto de periodo n y $n \triangleright m$, entonces f tiene un punto periódico de periodo m .

ii) Si $m \triangleright n$, entonces existe una función continua $f : A \rightarrow A$ que tiene periodo n pero no tiene periodo m .

iii) Existe una función continua $f : A \rightarrow A$ que tiene puntos periódicos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y no tiene puntos periódicos de ningún otro periodo.

Instamos al lector a detenerse un momento y reflexionar sobre el contenido de este impresionante teorema. En particular, obsérvese que, en efecto,

el teorema 3.4 así como otras proposiciones de este capítulo son un corolario inmediato de la parte (i) de este resultado.

Otro corolario interesante es que si una función tiene una infinidad de puntos periódicos de periodos diferentes, necesariamente tiene puntos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N}$. Asimismo, si sólo existe un número finito de puntos periódicos, el periodo de cada uno de éstos es una potencia de 2.

Las partes (ii) y (iii) juntas constituyen el recíproco de la parte (i) (abundaremos sobre este hecho más adelante).

Como señalamos anteriormente, tanto el teorema como la demostración originales se conocieron ampliamente entre la comunidad matemática mundial más de una década después de haber sido descubiertos por Sharkovskii.

A partir de esta difusión amplia ha proliferado una gran variedad de demostraciones usando técnicas diversas, muchas de ellas con la búsqueda de ser más simples o naturales que las previas. Por ejemplo véanse las referencias [43] y [17].

Una de las demostraciones más populares y accesibles fue la hecha por los matemáticos Block, Guckenheimer, Misiurewicz y Young en 1980, [9]. Esta demostración se basa en lo siguiente: en primer lugar, en un cuidadoso aprovechamiento de nuestra herramienta básica, especialmente la proposición 3.6. En segundo lugar, en un resultado establecido por P. Stefan en 1977, [42], y, en tercer lugar, en el uso del concepto de gráfica dirigida o digráfica asociada a una órbita periódica, cuya utilidad en este terreno fue establecida, en particular, por Straffin en 1978, [43].

Para ver la demostración completa de la parte (i) recomendamos al lector cualquiera de los textos [8], [14] y [35]. Aquí nos conformaremos, en el capítulo 4, con una breve incursión en el mundo de las digráficas, que ilustra las técnicas generales que se utilizan en dicha demostración. También en el capítulo 4 haremos las demostraciones completas de las partes (ii) y (iii) del teorema 3.11.

Concluimos este capítulo con una reformulación del Teorema de Sharkovskii que nos revela nítidamente el carácter recíproco entre la parte (i) y las partes (ii) y (iii) del mismo.

Agregamos el símbolo 2^∞ al inicio del último renglón de la *Tabla S*, con lo cual este renglón queda así:

$$2^\infty \triangleright \dots \triangleright 2^5 \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Se incorpora este símbolo al orden \triangleright de manera natural: Si $m \in \mathbb{N}$ está en cualquier renglón distinto del último, tenemos que $m \triangleright 2^\infty$. Si m es una potencia de 2, $2^\infty \triangleright m$.

Nótese que ahora, con el nuevo símbolo, en el orden \triangleright todo subconjunto de \mathbb{N} tiene supremo.

Para $m \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$, definimos al conjunto $S(m)$ como sigue:

$$S(m) = \{k \in \mathbb{N} : m \triangleright k \text{ o } m = k\}.$$

Nótese que $S(m)$ es un subconjunto de \mathbb{N} , no de $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$. En particular, $S(2^\infty)$ es el conjunto de todos los números naturales en el último renglón de TS , es decir, de todas las potencias de 2.

Recuérdese que denotamos por P_f al conjunto de periodos de órbitas periódicas de una función cualquiera $f : A \rightarrow A$.

Con esta terminología, a continuación reformulamos el Teorema de Sharkovskii.

Teorema 3.12. *Sea A un intervalo en \mathbb{R} . Para toda función continua $f : A \rightarrow A$, cuyo conjunto de puntos periódicos es no vacío, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ tal que $P_f = S(m)$.*

Recíprocamente, para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$, existe una función continua $f : A \rightarrow A$ tal que $P_f = S(m)$.

La primera afirmación se sigue de la parte (i) del teorema 3.11. Simplemente tomamos m como el supremo del conjunto

$$\{k \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\} : k \in P_f\}$$

en el orden de Sharkovskii; entonces $P_f = S(m)$.

La segunda afirmación (el recíproco de la primera) no es más que la combinación de las partes (ii) y (iii) del teorema 3.11.

Finalmente, cabe advertir que el Teorema de Sharkovskii depende fuertemente del orden de los números reales, por lo que no es válido en otros espacios métricos. Por ejemplo, en una rotación de 120 grados en la circunferencia unitaria, todos los puntos son periódicos de periodo 3; no hay puntos fijos ni puntos de ningún otro periodo. Y así, hay muchos otros ejemplos que dejamos a las propias averiguaciones del lector.

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas.

EJERCICIO 3.1. Demostrar que, en efecto, existen los puntos

$$\alpha = \text{máx} \{x \in [\xi, \eta] : f(x) = a\}$$

y

$$\beta = \text{mín} \{x \in [\alpha, \eta] \mid f(x) = b\}$$

que aparecen en la demostración de la proposición 3.2.

Demostrar, asimismo, que $\alpha < \beta$ y $f([\alpha, \beta]) = [c, d]$.

EJERCICIO 3.2. Sean $I = [0, 1]$ y $f : I \rightarrow I$. Demostrar que si f es creciente, entonces f sólo puede tener puntos de periodo 1. Es decir, f no tiene puntos de periodo $n > 1$.

EJERCICIO 3.3. En relación al ejemplo 3.7 comprobar que $x_1 = \frac{3}{2}$ es un punto de periodo 2 y que, exceptuando la órbita de x_1 , todos los puntos en $[1, 2] \cup [3, 4]$ son de periodo 4.

EJERCICIO 3.4. Sea $f : A \rightarrow A$ y sean J_0, J_1, \dots, J_n intervalos compactos contenidos en A tales que $f(J_i) \supseteq J_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Entonces, existe una colección anidada de n intervalos compactos $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n$, contenidos en J_0 , tales que $f^i(K_i) = J_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Si además $J_0 \subseteq J_n$, entonces existe un punto $y \in J_0$ tal que $f^i(y) \in J_i$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $f^n(y) = y$.

Como el lector puede notar, el resultado contenido en el ejercicio 3.4 tiene cierta diferencia con la proposición 3.6 (¿verdad?) y también puede usarse en la demostración de dicha proposición.

EJERCICIO 3.5. Sin recurrir al Teorema de Sharkovskii y utilizando solamente la proposición 3.9, demostrar el corolario 3.10. *Sugerencia:* Demostrar que $8 \in P_f$ implica $4 \in P_f$ a partir de que $4 \in P_f$ sí implica $2 \in P_f$.

EJERCICIO 3.6. Demostrar que entre dos puntos sucesivos de una órbita periódica de periodo $n > 1$, $o(x, f)$, existe un punto periódico de periodo menor que n . *Sugerencia.* Si a y b , $a < b$, son dos elementos sucesivos de la órbita $o(x, f)$, entonces el número de elementos de $o(x, f)$ que están a la izquierda de a es menor, en una unidad, que el número de elementos de $o(x, f)$ que están a la izquierda de b .

EJERCICIO 3.7. Sean n y m números naturales. Demostrar que

$$n \triangleright m \iff 2n \triangleright 2m.$$

Nótese que de aquí se desprende que, en general,

$$n \triangleright m \iff 2^k n \triangleright 2^k m$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

EJERCICIO 3.8. Sean $I = [0, 1]$ y $f : I \rightarrow I$. Sea $x_0 \in I$ y sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f^n(x_0)$. Demostrar que si una de las siguientes dos condiciones se cumple:

- $x_2 < x_0 < x_1$, y para todo $n \geq 2$, $x_n = x_2$,
- $x_1 < x_0 < x_2$, y para todo $n \geq 2$, $x_n = x_2$,

entonces f tiene puntos periódicos de todos los periodos. Ver figura 3.10.

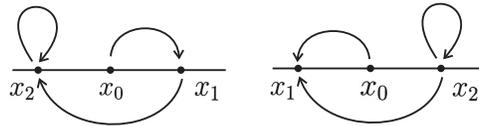


FIGURA 3.10: Órbitas que implican todos los periodos.

EJERCICIO 3.9. El conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ es una órbita de periodo 4 de la función lineal por partes $f : [1, 4] \rightarrow [1, 4]$ cuya gráfica aparece en la figura 3.11. Demostrar que f tiene órbitas periódicas de todos los periodos.

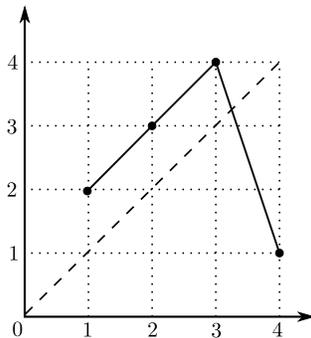
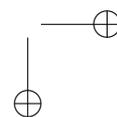
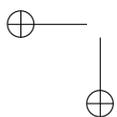
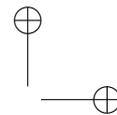


FIGURA 3.11: Órbita periódica de periodo 4.



CAPÍTULO 4

La aventura de Sharkovskii II

Lo prometido es deuda y, como dijimos en el capítulo anterior, en las primeras dos secciones de éste hacemos las demostraciones completas de las partes (ii) y (iii) del Teorema de Sharkovskii.

En la tercera sección presentamos el concepto de digráfica (de Markov) asociada a una órbita periódica y, con el fin de ilustrar técnicas que se utilizan en la demostración general de este poderoso teorema y en otras instancias de los sistemas dinámicos, hacemos una demostración de la parte (i) para un caso particular. En la cuarta sección regresamos a los ejemplos dados en las secciones previas pero ahora utilizando digráficas.

En el transcurso del capítulo procuramos proporcionar la bibliografía adecuada para que nuestro interesado lector complementamente debidamente el material aquí presentado.

Entonces, ¡a darle!

4.1. Los ejemplos ejemplares

Para mayor claridad, repetimos el enunciado de lo que vamos a demostrar a continuación. Como en el capítulo 3, el símbolo \triangleright representa el orden en \mathbb{N} dado por Sharkovskii (ver página 39).

Teorema 4.1. *Sea A un intervalo contenido en \mathbb{R} . Sean n y m números naturales.*

ii) Si $m \triangleright n$, entonces existe una función continua $f : A \rightarrow A$ que tiene periodo n pero no tiene periodo m .

iii) Existe una función continua $f : A \rightarrow A$ que tiene puntos periódicos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y no tiene puntos periódicos de ningún otro periodo.

La demostración es constructiva y consiste en exhibir, en cada inciso, ejemplos de funciones continuas con los requerimientos del caso.

Introducimos la siguiente notación que nos será sumamente útil en lo que sigue: Si I y J son dos intervalos compactos, dibujamos una flecha de I a J , $I \rightarrow J$, si, y sólo si, $f(I) \supseteq J$.

Probaremos primero el inciso (ii) para el caso en el que n es impar, es decir, para el primer renglón de *TS*. A fin de fijar ideas, empezamos con un caso particular: Damos un ejemplo de una función continua para la cual existe periodo $n = 5$ pero no existe periodo $m = 3$.

Ejemplo 4.2. Sea $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ una función lineal por partes definida en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ por $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 2$, $f(4) = 1$ y $f(5) = 3$ y lineal entre estos puntos (figura 4.1).

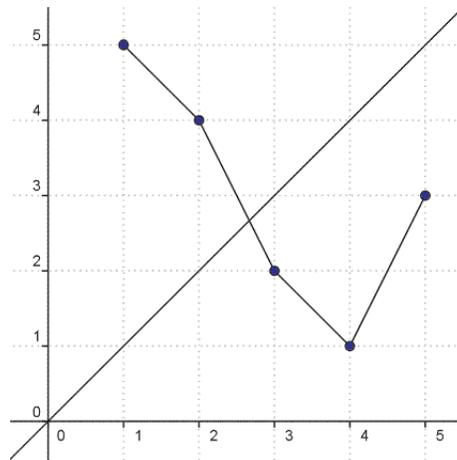


FIGURA 4.1: Periodo 5 no implica periodo 3.

Obviamente $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ es una órbita de periodo 5 de f .

De la gráfica se sigue que, aplicando f tres veces, el intervalo $[1, 2]$ recorre el siguiente camino:

$$[1, 2] \rightarrow [4, 5] \rightarrow [1, 3] \rightarrow [2, 5]$$

Por lo tanto, $f^3([1, 2]) = [2, 5]$, por lo que no puede existir un punto de periodo 3 en $[1, 2]$. En forma análoga se descarta la existencia de periodo 3 en los intervalos $[3, 4]$ y $[4, 5]$.

En $[2, 3]$ no sirve esta argumentación dado que

$$f^3([1, 2]) = [1, 5] \supseteq [1, 2].$$

De hecho, esto muestra que en $[2, 3]$ la función f^3 tiene un punto fijo. Sin embargo, f es decreciente, respectivamente, en los intervalos $[2, 3]$, $f([2, 3]) = [2, 4]$, y $f([2, 4]) = [1, 4]$ y dado que la composición, un número impar de veces, de funciones decrecientes es decreciente, se concluye que f^3 es decreciente en el intervalo $[2, 3]$.

En consecuencia, la función $f^3 : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ tiene un único punto fijo en dicho intervalo, que tiene que coincidir con el punto fijo de f . Por lo tanto, f tampoco tiene un punto de periodo 3 en $[2, 3]$.

Argumentando en forma parecida se puede comprobar que el siguiente ejemplo es de una función que tiene periodo $n = 7$ pero no tiene periodo $m = 5$. Ver ejercicio 4.1.

Ejemplo 4.3. Sea $f : [1, 7] \rightarrow [1, 7]$ una función lineal por partes determinada por $f(1) = 7$, $f(2) = 6$, $f(3) = 5$, $f(4) = 3$, $f(5) = 2$, $f(6) = 1$ y $f(7) = 4$ (figura 4.2).

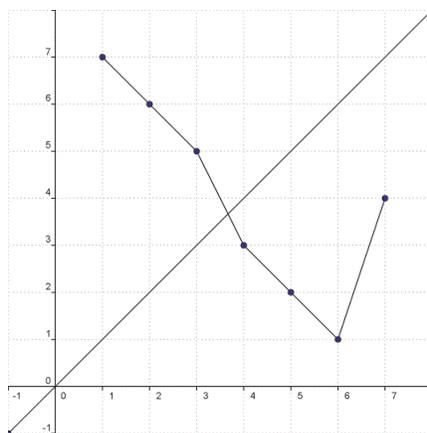


FIGURA 4.2: $f : [1, 7] \rightarrow [1, 7]$ tiene periodo 7 pero no periodo 5.

Podemos generalizar los ejemplos previos como sigue. Una definición primero:

Definición 4.4. Una órbita periódica de un punto a de periodo n impar, $n = 2m + 1$, se llama una *órbita o ciclo de Stefan* si está recorrida en el orden

$$f^{2m}(a) < f^{2m-2}(a) < \dots < f^2(a) < a < f(a) < \dots < f^{2m-3}(a) < f^{2m-1}(a), \quad (4.1)$$

o en el orden inverso

$$f^{2m-1}(a) < f^{2m-3}(a) < \dots < f(a) < a < f^2(a) < \dots < f^{2m-2}(a) < f^{2m}(a). \quad (4.2)$$

Nótese que la órbita de periodo 5 del ejemplo 4.2 y la de periodo 7 del ejemplo 4.3 son órbitas de Stefan y que cualquier órbita de periodo 3 es una órbita de Stefan.

Basándonos en este tipo de órbitas es posible construir, para cualquier número impar $n > 3$, una función que tiene una órbita de periodo n pero no tiene órbitas de periodos impares menores que n (y mayores que 1, naturalmente). Por su carácter general y su importancia, lo anunciamos como lema en lugar de como ejemplo.

Lema 4.5. *Para cada $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, existe una función continua $f : A \rightarrow A$, A intervalo en \mathbb{R} , que tiene periodo $2m + 1$ pero no tiene periodo $2m - 1$.*

Demostración. En virtud de los ejemplos 4.2 y 4.3 podemos suponer $m > 3$, aunque la construcción que damos es perfectamente general.

Sean $n = 2m + 1$, $A = [1, n]$ y $f : A \rightarrow A$ una función lineal por partes que permute al conjunto $\{1, \dots, n\}$ como una órbita de Stefan.

Por ejemplo, hacemos $a = m + 1$ y definimos f de modo que el conjunto $\{1, \dots, n\}$ quede recorrido en el orden inverso (4.2) señalado antes.

Es decir, definimos $f(m + 1) = m$, y para $1 \leq j \leq m$,

$$f^{2j}(m + 1) = m + (j + 1), \quad f^{2j-1}(m + 1) = m - (j - 1).$$

Las iteraciones pares nos quedan a la derecha de $a = m + 1$ y las impares a la izquierda.

En los intervalos determinados por la órbita $\{1, \dots, n\}$ completamos linealmente a f del modo obvio, ver figura 4.3.

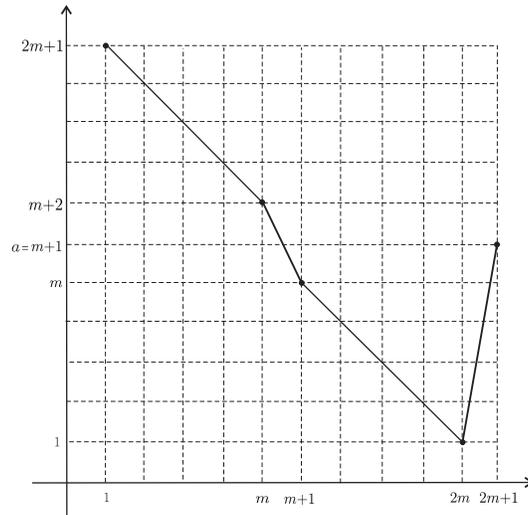


FIGURA 4.3

Introducimos los intervalos

$$I_1 = [f(a), a] = [m, m + 1],$$

y para $1 \leq j \leq m$,

$$I_{2j} = [f^{2j-2}(a), f^{2j}(a)] = [m + j, m + j + 1],$$

$$I_{2j+1} = [f^{2j+1}(a), f^{2j-1}(a)] = [m - j, m - (j - 1)].$$

Ver figura 4.4.

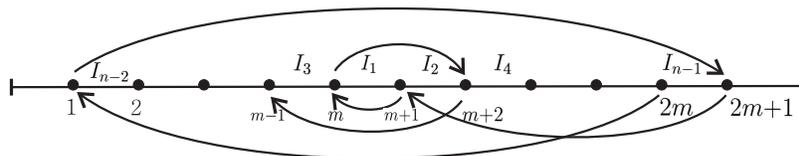


FIGURA 4.4

Obsérvese que sólo $f(I_1)$ y $f(I_{n-1})$ contienen más de uno de los intervalos I_j . Específicamente:

$$\begin{aligned} f(I_1) &= I_1 \cup I_2, \text{ y} \\ f(I_{n-1}) &= I_1 \cup I_3 \cup I_5 \cup \dots \cup I_{n-2} \quad (\text{índices impares}). \end{aligned}$$

Si $j \notin \{1, n-1\}$, entonces $f(I_j)$ es un único intervalo I_k con $k \neq j$.

Como se puede apreciar en la gráfica, el recorrido de I_1 , aplicando $n-2$ veces la función f , es como sigue:

$$\begin{aligned} I_1 &\rightarrow I_1 \cup I_2 \\ &\rightarrow I_1 \cup I_2 \cup I_3 \\ &\rightarrow \dots \\ &\rightarrow I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_{n-1} = I. \end{aligned}$$

Por lo que $f^{n-2}(I_1) \supseteq I_1$.

Como f es decreciente en cada uno de los intervalos hallados a lo largo de este recorrido, $f^{n-2} : A \rightarrow A$, que es composición impar de funciones decrecientes, es decreciente en I_1 . Por lo tanto, f^{n-2} tiene un único punto fijo en I_1 que necesariamente es el punto fijo de $f : A \rightarrow A$. Así que en I_1 no hay puntos periódicos de periodo $n-2$.

En forma parecida se puede comprobar que

$$f^{n-2}(I_{n-1}) = \bigcup_{j=1}^{n-2} I_j,$$

por lo que $f^{n-2}(I_{n-1}) \cap \text{int}(I_{n-1}) = \emptyset$. En consecuencia en I_{n-1} tampoco hay puntos periódicos de periodo $n-2$.

Por último, aplicando $n-2$ veces f a I_j con $2 \leq j \leq n-2$, obtenemos el siguiente recorrido del intervalo I_j :

$$I_j \rightarrow I_{j+1} \rightarrow I_{j+2} \rightarrow \dots \rightarrow I_{j+(n-2)},$$

donde los índices los interpretamos módulo $n-1$; así,

$$I_{j+(n-2)} = I_{j-1} \quad \text{y} \quad f^{n-2}(I_j) = I_{j-1}.$$

En consecuencia,

$$f^{n-2}(I_j) \cap \text{int}(I_j) = \emptyset,$$

por lo que en I_j no hay periodo $n-2$ bajo la función f . □

Con este lema hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- Existen funciones continuas que tienen periodo $n = 2m + 1$ pero no tienen periodo $2m - 1$, ($m > 1$).
- Por la parte (i) del Teorema de Sharkovskii, dichas funciones no tienen puntos periódicos de periodo impar menor que $n = 2m + 1$, pero tienen todos los demás periodos.

Hemos demostrado, entonces, la parte (ii) del Teorema de Sharkovskii para todos los números impares (mayores que 1), o sea, para todos los números del primer renglón de la *Tabla S*,

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots$$

Para demostrar el resto de la parte (ii) requerimos nueva herramienta, que presentamos en la siguiente sección.

4.2. La Duplicadora o Doble de una función

Dada cualquier función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es posible construir una función definida en el mismo intervalo, $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, con las siguientes características:

- F tiene un único punto fijo,
- exceptuando el punto fijo, todos los puntos periódicos de F son de periodo par,
- F tiene un punto de periodo $n = 2m$ si, y sólo si, la función original, f , tiene un punto periódico de periodo m .

En otras palabras, F duplica los periodos de los puntos periódicos de f . Por esta razón, a F se le suele llamar la *doble* o la *duplicadora* de f .

La construcción de $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ se puede llevar a cabo de diferentes maneras. Aquí procedemos como sigue: dividimos el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en nueve cuadrados iguales; colocamos, a escala, la gráfica de f en el cuadrado superior izquierdo y completamos la gráfica de F como se muestra en la figura 4.5 (compárese con el ejercicio 4.4).

Es fácil convencerse que la regla de correspondencia para F es así

52 4.2. LA DUPLICADORA O DOBLE DE UNA FUNCIÓN

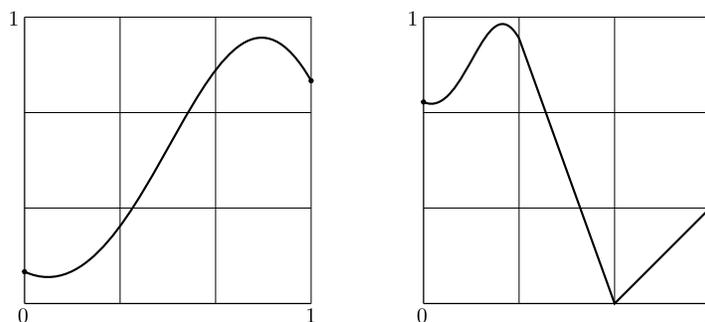


FIGURA 4.5: Izquierda: función a duplicar; derecha: función duplicada.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}f(3x) + \frac{2}{3}, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ [2 + f(1)](\frac{2}{3} - x), & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ x - \frac{2}{3} & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Nótese que F tiene un único punto fijo repulsor $x_0 \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y la órbita de cualquier otro punto $x \neq x_0$ en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ eventualmente escapa de este intervalo para introducirse en los intervalos complementarios.

Como

$$F\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) \subseteq \left[\frac{2}{3}, 1\right] \quad \text{y} \quad F\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right],$$

podemos concluir dos cosas:

- Una, que los puntos en $[0, \frac{1}{3}]$ o en $[\frac{2}{3}, 1]$ jamás escapan de la unión de estos dos intervalos. Por lo tanto las órbitas de puntos en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ que arribaron a ellos, no pueden regresar a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. En consecuencia, en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ no hay puntos periódicos distintos al punto fijo x_0 .
- Otra, es que F sólo puede tener puntos periódicos de periodo par y éstos sólo pueden estar en $[0, \frac{1}{3}]$ o en $[\frac{2}{3}, 1]$.

Las proposiciones 4.6, 4.7 y 4.8 describen la relación entre las propiedades dinámicas de f y F .

Proposición 4.6. *Sea $x \in [0, \frac{1}{3}]$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$,*

$$F^{2n}(x) = \frac{1}{3}f^n(3x)$$

Demostración. Procedemos por inducción.

Sea $x \in [0, \frac{1}{3}]$. Entonces,

$$F^2(x) = F(F(x)) = F\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}f(3x)\right).$$

Como

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}f(3x) \geq \frac{2}{3},$$

entonces

$$F\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}f(3x)\right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}f(3x)\right) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}f(3x).$$

Por lo tanto,

$$F^2(x) = \frac{1}{3}f(3x).$$

La afirmación queda demostrada para $n = 1$.

La suponemos ahora válida para n . Entonces, para $x \in [0, \frac{1}{3}]$,

$$\begin{aligned} F^{2(n+1)}(x) &= F^{2n}(F^2(x)) = F^{2n}\left(\frac{1}{3}f(3x)\right) \\ &= \frac{1}{3}f^n\left(3\left(\frac{1}{3}f(3x)\right)\right) = \frac{1}{3}f^{n+1}(3x). \end{aligned}$$

□

Proposición 4.7. *Si x es un punto de periodo n para f , entonces $\frac{1}{3}x$ es un punto de periodo $2n$ para F .*

Demostración. Sea $x \in \text{Per}(f)$ de periodo n .

En el caso $n = 1$ tenemos que $f(x) = x$. Como el punto $\frac{1}{3}x$ está en el intervalo $[0, \frac{1}{3}]$, entonces

$$F\left(\frac{1}{3}x\right) \in \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

54 4.2. LA DUPLICADORA O DOBLE DE UNA FUNCIÓN

Por tanto,

$$F\left(\frac{1}{3}x\right) \neq \frac{1}{3}x.$$

Por otro lado, por la proposición 4.6,

$$F^2\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}f\left(3\left(\frac{1}{3}x\right)\right) = \frac{1}{3}f(x) = \frac{1}{3}x.$$

Así el punto $\frac{1}{3}x$ es punto periódico de F de periodo 2.

Ahora, consideramos el caso $n > 1$.

Aquí $f^n(x) = x$, y para cada i con $1 \leq i < n$, se tiene que $f^i(x) \neq x$.

Paso uno. Como $\frac{1}{3}x \in [0, \frac{1}{3}]$,

$$F^{2n}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}f^n\left(3\left(\frac{1}{3}x\right)\right) = \frac{1}{3}f^n(x) = \frac{1}{3}x.$$

Paso dos. Para cada j impar con $1 \leq j < 2n$, $\frac{2}{3} \leq F^j(\frac{1}{3}x)$. En estos casos,

$$F^j\left(\frac{1}{3}x\right) \neq \frac{1}{3}x.$$

Ahora, si j es par, $1 \leq j < 2n$, entonces $j = 2m$ con $m < n$.

En este caso,

$$F^j\left(\frac{1}{3}x\right) = F^{2m}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}f^m\left(3\left(\frac{1}{3}x\right)\right) = \frac{1}{3}f^m(x).$$

Como $m < n$, $f^m(x) \neq x$. Así,

$$F^j\left(\frac{1}{3}x\right) \neq \frac{1}{3}x.$$

Por lo tanto $\frac{1}{3}x$ es un punto periódico de F de periodo $2n$. □

En el ejercicio 4.2 se invita al lector a dar los detalles de la demostración del siguiente resultado.

Proposición 4.8. *Sea $x \in [0, 1]$ un punto periódico de la función F .*

- *Si $x \in [0, \frac{1}{3}]$, entonces $3x$ es punto periódico de f .*

- Si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, entonces $3F(x)$ es punto periódico de f .

Recuérdese que denotamos por P_f al conjunto de periodos de órbitas periódicas de una función cualquiera $f : A \rightarrow A$.

De los resultados anteriores concluimos que si F es la doble de f , entonces

$$P_F = \{2m : m \in P_f\} \cup \{1\}.$$

Más aún, el número de órbitas de periodo $2n$ de F es exactamente el número de órbitas de periodo n de f .

Con este resultado a la mano retornamos a Sharkovskii.

Al final de la sección anterior se vió cómo demostrar la parte (ii) del Teorema de Sharkovskii para todos los números del primer renglón de TS (los impares),

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots$$

Veamos ahora qué podemos hacer, por ejemplo, con los números del segundo renglón. Específicamente, tomemos $n = 10 = 2 \cdot 5$. Queremos una función que tenga periodo 10 pero no tenga periodo $6 = 2 \cdot 3$ (ni periodos impares, pero esto será consecuencia de que no tenga periodo 6).

Pues está fácil.

Sea f la función del ejemplo 4.2 y F su doble.

La función f tiene periodo 5 –y en consecuencia todos los demás periodos que implica la parte (i)– y no tiene periodo 3. Por lo tanto su doble, F , tiene periodo 10, tiene todos los periodos n con $10 \triangleright n$, y no tiene periodo 6 (y por consiguiente no tiene periodos impares).

Si queremos una función que tenga periodo $n = 6 = 2 \cdot 3$ y periodo n para todo $6 \triangleright n$, duplicamos una función que tenga periodo 3.

Si duplicamos la función del ejemplo 4.3, que tiene periodo 7 y no tiene periodo 5, obtenemos una que tiene periodo $14 = 2 \cdot 7$ y no tiene periodo $10 = 2 \cdot 5$.

Está claro que con este procedimiento podemos demostrar la parte (ii) del Teorema de Sharkovskii para todos los pares de la forma $2m$ con m impar, que son los que aparecen en el segundo renglón de TS ,

$$2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright 2 \cdot 9 \triangleright \dots,$$

basta con duplicar una función que tenga periodo impar m pero no tenga periodo (impar) $m - 2$. Dicha función la podemos construir con base en una órbita de Stefan, como en el lema 4.5.

¿Y para los pares del tercer renglón?

$$2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright 2^2 \cdot 9 \triangleright \dots$$

Pues duplicamos una función apropiada del segundo renglón.

La idea general está clara: para probar la parte (ii) para un número par que está en renglón k -ésimo, $1 < k$, hay que duplicar una cierta función apropiada del renglón previo. Dejamos los detalles al lector (ejercicio 4.6).

Obsérvese, sin embargo, que recurriendo a la duplicadora no podemos obtener el último renglón de TS ,

$$\dots \triangleright 2^5 \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1,$$

a partir de algún renglón previo.

Pero podemos, de un modo simple, ir, paso a paso, construyendo funciones con periodos del último renglón: Empezamos con $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que tenga un único punto fijo y ningún otro punto periódico (por ejemplo, $f_1(x) = \frac{1}{3}$ para todo $x \in [0, 1]$). Construimos $f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, la doble de f_1 . La función f_2 tiene periodos 2 y 1 únicamente. Ahora duplicamos f_2 y obtenemos $f_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, que solamente tiene periodos 4, 2 y 1, y así nos seguimos.

Tras k duplicaciones obtenemos

$$f_{k+1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

con puntos periódicos de periodo $1, 2, \dots, 2^k$ y ningún otro periodo.

Es decir, la función f_{k+1} tiene periodo 2^k pero no tiene periodo n para todo $n \triangleright 2^k$.

En el capítulo 13 retomamos esta idea. Ahí daremos al lector más detalles sobre las propiedades dinámicas de las funciones $f_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

En conclusión, con lo hecho hasta aquí, hemos demostrado totalmente la parte (ii) del Teorema de Sharkovskii.

Sólo nos resta la demostración de la parte (iii):

Existe una función $f : A \rightarrow A$ que tiene puntos periódicos de periodo 2^j para todo $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y no tiene puntos periódicos de otros periodos.

Es decir, esta función tiene toda la infinidad de periodos del último renglón de TS pero ningún otro periodo. Construiremos una tal función en el siguiente lema.

Lema 4.9. *Existe una función continua, $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, sólo con puntos periódicos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Demostración. Sea $I = [0, 1]$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$I_k = \left[1 - \frac{1}{3^k}, 1 - \frac{2}{3^{k+1}} \right].$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos una función continua $f_k : I_k \rightarrow I_k$ que sólo tenga puntos periódicos de periodo 2^j con $0 \leq j \leq k$ (por ejemplo, tomamos f_k como en el párrafo previo, adecuadamente redefinida en intervalo I_k).

Definimos $f : I \rightarrow I$ haciendo $f(1) = 1$, $f(x) = f_k(x)$ si $x \in I_k$ y la completamos linealmente en el complemento de los intervalos I_k . En la figura 4.6 se muestra la gráfica de una función construida siguiendo esta idea.

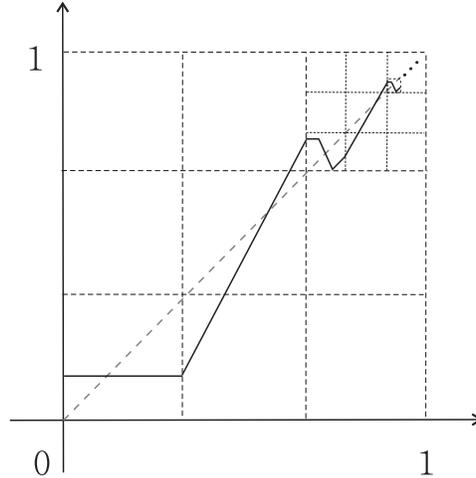


FIGURA 4.6: Función cuyos periodos son todas las potencias de 2.

Para demostrar que f tiene puntos periódicos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N}$, y sólo éstos, nótese que en cada uno de los intervalos que forman el

58 4.3. UNA INCURSIÓN FUGAZ AL MUNDO DE LAS DIGRÁFICAS

complemento de los intervalos I_k , la función f o coincide con la idéntica, $y = x$, o tiene a lo más un punto fijo repulsor. Por lo tanto, f tiene un punto de periodo $m > 1$ si, y sólo si, $f_k : I_k \rightarrow I_k$ tiene un punto de periodo $m > 1$ para algún k .

Como f_k sólo tiene periodos 2^j con $j \in \{1, \dots, k\}$, se sigue que f tiene puntos de periodo 2^k para todo k y no tiene puntos de ningún otro periodo (ver también el ejercicio 4.9). \square

Con este lema concluimos la demostración de las partes (ii) y (iii) del Teorema de Sharkovski.

4.3. Una incursión fugaz al mundo de las digráficas

La investigación sobre la existencia de puntos periódicos de una función continua $f : A \rightarrow A$ y, especialmente, la difusión del Teorema de Sharkovskii a finales de los años 60 del siglo pasado (*the fabulous 60's!*), propiciaron la aplicación del concepto de *gráfica dirigida* o *digráfica* asociada a una órbita periódica para analizar la *combinatoria* de una función; en particular, para demostrar la existencia de otras órbitas periódicas, como lo establece el Teorema de Sharkovskii.

Una de las maneras de asociar una *digráfica* a una órbita periódica es la siguiente: supongamos que

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

son los puntos de una órbita periódica de periodo n de una función $f : A \rightarrow A$, A un intervalo en \mathbb{R} . Para $1 \leq j < n$, hacemos $I_j = [x_j, x_{j+1}]$.

Los vértices de una digráfica asociada a esta órbita periódica van a ser los subintervalos I_j y dibujamos una flecha de I_j a I_k , $I_j \rightarrow I_k$ si y sólo si $f(I_j) \supseteq I_k$. La digráfica así construida se llama *gráfica de Markov* asociada a la órbita periódica. Para otra manera de construir una digráfica véase el ejercicio 4.10.

Por ejemplo, supongamos que a es un punto periódico de periodo 3 y su órbita está recorrida en el orden siguiente:

$$f^2(a) < a < f(a), \quad \text{con} \quad f^3(a) = a.$$

Haciendo

$$I_1 = [f^2(a), a] \quad \text{e} \quad I_2 = [a, f(a)],$$

las dos posibles digráficas asociadas a esta órbita se muestran en la figura 4.7.



FIGURA 4.7: Primer recorrido de periodo 3 y sus digráficas.

Las funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 4.8 ilustran estas posibilidades.

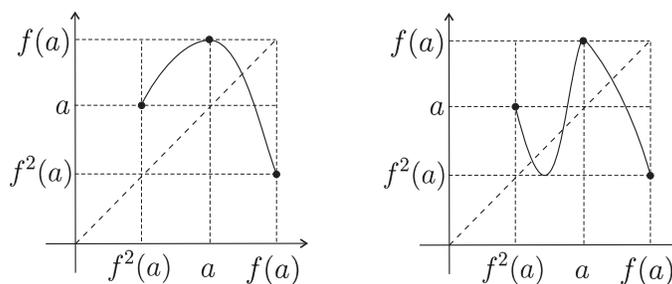


FIGURA 4.8

Si la órbita está recorrida en el orden $f(a) < a < f^2(a)$, haciendo

$$I_1 = [f(a), a] \quad \text{e} \quad I_2 = [a, f^2(a)],$$

también hay dos posibles digráficas, una idéntica a la que aparece a la derecha en la figura 4.7 y otra como se muestra en la figura 4.9.



FIGURA 4.9: Segundo recorrido de periodo 3 y sus digráficas.

60 4.3. UNA INCURSIÓN FUGAZ AL MUNDO DE LAS DIGRÁFICAS

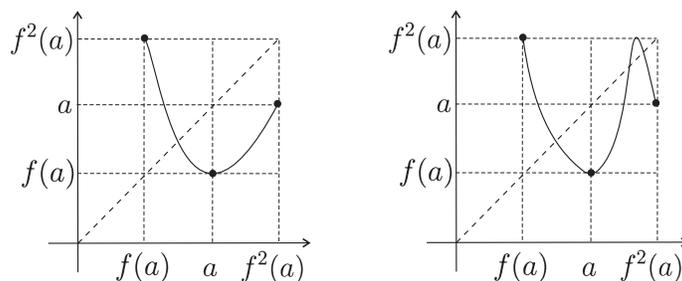


FIGURA 4.10

Las gráficas de las funciones correspondientes se ven en la figura 4.10.

Entonces, con la elección indicada de intervalos, hay 3 posibles digráficas distintas asociadas a una órbita de periodo 3. Ver figura 4.11.



FIGURA 4.11: Tres digráficas para periodo 3.

Nótese que, como digráficas, la última (extremo derecho, figura 4.11) contiene a las dos primeras. De modo que las conclusiones que obtengamos a partir de las primeras, valdrán para ella (abundaremos sobre esto en lo que sigue).

Para la función dada en el ejemplo 4.2 hacemos $I_j = [j, j + 1]$ para $j = 1, 2, 3$ y 4. Siguiendo, como en el ejemplo, el recorrido de estos intervalos bajo f , la digráfica asociada nos queda como en la figura 4.12.

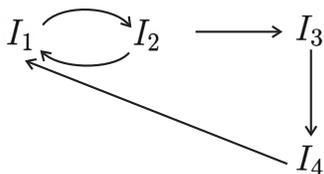


FIGURA 4.12: Digráfica para órbita de Stefan de periodo 5.

La función cuya gráfica se observa en la figura 4.13, al igual que la del ejemplo 4.2, tiene una órbita de Stefan de periodo 5 recorrida en el orden

$$f^3(a) < f(a) < a < f^2(a) < f^4(a).$$

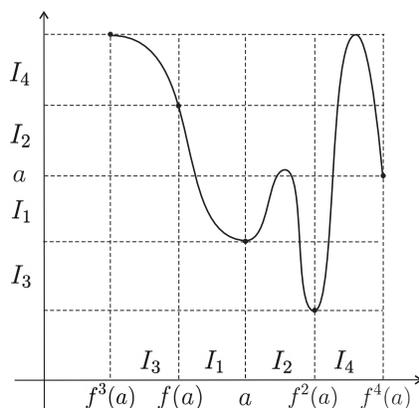


FIGURA 4.13

En este caso seleccionamos los subintervalos como sigue:

$$I_1 = [f(a), a], \quad I_2 = [a, f^2(a)],$$

$$I_3 = [f^3(a), f(a)], \quad I_4 = [f^2(a), f^4(a)]$$

La digráfica correspondiente se muestra en la figura 4.14.

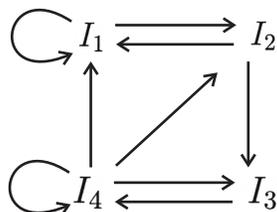


FIGURA 4.14

62 4.3. UNA INCURSIÓN FUGAZ AL MUNDO DE LAS DIGRÁFICAS

Para una generalización del ejemplo anterior, recomendamos al lector que en este momento dibuje la digráfica asociada a la función definida en el lema 4.5, seleccionando los intervalos como ahí se indica.

Un ciclo de longitud m en una digráfica es de la forma

$$I_{j_1} \rightarrow I_{j_2} \rightarrow \cdots \rightarrow I_{j_m} \rightarrow I_{j_1} \tag{4.3}$$

donde los I_{j_k} son intervalos que aparecen en la digráfica.

Por la proposición 3.6, página 34, la existencia de un tal ciclo contenido en una digráfica implica la existencia de un punto fijo de f^m en I_{j_1} . Este punto puede ser de periodo exactamente m o de algún divisor de m . Esto último ocurre, en particular, si el ciclo (4.3) es una repetición, un número entero de veces, de algún ciclo de longitud menor. Por ejemplo, si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, entonces el ciclo

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$$

revela la existencia de un punto de periodo 2 no de uno de periodo 4.

Para ilustrar el uso y la importancia de las digráficas, vamos a demostrar la parte (i) del Teorema de Sharkovskii para un caso particular.

Lema 4.10. *Supongamos que una función continua $f : A \rightarrow A$, A intervalo en \mathbb{R} , tiene una órbita de Stefan de periodo impar $n = 2k + 1$ para algún $k \geq 1$. Entonces, si $n \triangleright m$, f tiene una órbita de periodo m .*

Con el orden usual en \mathbb{N} , este lema nos dice que si f tiene una órbita de Stefan de periodo $n = 2k + 1$, entonces tiene todos los periodos impares mayores que n y todos los periodos pares.

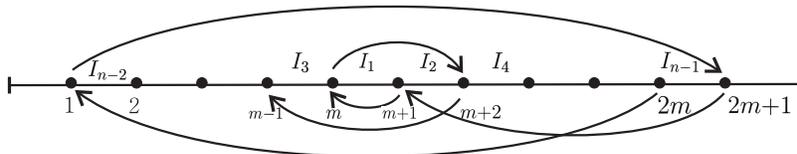
Demostración. Supongamos que la órbita de Stefan está dada por (4.2),

$$f^{2m-1}(a) < f^{2m-3}(a) < \cdots < f(a) < a < f^2(a) < \cdots < f^{2m-2}(a) < f^{2m}(a).$$

Seleccionamos los intervalos de modo análogo a la forma en que lo hicimos en el lema 4.5: Definimos

$$I_1 = [a, f(a)], \quad I_j = [f^{j-2}(a), f^j(a)]$$

para j par, $2 \leq j \leq n - 1$, e $I_j = [f^j(a), f^{j-2}(a)]$ para j impar, $3 \leq j \leq n - 2$. Véase de nuevo la figura 4.4, recordando que $a = m + 1$.



En cualquier caso, para j par o impar, el intervalo I_j tiene como extremos a los puntos $f^j(a)$ y $f^{j-2}(a)$.

Primero veamos qué podemos decir de la digráfica correspondiente.

Como $I_1 \cup I_2 \subset f(I_1)$, existe una flecha de I_1 a sí mismo y de I_1 a I_2 .

Ahora, si $2 \leq j \leq n-1$, los intervalos I_j a la izquierda de I_1 (con índice j impar) cubren, bajo la función, a los intervalos I_j del lado derecho (con índice j par), y viceversa.

En cualquier caso, con j par o impar, tenemos que $f(I_j) \supset I_{j+1}$, por lo que existe una flecha de I_j a I_{j+1} . Así, la secuencia

$$I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1} \tag{4.4}$$

está contenida en la digráfica.

Por último,

$$f(I_{n-1}) \supseteq I_1 \cup I_3 \cup I_5 \cup \cdots \cup I_{n-2},$$

por lo que existe una flecha de I_{n-1} a I_k para todo k impar menor que n ; es decir,

$$I_{n-1} \rightarrow I_{2i+1}$$

para $0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$.

Con toda esta información reunida, la digráfica asociada a la órbita de periodo n contiene una subdigráfica organizada como se ve en la figura 4.15.

Si el lector siguió la recomendación de construir la digráfica asociada a la función definida en el lema 4.5 notará que es idéntica a esta subdigráfica.

Supongamos que m es un número par menor que n . Entonces, $n-m$ es impar y el ciclo

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-m} \rightarrow I_{n-m+1} \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \tag{4.5}$$

está contenido en la tal subdigráfica y es de longitud m .

Por lo tanto, existe $x_m \in I_1$ tal que $f^m(x_m) = x_m$.

64 4.3. UNA INCURSIÓN FUGAZ AL MUNDO DE LAS DIGRÁFICAS

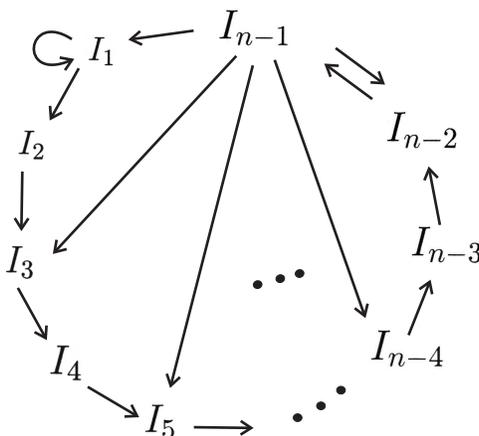


FIGURA 4.15

Nótese que x_m no puede ser un extremo de I_{n-1} (porque $m < n$ y los extremos son de periodo n). Por lo tanto, x_m está en el interior de I_{n-1} y necesariamente es de periodo exactamente m .

Tomemos ahora cualquier natural $m > n$.

A partir de la subdigráfica de la figura 4.15 formamos el ciclo

$$I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \quad (4.6)$$

en el que el intervalo I_1 está repetido $m - n$ veces al principio.

Este ciclo es de longitud m . En consecuencia, existe un punto $\xi_m \in I_1$ tal que $f^m(\xi_m) = \xi_m$.

Dejamos al lector demostrar que el punto ξ_m es de periodo exactamente m bajo la función $f : A \rightarrow A$ (ejercicio 4.8). \square

Es común, cuando se hace la demostración completa del Teorema de Sharkovskii, que el lema 4.10 aparezca como un corolario que se desprende de un resultado descubierto precisamente por el matemático P. Stefan en 1977. Él demostró lo siguiente:

Teorema 4.11. (Stefan) Si una función continua $f : A \rightarrow A$, $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo, tiene una órbita de periodo impar n y no tiene órbitas de periodos

impares menores que n , entonces la órbita de periodo n está ordenada como en (4.1) o como en (4.2).

Justo por este resultado este tipo de órbitas pasaron a ser conocidas como *ciclos de Stefan*.

No vamos a demostrar aquí este interesante teorema pero sí lo vamos a usar. Para una demostración del Teorema de Stefan, ver, por ejemplo, [8], página 10.

Combinando el teorema 4.11 con el lema 4.10 obtenemos una demostración completa de la primera parte del Teorema de Sharkovskii para todos los números impares.

Corolario 4.12. *(Teorema de Sharkovskii para los impares). Sea $f : A \rightarrow A$ una función continua en el intervalo A . Sea $n \in \mathbb{N}$ un número impar mayor que 1. Si f tiene una órbita de periodo n , entonces f tiene órbitas de todos los periodos pares y de todos los periodos impares mayores que n .*

Demostración. Sea n un número impar mayor que 1 tal que $f : A \rightarrow A$ tiene una órbita periódica de periodo n . Si n no es el menor periodo impar de las órbitas periódicas que tiene f , nos fijamos en $n - 2$. Si este número tampoco es el menor periodo impar que tiene f nos fijamos en $n - 4$. Y así sucesivamente.

Existe entonces $q \geq 3$ impar mínimo en el sentido de que f ya no tiene órbitas de periodos impares (distintos de 1) menores que q . Por el lema 4.10 y el teorema 4.11, $f : A \rightarrow A$ tiene órbitas de todos los periodos pares y de todos los periodos impares mayores que q , y el resultado se sigue. \square

4.4. Regreso a los ejemplos usando digráficas

El lema 4.5 –y con ello la parte (ii) del Teorema de Sharkovskii para los números impares–, también lo podemos demostrar recurriendo al uso de digráficas. Ello se debe a la naturaleza de la función propuesta en dicho lema. Resulta que ella cumple la condición de ser monótona en los correspondientes intervalos I_j . Como veremos, ésta es una propiedad muy útil.

Empezaremos por la siguiente proposición.

Proposición 4.13. *Sean $k \in \mathbb{N}$, $n = 2k + 1$, $A = [1, n]$ y $f : A \rightarrow A$ la función lineal por partes construida en la demostración del lema 4.5.*

Esta función tiene una órbita de Stefan de periodo impar n . Si la función $f : A \rightarrow A$ tiene un punto periódico de periodo m , con $m \neq n$, entonces la digráfica correspondiente contiene un ciclo de longitud m .

Demostración. Supongamos que $\xi \in A$ es un punto de periodo m de f , con $m \neq n = 2k + 1$. Entonces, ξ está en el interior de alguno de los intervalos I_j , digamos en $I_{j_1} = [x_{j_1}, x_{j_1+1}]$ con j_1 algún entero entre 1 y $n - 1$ donde x_{j_1}, x_{j_1+1} son dos puntos consecutivos de la órbita de periodo n .

Nótese que ningún punto de la órbita de ξ puede ser extremo de algún subintervalo I_j .

Por la monotonía de f en cada intervalo I_j , $f(\xi)$ es un valor situado entre $f(x_{j_1})$ y $f(x_{j_1+1})$. Estos dos puntos son extremos de un intervalo I que es unión de ciertos subintervalos que aparecen en la digráfica. Por lo tanto, existe un subintervalo I_{j_2} , con j_2 algún entero entre 1 y $n - 1$, tal que $I_{j_1} \rightarrow I_{j_2}$ y $f(\xi) \in \text{int}(I_{j_2})$.

Continuando de esta manera, para $2 < l < m$, existe un subintervalo I_{j_l} tal que $I_{j_{l-1}} \rightarrow I_{j_l}$ y $f^l(\xi) \in \text{int}(I_{j_l})$.

Como el punto ξ es de periodo m , recorre el ciclo

$$I_{j_1} \rightarrow I_{j_2} \rightarrow \cdots \rightarrow I_{j_{m-1}} \rightarrow I_{j_1}$$

que, por lo expuesto, está contenido en la digráfica. □

Corolario 4.14. *La función dada en el lema 4.5 y en la proposición 4.13 no tiene órbitas de periodo $2k - 1$. En consecuencia, no tiene órbitas de periodo impar menor que $n = 2k + 1$.*

Demostración. Como el lector puede constatar, la digráfica en la figura 4.15 no contiene ciclos de periodo $2k - 1$. Por lo tanto, f no puede tener puntos periódicos de periodo $2k - 1$.

Por la parte (i) del Teorema de Sharkovskii, f no tiene puntos periódicos de periodo impar menor que n . □

Un comentario final antes de irnos a los ejercicios del capítulo. La riqueza de ideas y procedimientos que nos ha dejado el estudio del Teorema de Sharkovskii es sorprendente. A pesar de ello, lo que hemos presentado al lector hasta el momento es una breve introducción a este vasto tema. En la sección 7.2 del capítulo 7, página 100, a partir de las propiedades dinámicas de la función *Tienda*, presentaremos una nueva colección de ejemplos que

nos permitirán demostrar, de nuevo, las partes (ii) y (iii) de este importante teorema.

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas.

EJERCICIO 4.1. Con una argumentación semejante a la del ejemplo 4.1, demostrar que la función del ejemplo 4.3 tiene periodo 7 pero no tiene periodo 5. Demostrar ahora lo mismo, pero usando una digráfica asociada a la función.

EJERCICIO 4.2. Demostrar la afirmación contenida en la proposición 4.8.

EJERCICIO 4.3. Para $m \in \mathbb{N}$, usando una órbita de Stefan distinta a la del lema 4.5, construir una función que tenga periodo $2m + 1$ pero no tenga periodo $2m - 1$. Dibujar también la digráfica asociada.

EJERCICIO 4.4. Sean $I = [0, 1]$ y $f : I \rightarrow I$ una función. Sea $J = [0, 3]$. Construimos una función $F : J \rightarrow J$ como sigue: Dividimos $J \times J$ en 9 cuadrados iguales; en la parte superior izquierda colocamos la gráfica de f , definimos $F(2) = 0$, $F(3) = 1$ y en el resto del intervalo J completamos linealmente la gráfica.

Hacer un dibujo de F , dar su regla de correspondencia y demostrar los resultados análogos a los contenidos en las proposiciones 4.6, 4.7 y 4.8 para F . Concluir que F es, también, una duplicadora.

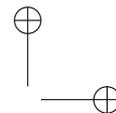
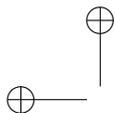
EJERCICIO 4.5. Dar un ejemplo de una función con periodo 342 pero sin periodos previos en el orden de Sharkovskii. Es decir, describir un camino para su construcción.

EJERCICIO 4.6. Escribir los detalles de la demostración de la parte (ii) del teorema 4.1 para el renglón k de TS .

EJERCICIO 4.7. Demostrar que el conjunto de puntos periódicos de la función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada en el ejemplo 4.9 es cerrado. ¿Podría dar un ejemplo semejante pero tal que su conjunto de puntos periódicos no sea cerrado? (Vea el capítulo 13).

EJERCICIO 4.8. Demostrar que el punto ξ_m tal que $f^m(\xi_m) = \xi_m$ que aparece en el lema 4.10 es de periodo exactamente m .

EJERCICIO 4.9. Supongamos que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ son los puntos de una órbita periódica de periodo n de una función $f : A \rightarrow A$. Demostrar que para algún entero



68 4.4. REGRESO A LOS EJEMPLOS USANDO DIGRÁFICAS

j , con $1 \leq j < n$, hay una flecha del intervalo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ a sí mismo. Es decir, la digráfica contiene un *ciclo trivial* de la forma

$$I_j \rightarrow I_j \quad \text{para alguna } j, 1 \leq j < n.$$

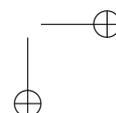
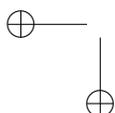
Sugerencia: ¿Es vacío el conjunto $B = \{j \in \{1, \dots, n-1\} : f(x_j) > x_j\}$?

EJERCICIO 4.10. Otra manera de asociar una digráfica a una órbita periódica de una función $f : A \rightarrow A$ es la siguiente: Supongamos, como en el ejercicio 4.9, que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ son los puntos de una órbita periódica de periodo n de una función $f : A \rightarrow A$. Si $I_j = [x_j, x_{j+1}]$, $1 \leq j < n$, denota a uno de los intervalos, dibujamos una flecha de I_j a I_k , $I_j \rightarrow I_k$, si, y sólo si, I_k está contenido en el intervalo J cuyos extremos son $f(x_j)$ y $f(x_{j+1})$.

Obsérvese que este intervalo J es (por lo general) unión de varios intervalos I_k y puede ser de la forma $[f(x_j), f(x_{j+1})]$, o de la forma $[f(x_{j+1}), f(x_j)]$.

A este tipo de digráfica la llamaremos una *P-gráfica*.

- Hacer la *P-gráfica* asociada a la función que aparece en la figura 4.13.
- Demostrar que sólo hay dos posibles *P-gráficas* asociadas a una órbita de periodo 3.
- Demostrar que una *P-gráfica* siempre está contenida en la digráfica de Markov asociada a la misma órbita periódica.
- Demostrar que el ejercicio 4,9 también es válido para *P-gráficas*.
- Demostrar que si una función $f : A \rightarrow A$ es monótona en cada intervalo I_j , la *P-gráfica* coincide con la digráfica de Markov.



CAPÍTULO 5

Nociones básicas de cálculo y topología

Al avanzar en el estudio de las distintas propiedades de los sistemas dinámicos discretos, las técnicas y las herramientas que utilizamos se van haciendo más sofisticadas. Las demostraciones que presentamos en los siguientes capítulos, las observaciones y comentarios que haremos, y los ejercicios y problemas que plantearemos hacen necesario que nuestros lectores tengan a la mano una lista pequeña, pero significativa, de definiciones y resultados propios de los primeros cursos de cálculo diferencial e integral y de un primer curso de introducción a las nociones de la topología en la recta real y en espacios métricos.

La meta de este capítulo es proporcionar esa pequeña lista. Es recomendable, principalmente para los lectores más jóvenes, recorrer esta parte con cierto cuidado. No hay demostraciones, pero sí hay comentarios que pueden ser interesantes y útiles.

5.1. Conjuntos abiertos y cerrados

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la *bola de radio* ε con centro en x así:

$$B_X(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Si no hay confusión, respecto al espacio del que estamos hablando, escribiremos $B(x, \varepsilon)$ en lugar de $B_X(x, \varepsilon)$.

Sean $A \subset X$, y $x \in X$. Decimos que x es *punto interior* de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon)$ está contenida en A ; decimos que x es *punto exterior* de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x, \varepsilon) \subset (X \setminus A) = \{x \in X : x \notin A\};$$

y decimos que x es *punto frontera* de A si para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad \text{y} \quad B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

El conjunto formado por todos los puntos interiores de A es el *interior* de A , el conjunto de todos los puntos exteriores de A forma el *exterior* de A , y el conjunto de todos los puntos frontera de A es la *frontera* de A . Denotamos estos conjuntos por $\text{int}(A)$, $\text{ext}(A)$ y $\text{fr}(A)$ respectivamente.

De estas definiciones se siguen las siguientes afirmaciones.

Dado A un subconjunto de X , entonces:

- $X = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup \text{fr}(A)$.
- $\text{int}(A) \cap \text{fr}(A) = \emptyset$.
- $\text{int}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$.
- $\text{fr}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$.

Decimos que A es un conjunto *abierto* en X si todo punto $a \in A$ es punto interior de A , y decimos que A es *cerrado* en X si el conjunto $X \setminus A$ es abierto en X .

En la recta real, \mathbb{R} , todo intervalo de la forma (a, b) , $a < b$, es un conjunto abierto, y todo intervalo de la forma $[a, b]$ es un conjunto cerrado.

Decimos que $x \in X$ es *punto de adherencia* de A si para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset;$$

y decimos que x es *punto de acumulación* de A si para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Al conjunto de todos los puntos de adherencia de A le llamamos la *cerradura*, o *clausura*, de A , y lo denotamos con $\text{cl}(A)$ o con \overline{A} .

CAPÍTULO 5. NOCIONES BÁSICAS DE CÁLCULO Y TOPOLOGÍA 71

Para cada $A \subset X$ se tiene que

$$\text{int}(A) \subset A \subset \text{cl}(A).$$

Decimos que $x \in A$ es *punto aislado* de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset.$$

Los conjuntos \emptyset y X son abiertos y cerrados a la vez. Para cada $A \subset X$, los conjuntos $\text{fr}(A)$ y $\text{cl}(A)$ son siempre cerrados. Además A es cerrado si y sólo si $A = \text{cl}(A)$. Para cada $A \subset X$, $\text{int}(A)$ es un conjunto abierto. Además A es abierto si y sólo si $A = \text{int}(A)$. Las demostraciones de éstas y otras observaciones se le proponen al lector en la sección de ejercicios.

Hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados. Por ejemplo, en la recta real, el conjunto formado por todos los números racionales, \mathbb{Q} , no es abierto ni cerrado. Ver ejercicio 5.3.

Decimos que $A \subset X$ es *denso en X* si para todo punto $x \in X$ y para todo valor positivo ε , existe $a \in A$ tal que $a \in B(x, \varepsilon)$.

Es decir, A es denso en X si

$$\text{cl}(A) = X.$$

Sea $B \subset A$. Decimos que B es denso en A si para todo punto $a \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $b \in B$ tal que $b \in B(a, \varepsilon)$.

Es decir, B es denso en A si

$$B \subset A \subset \text{cl}(B).$$

El conjunto de los números racionales, \mathbb{Q} , es denso en \mathbb{R} . El conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es denso en el intervalo $[0, 1]$.

Decimos que $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, está *acotado* si existen $x_0 \in X$ y $M > 0$ tal que para todo punto a de A se tiene que $d(a, x_0) \leq M$.

Un subconjunto de \mathbb{R}^n , digamos $A \neq \emptyset$, está acotado si existe $M > 0$ tal que A está contenido en la cerradura de la bola con centro en el origen de \mathbb{R}^n , $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, de radio M ,

$$A \subset \text{cl}(B(\mathbf{0}, M)) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq M\}.$$

5.2. Conjuntos compactos y conexos

Una *cubierta abierta* del espacio métrico X es una colección de conjuntos abiertos cuya unión es X . Si $Y \subset X$, una cubierta abierta de Y es una colección de conjuntos abiertos de X cuya unión contiene a Y .

Ejemplo 5.1. La colecciones:

$$\alpha = \left\{ \left(-1, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{1}{2}, 2 \right) \right\},$$

y

$$\beta = \left\{ \left(q - \frac{1}{4}, q + \frac{1}{4} \right) : q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \right\},$$

son cubiertas abiertas del intervalo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Sean α y β dos cubiertas abiertas de Y , $Y \subset X$. Decimos que β es una *subcubierta* de α si todo elemento de β es elemento de α , es decir, si $\beta \subset \alpha$. Decimos que Y es un conjunto *compacto* si toda cubierta abierta de Y tiene una subcubierta con una cantidad finita de elementos.

La afirmaciones contenidas en los teoremas 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5 son resultados muy útiles y, también, muy conocidos. Sus demostraciones se pueden consultar en [41].

Teorema 5.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces A es un conjunto compacto si y sólo si A es cerrado y acotado.*

Todo conjunto de la forma $A = [a, b]$, con $a < b$, es un conjunto compacto en \mathbb{R} . Los intervalos $(a, b]$ y $[a, \infty)$ no son conjuntos compactos, el primero porque no es cerrado y el segundo porque no es acotado.

Dados una función $f : X \rightarrow Y$, entre dos espacios métricos, y un conjunto B , contenido en Y , definimos el conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Al conjunto $A = f^{-1}(B)$ lo llamamos la *imagen inversa de B bajo f* .

Teorema 5.3. *Sean X y Y dos espacios métricos, y $f : X \rightarrow Y$ una función. Para todo conjunto abierto $B \subset Y$ se tiene que $f^{-1}(B)$ es abierto en X si y solamente si f es continua en todo punto de X .*

CAPÍTULO 5. NOCIONES BÁSICAS DE CÁLCULO Y TOPOLOGÍA 73

Podemos considerar también, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$f^{-n}(B) = \{x \in X : f^n(x) \in B\}.$$

Obsérvese que en este caso $A = f^{-n}(B)$ es la imagen inversa de B bajo la función f^n ,

$$f^{-n}(B) = (f^n)^{-1}(B).$$

Es común, cuando el conjunto B tiene un solo elemento, $B = \{y_0\}$, escribir $f^{-n}(y_0)$ en lugar de $f^{-n}(\{y_0\})$.

Teorema 5.4. Sean X y Y dos espacios métricos, y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Para todo conjunto compacto $A \subset X$ se tiene que $f(A)$ es compacto.

Dada una colección infinita numerable de subconjuntos de X , $\{A_n\}$, definimos la unión y la intersección de todos sus elementos de la siguiente manera:

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X : \text{existe } n \in \mathbb{N}, \text{ tal que } x \in A_n\},$
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X : \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ se tiene que } x \in A_n\}.$

Teorema 5.5. Sea $\{A_n\}$ una colección infinita numerable de conjuntos compactos no vacíos en \mathbb{R} . Si para todo n en \mathbb{N} se tiene que $A_{n+1} \subset A_n$, entonces la intersección

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

es un conjunto distinto del conjunto vacío.

Si la colección $\{A_\lambda\}$ de subconjuntos de X toma sus índices de un conjunto Λ , $\lambda \in \Lambda$, definimos la unión y la intersección de todos sus elementos así:

- $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X : \text{existe } \lambda \in \Lambda, \text{ tal que } x \in A_\lambda\},$
- $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X : \text{para todo } \lambda \in \Lambda, \text{ se tiene que } x \in A_\lambda\}.$

Sea X un espacio métrico. Sean $U \subset X$ y $W \subset X$ dos conjuntos abiertos, ambos distintos del conjunto vacío. Decimos que U y W forman una *separación* de X si

$$X = U \cup W \quad \text{y} \quad U \cap W = \emptyset.$$

Decimos que X es un *conjunto conexo* si no existe ninguna separación de X . El conjunto de los números reales, \mathbb{R} , y el plano, \mathbb{R}^2 son conjuntos conexos, ver [41].

Esta definición se puede expresar de manera un poco más general. Sea $Y \subset X$. Decimos que Y es un *conjunto conexo* si no existe una pareja de conjuntos abiertos U y W , en X , tales que

- $U \cap Y \neq \emptyset$, y $W \cap Y \neq \emptyset$,
- $Y \subset U \cup W$, y
- $Y \cap U \cap W = \emptyset$.

Demostraciones de los teoremas 5.6 y 5.7 se pueden consultar en [36].

Teorema 5.6. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y solamente si A es un intervalo, A está formado por un solo punto o A es el conjunto vacío.*

Teorema 5.7. *Sean X y Y dos espacios métricos, y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Para todo conjunto conexo $A \subset X$ se tiene que $f(A)$ es conexo.*

5.3. Sucesiones y subsucesiones

Sea N un número natural. Sea $J_N = \{1, 2, 3, \dots, N\}$.

Sea A un subconjunto no vacío de X . Decimos que A tiene N elementos si existe una función biyectiva

$$f : J_N \rightarrow A.$$

En este caso decimos que A es un conjunto *finito*, o que A tiene *cardinalidad finita*. La *cardinalidad* de A es N .

Si para toda $N \in \mathbb{N}$ no es posible encontrar una función biyectiva de un conjunto de la forma J_N a A , entonces decimos que A es un conjunto *infinito*, o tiene *cardinalidad infinita*.

CAPÍTULO 5. NOCIONES BÁSICAS DE CÁLCULO Y TOPOLOGÍA 75

Resulta que los conjuntos A , no vacíos, contenidos en \mathbb{R} , que son finitos siempre son acotados. Así cualquier conjunto no acotado es infinito. Los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} mismo son infinitos.

Si $A \subset X$ no es finito pero existe una función biyectica

$$f : \mathbb{N} \rightarrow A,$$

entonces decimos que A es *infinito numerable*.

El conjunto de los números enteros, \mathbb{Z} , es infinito numerable. También el conjunto de los números racionales \mathbb{Q} es infinito numerable, aunque la argumentación de este hecho es un poco más complicada, ver [36].

Si $A \subset X$ es infinito y no es infinito numerable, decimos que A es un conjunto *infinito no numerable*. El conjunto \mathbb{R} es infinito no numerable.

Una *sucesión* en X es una función de \mathbb{N} en X ,

$$\mathbf{a} : \mathbb{N} \rightarrow X.$$

Es común denotar a los elementos de la imagen de \mathbf{a} , $\mathbf{a}(n)$, con a_n , y referirse a la sucesión usando este símbolo: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ o, simplemente, $\{a_n\}$.

Decimos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *convergente* a $a_0 \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(a_n, a_0) < \varepsilon$. En este caso, escribimos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0.$$

Decimos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *acotada* si el conjunto

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

está acotado.

Por un lado, toda sucesión convergente es acotada. Por el otro, existen sucesiones acotadas que no son convergentes.

Es tradicional presentar la definición de la continuidad de una función $f : X \rightarrow Y$, en un punto x_0 de X , en términos de bolas de radio ε , con centro en $f(x_0)$, y de radio δ , con centro en x_0 .

En este trabajo hacemos también uso de la equivalencia contenida en la siguiente proposición.

Proposición 5.8. Sean $f : X \rightarrow Y$ y x_0 un punto en X . La función f es continua en x_0 si y sólo si para toda sucesión en X , $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, convergente a x_0 se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

La siguiente proposición relaciona sucesiones con conjuntos cerrados. El lector es invitado a dar la demostración correspondiente en el ejercicio 5.10.

Proposición 5.9. Sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. El conjunto A es cerrado si y solamente si para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ contenida en A tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$, se tiene que $a_0 \in A$.

Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $X = (X, d)$. Decimos que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, entonces $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

No es difícil demostrar que toda sucesión convergente es de Cauchy, ver ejercicio 5.20.

Por otro lado, existen espacios métricos donde es posible construir sucesiones de Cauchy que no son convergentes. Por ejemplo el intervalo abierto $(0, 2) \subset \mathbb{R}$ es un espacio métrico en el cual la sucesión $\{x_n = \frac{1}{n}\}$ es de Cauchy y no es convergente a ningún punto en $(0, 2)$.

Otro ejemplo importante es el conjunto de los números racionales \mathbb{Q} . Resulta que existen sucesiones de Cauchy formadas por elementos de \mathbb{Q} que no convergen a un número racional, ver ejercicio 21.

Decimos que un espacio métrico X es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto de X .

Ejemplos de espacios métricos completos son los siguientes: la recta real \mathbb{R} , el plano \mathbb{R}^2 , los números complejos \mathbb{C} , la circunferencia unitaria

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Ejemplos de espacios métricos que no son completos son los siguientes: los números racionales \mathbb{Q} , los puntos en el plano donde ambas coordenadas son racionales $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, el intervalo abierto $(0, 2) \subset \mathbb{R}$, los números racionales que pertenecen al intervalo cerrado unitario $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, los números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el complemento en \mathbb{C} de la circunferencia unitaria $\mathbb{C} \setminus S^1$.

El intervalo cerrado $[0, 1]$ sí es un espacio métrico completo, la demostración la ofrecemos en el capítulo 8.

Los espacios completos resultan ser muy importantes cuando se trata de demostrar que existen funciones $f : X \rightarrow X$ y puntos $x \in X$ cuya órbita, $o(x, f)$, forma un conjunto denso en X . En el capítulo 8 desarrollamos con detalle este tema.

Una *subsucesión* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que cumple las siguientes dos condiciones:

- Para cada k , existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $b_k = a_{n_k}$.
- Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $n_k < n_{k+1}$.

La sucesión

$$\left\{ b_k = \frac{1}{3k} \right\} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots \right\}$$

es una subsucesión de la sucesión

$$\left\{ a_n = \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Si $\{b_k\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $n_k \geq k$. De esta observación se sigue, casi sin dificultad, ver ejercicio 5.26, que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = L.$$

Dado un punto $x \in X$, su órbita, $o(x, f)$, es una sucesión. La convergencia de esta sucesión es una primera información sobre la dinámica que induce f en los puntos de la forma $f^n(x)$. Si la $o(x, f)$ no es una sucesión convergente, podemos preguntarnos sobre la existencia de subsucesiones de $o(x, f)$ que sí sean convergentes. En el capítulo 8 demostramos el siguiente resultado: Toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico y compacto X tiene una subsucesión convergente. Ver proposición 8.4.

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en la recta real \mathbb{R} .

- Decimos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *diverge a infinito*,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

si para todo $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $a_n > M$.

- Decimos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *diverge a menos infinito*,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

si para todo $M < 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $a_n < M$.

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Si la sucesión $o(x, f)$ diverge o *escapa* a infinito, es decir, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty,$$

entonces para toda subsucesión $\{n_k\}$ de \mathbb{N} se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = \infty.$$

Ver ejercicio 5.28.

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{R} . Decimos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

- *creciente* si para toda $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$;
- *decreciente* si para toda $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_{n+1}$;
- *acotada* si existe $M > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $-M \leq a_n \leq M$.

Toda sucesión en \mathbb{R} que es creciente y acotada es convergente, ver ejercicio 30.

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas.

EJERCICIO 5.1. Sean A y B subconjuntos de X , ambos distintos del conjunto vacío. Demostrar lo siguiente:

- Si A y B son abiertos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son abiertos.
- Si A y B son cerrados, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son cerrados.

EJERCICIO 5.2. Sea $A \subset X$. Demostrar lo siguiente:

- $int(A)$ y $ext(A)$ son conjuntos abiertos.
- $fr(A)$ y $cl(A)$ son conjuntos cerrados.

CAPÍTULO 5. NOCIONES BÁSICAS DE CÁLCULO Y TOPOLOGÍA 79

EJERCICIO 5.3. Demostrar que \mathbb{Q} no es abierto ni cerrado en \mathbb{R} .

EJERCICIO 5.4. Sean A y B subconjuntos de X , ambos distintos del conjunto vacío. Demostrar lo siguiente:

- Si $A \subset B$, entonces $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$.
- Si $A \subset B$, entonces $\text{cl}(A) \subset \text{cl}(B)$.
- El punto a_0 es elemento de $\text{cl}(A)$ si y solamente si existe una sucesión $\{a_n\}$, contenida en A , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0.$$

- $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$.
- $\text{cl}(A) = A \cup \text{fr}(A)$, y $A \cup \text{fr}(A) = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A)$.
- Si A y B son acotados, entonces $A \cup B$ es acotado.
- Si A y B son conexos y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.

EJERCICIO 5.5. Sea $A \subset X$. Demostrar que si $B \subset A$ y B es abierto, entonces $B \subset \text{int}(A)$. Esto quiere decir que el $\text{int}(A)$ es el conjunto abierto más grande contenido en A .

EJERCICIO 5.6. Sean A y B subconjuntos de X . Demostrar que si $A \subset B$ y B es cerrado, entonces $\text{cl}(A) \subset B$. Esto quiere decir que la cerradura de A es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A .

EJERCICIO 5.7. Sea $f : X \rightarrow X$. Demostrar que el conjunto formado por todos los puntos fijos de f ,

$$\text{Fix}(f) = \{x \in X : f(x) = x\},$$

es cerrado.

EJERCICIO 5.8. Sean $I = [0, 1]$ y $f : I \rightarrow I$. Demostrar que para cada $N \in \mathbb{N}$ el conjunto $A = \{x \in I : f^N(x) = x\}$ es cerrado.

EJERCICIO 5.9. Demostrar que el conjunto de puntos periódicos de la función f dada en el ejemplo 4.9 es cerrado. ¿Podría dar un ejemplo semejante pero tal que su conjunto de puntos periódicos no sea cerrado? (vea el Capítulo 13)

EJERCICIO 5.10. Demostrar la proposición 5.9.

EJERCICIO 5.11. Exhibir una colección $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ infinita numerable de conjuntos no vacíos en \mathbb{R} tales que para todo n en \mathbb{N} se tiene que $A_{n+1} \subset A_n$, y tal que la intersección

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

es el conjunto vacío.

EJERCICIO 5.12. Sean A y B dos subconjuntos de X . Supongamos que ambos son compactos. Demostrar que tanto $A \cup B$ como $A \cap B$ son conjuntos compactos. Un poco más general, demostrar que la unión finita de compactos es un conjunto compacto, y que la intersección finita o infinita de compactos es un conjunto compacto.

EJERCICIO 5.13. Sean A , B y C tres subconjuntos de X . Supongamos $A \subset B \subset C$. Demostrar que si A es denso en B y B es denso en C , entonces A es denso en C .

EJERCICIO 5.14. Sea $A \neq \emptyset$ un subconjunto finito contenido en X . Demostrar que A es un conjunto compacto.

EJERCICIO 5.15. Sean X un espacio métrico compacto y $Y \subset X$ un conjunto cerrado. Demostrar que Y es compacto. *Sugerencia:* Si α es una cubierta abierta de Y , entonces

$$\beta = \alpha \cup \{X \setminus Y\}$$

es una cubierta abierta de X .

EJERCICIO 5.16. Sea A un subconjunto de X . Demostrar que si A es conexo, entonces $B = cl(A)$ también es conexo.

EJERCICIO 5.17. Demostrar que la circunferencia unitaria

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

es un conjunto conexo y compacto. *Sugerencia:* Mostrar una función continua del intervalo $[0, 1]$ en S^1 .

EJERCICIO 5.18. Demostrar que la recta real, \mathbb{R} , no es compacto exhibiendo una cubierta abierta de \mathbb{R} , $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, que no tiene ninguna subcubierta finita.

EJERCICIO 5.19. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en X convergentes a a_0 y b_0 respectivamente. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = d(a_0, b_0).$$

EJERCICIO 5.20. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Demostrar lo siguiente:

CAPÍTULO 5. NOCIONES BÁSICAS DE CÁLCULO Y TOPOLOGÍA 81

- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces es de Cauchy.
- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

EJERCICIO 5.21. Demostrar que existe una sucesión de Cauchy, contenida en \mathbb{R} , formada por sólo números racionales que es convergente a un número irracional.

EJERCICIO 5.22. Sean A y B dos subconjuntos de X . Supongamos que ambos son compactos y no vacíos. Demostrar que si $A \cap B = \emptyset$, entonces existen dos puntos, $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$, tales que para toda pareja de puntos $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que

$$d(a, b) \geq d(a_0, b_0).$$

Sugerencia: Definir $\delta = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ y observar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $a_n \in A$ y $b_n \in B$ tales que

$$\delta \leq d(a_n, b_n) < \delta + \frac{1}{n}.$$

EJERCICIO 5.23. Demostrar la siguiente versión del teorema 5.3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es continua en \mathbb{R} si y solamente si para todo conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(U)$ es también un conjunto abierto.

EJERCICIO 5.24. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dada por $f(x) = \arctan(x)$.

- Demostrar que $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es un homeomorfismo.
- Mostrar un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$.
- Mostrar, si es que existe, un homeomorfismo $j : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$.
- Mostrar, si es que existe, un homeomorfismo $k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$.

EJERCICIO 5.25. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea x_0 un punto fijo atractor de f . El siguiente conjunto es conocido como la *cuenca de atracción* de x_0 ,

$$W^s(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0 \right\}.$$

Demostrar que $W^s(x_0)$ es un conjunto abierto. *Sugerencia:* Si x_0 es un punto fijo atractor de f , entonces existen $a < b$, $a < x_0 < b$, tal que para todo $x \in (a, b)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0.$$

Demostrar que

$$W^s(x_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(a, b).$$

EJERCICIO 5.26. Sean X un espacio métrico compacto, $\{a_n\}$ una sucesión en X y L un punto en X . Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ si y sólo si para toda subsucesión $\{b_k\}$ de $\{a_n\}$ se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = L$.

EJERCICIO 5.27. Sean X un espacio métrico compacto y $\{a_n\}$ una sucesión en X . Supongamos que existe una cantidad finita de puntos en X , digamos

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N\},$$

tales que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \in \{x_1, x_2, \dots, x_N\}.$$

Es decir, $\{a_n\}$ *visita* sólo una cantidad finita de lugares de X . Demostrar que para toda subsucesión $\{b_k\}$ de $\{a_n\}$, que sea convergente, se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = L, \quad \text{con } L \in \{x_1, x_2, \dots, x_N\}.$$

EJERCICIO 5.28. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Demostrar lo siguiente:

- Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty,$$

entonces para toda subsucesión $\{n_k\}$ de \mathbb{N} se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = \infty.$$

- Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = -\infty,$$

entonces para toda subsucesión $\{n_k\}$ de \mathbb{N} se tiene que

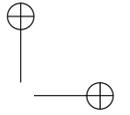
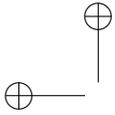
$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = -\infty.$$

EJERCICIO 5.29. Sea $\{a_n\}$ una sucesión en X . Sea $\{b_k\}$ una subsucesión de $\{a_n\}$ con las siguientes dos propiedades:

- Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $b_k = a_{M+k}$.
- $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = L$, $L \in X$.

Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

EJERCICIO 5.30. Demostrar que toda sucesión en \mathbb{R} que es creciente y acotada, es convergente.



CAPÍTULO 6

Una superestrella: El conjunto de Cantor

En este breve capítulo presentamos al famoso conjunto de Cantor y algunas de sus principales propiedades. Como seguramente es un tema conocido por el lector, las demostraciones, por lo regular, las relegamos a los ejercicios.

Al parecer, desde su creación, al conjunto de Cantor lo persigue la historia de empezar siendo un ejemplo de algo quizá extraño y excepcional, para terminar siendo parte del corazón de muchas teorías, como la topología.

Lo mismo ocurre en sistemas dinámicos: es extraordinario el papel que juega este conjunto, como procuraremos mostrar a lo largo de este libro.

6.1. Construcción

Recordemos que el conjunto de Cantor se construye de la siguiente manera: Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. A este intervalo lo llamamos C_0 .

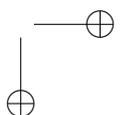
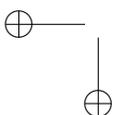
En el primer paso, removemos el “tercio de en medio” de C_0 , o sea, el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, que llamamos A_0 . Al complemento

$$I \setminus A_0 = C_0 \setminus A_0$$

lo llamamos C_1 . Este conjunto C_1 es la unión de dos intervalos compactos,

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \text{y} \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

de longitud $\frac{1}{3}$ cada uno de ellos. La longitud total de C_1 es $\frac{2}{3}$.



En el segundo paso, de cada uno de los dos intervalos de C_1 removemos “el tercio de en medio”, a saber,

$$\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right),$$

respectivamente. Ahora hacemos

$$A_1 = \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right) \quad \text{y} \quad C_2 = C_1 \setminus A_1.$$

El conjunto C_2 es la unión de cuatro intervalos compactos,

$$\left[0, \frac{1}{3^2}\right], \quad \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right] \quad \text{y} \quad \left[\frac{8}{3^2}, 1\right],$$

de longitud $\frac{1}{3^2}$ cada uno de ellos; es decir, la longitud total de C_2 es $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

En general, en el paso $k \geq 1$, de cada uno de los 2^{k-1} intervalos de C_{k-1} removemos “el tercio de en medio”, que es un intervalo abierto de la forma $\left(\frac{m}{3^k}, \frac{m+1}{3^k}\right)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Llamamos A_{k-1} a la unión de estos 2^{k-1} intervalos abiertos y definimos

$$C_k = C_{k-1} \setminus A_{k-1}.$$

El conjunto C_k es la unión de 2^k intervalos compactos, cada uno de ellos de longitud $\frac{1}{3^k}$, es decir, la longitud total de C_k es $2^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ (ver figura 6.1).

Nótese que $C_{k+1} \subset C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

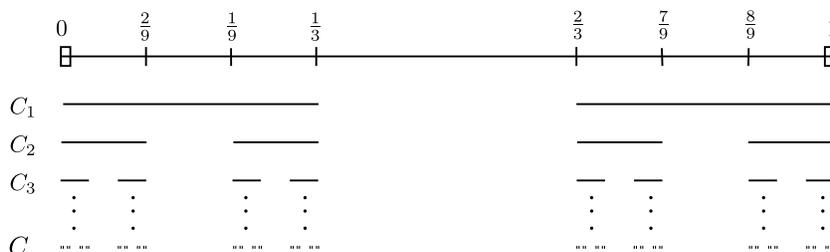


FIGURA 6.1: Construcción del conjunto de Cantor C .

CAPÍTULO 6. UNA SUPERESTRELLA: EL CONJUNTO DE CANTOR 85

Definición 6.1. El *conjunto de Cantor*, o conjunto de los tercios de en medio excluidos, se denota por C y se define como

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Como C es una intersección anidada de conjuntos compactos no vacíos, C es un compacto no vacío. Es fácil ver que tiene cardinalidad infinita: los extremos de cada uno de los 2^k intervalos cerrados que constituyen C_k , $k \in \mathbb{N}$, son elementos de C . En particular, las sucesiones

$$\left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad \left\{ 1 - \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

están contenidas en C . Lo sorprendente, sin embargo, es que éstos no son, de manera alguna, todos los elementos de C : el hecho es que C tiene la cardinalidad de \mathbb{R} (véase la proposición 6.2).

Por otra parte, en contraste con esta cuestión de la cardinalidad, como la longitud total de C_k es $(\frac{2}{3})^k$, $C \subset C_k$, y $(\frac{2}{3})^k$ tiende a 0 cuando k tiende a infinito, llegamos a la conclusión que la *longitud* de C debe ser cero.

Nótese que

$$C = I \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

De esta igualdad también puede deducirse la *longitud cero* de C ; ver ejercicio 6.2.

6.2. Algunas propiedades de C

Existe una caracterización muy importante de este conjunto utilizando el sistema ternario o numeración en base 3.

Por definición, un número $x \in [0, 1]$ se expresa en base 3 como

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}, \quad \text{con } b_i \in \{0, 1, 2\} \text{ para } i \geq 1.$$

Usando el punto “decimal” a este número lo expresamos como

$$x = 0.b_1b_2b_3 \dots,$$

manteniendo en la cabeza que no se trata de la expansión decimal de x sino de la expansión en base 3.

Algunos ejemplos simples son los siguientes: $\frac{1}{3} = 0.1$, $\frac{2}{3} = 0.2$, $\frac{1}{3^2} = 0.01$, $\frac{2}{3^2} = 0.02$, $\frac{4}{3^2} = 0.11$, $\frac{5}{3^2} = 0.12$, $\frac{7}{3^2} = 0.21$ y $\frac{8}{3^2} = 0.22$.

Las expansiones en base 3 (o en cualquier otra base) no son únicas: si una tal expansión es finita, digamos

$$x = 0.b_1b_2b_3 \dots b_k \quad \text{y} \quad b_k = 1,$$

podemos reemplazar a este último 1 por un 0 seguido de una “cola infinita” de 2s.

Por ejemplo,

$$\frac{1}{3} = 0.1 = 0.0222\dots = 0.0\bar{2},$$

$$\frac{1}{3^2} = 0.01 = 0.00\bar{2},$$

$$\frac{4}{3^2} = 0.11 = 0.10\bar{2}$$

y

$$\frac{7}{3^2} = 0.21 = 0.20\bar{2}.$$

Desde luego, la notación $\bar{2}$ es una abreviatura para la infinidad de 2's. Ver también el ejercicio 6.3.

La caracterización referida del conjunto de Cantor es la siguiente.

Proposición 6.2. *Un número x es elemento de C si y sólo si existe una manera de expresar a x en base 3 utilizando solamente 0s y 2s. Es decir, existe una sucesión b_1, b_2, b_3, \dots con $b_i \in \{0, 2\}$ para $i \in \mathbb{N}$, tal que*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}.$$

Por ejemplo, $\frac{1}{3} \in C$ y $\frac{1}{3} = 0.1$, pero a este número lo podemos escribir como $0.0222\dots$, o sea, existe una manera de expresarlo con sólo 0's y 2's. Análogamente, $\frac{1}{3^2} \in C$ y $\frac{7}{3^2} \in C$ y a ambos los podemos escribir con sólo 0's y 2's. En cambio, $\frac{4}{3^2}$ o $\frac{1}{2}$ no son elementos de C y no los podemos escribir así (ejercicio 6.5).

CAPÍTULO 6. UNA SUPERESTRELLA: EL CONJUNTO DE CANTOR 87

Demostración. Examinemos cómo es la expansión ternaria de los números en el complemento del conjunto de Cantor. Por ejemplo,

$$x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = A_0$$

si, y sólo si, su expansión en base 3 es de la forma

$$x = 0.1b_2b_3\dots,$$

con $b_k \neq 0$ para algún $k > 1$. Esto significa que el 1 no se puede remover (reemplazarlo por una cola infinita de 2's) de dicha expansión.

Análogamente,

$$x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) = A_1$$

si, y sólo si, en base 3,

$$x = 0.b_11b_3b_4\dots$$

con $b_1 = 0$ o 2 y $b_k \neq 0$ para algún $k > 2$. Por lo tanto, el 1 no se puede remover de dicha expansión.

Continuando de esta manera, para cada número natural m tenemos que $x \in A_{m-1}$ si, y sólo si, la expansión ternaria de x es de la forma

$$x = 0.b_1b_2b_3\dots b_mb_{m+1}b_{m+2}\dots,$$

con $b_j = 0$ o 2 si $1 \leq j < m$, $b_m = 1$, y $b_{m+k} \neq 0$ para algún $k \geq 1$ (ver también el ejercicio 6.4). \square

Esta caracterización de los elementos de C es un hecho afortunado por varias razones. Una de ellas es que de inmediato podemos producir una infinidad de irracionales que son elementos de C (ejercicio 6.6). Otra, más interesante, es que nos permite demostrar de una manera relativamente sencilla que la cardinalidad del conjunto de Cantor es la misma que la de los números reales.

Proposición 6.3. *La cardinalidad de C es la misma que la de \mathbb{R} .*

Demostración. Basta con exhibir una función suprayectiva de C en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

En base 2 cada número $y \in [0, 1]$ es de la forma

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{2^i}, \quad \text{con } t_i \in \{0, 1\} \text{ para } i \geq 1.$$

Definimos $\varphi : C \rightarrow [0, 1]$ como sigue: si $x \in C$, escribimos

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i},$$

con $b_i \in \{0, 2\}$ para $i \geq 1$, y le asociamos el número $\varphi(x) = y$ que, en base 2, está dado por

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{2^i},$$

donde $t_i = \frac{b_i}{2}$ para $i \geq 1$.

Es decir, a través de φ cambiamos la representación de los números (en C) de base 3 a números en base 2 en $[0, 1]$. Nótese que φ está bien definida.

Unos ejemplos ayudarán a entender cómo es esta función.

En base 3 tenemos

$$\frac{1}{3} = 0.1 = 0.0222\dots,$$

por lo que $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)$ es, en base 2, el número

$$0.0111\dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2}.$$

Asimismo,

$$\varphi\left(\frac{1}{3^2}\right) = \varphi(0.01) = \varphi(0.00\bar{2}) = 0.00\bar{1} = \frac{1}{4},$$

(el lector interesado podrá dar otros ejemplos).

Es fácil comprobar que φ es suprayectiva; tomemos cualquier número y en base 2 en $[0, 1]$:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{2^i},$$

CAPÍTULO 6. UNA SUPERESTRELLA: EL CONJUNTO DE CANTOR 89

con $t_i \in \{0, 1\}$ para $i \geq 1$. Sea

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2t_i}{3^i}.$$

Entonces, x es un número que en base 3 sólo tiene 0's y 2's por lo que es un elemento de C y claramente $\varphi(x) = y$. \square

Sin embargo φ no es inyectiva; por ejemplo,

$$\varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \varphi(0.2) = 0.1 = \frac{1}{2} = \varphi\left(\frac{1}{3}\right)$$

y

$$\varphi\left(\frac{2}{3^2}\right) = \varphi(0.02) = 0.01 = \frac{1}{4} = \varphi\left(\frac{1}{3^2}\right).$$

En general, $\varphi(x) = \varphi(y)$ si, y sólo si, x y y son extremos de uno de los intervalos excuídos en algún paso de la construcción de C (ejercicio 6.7). En consecuencia φ es a lo más 2 a 1 y, además, es no decreciente de C a $[0, 1]$.

La función φ es continua en C (ver ejercicio 8).

De la gráfica de φ se desprende que hay una manera natural de extenderla a una función continua en todo el intervalo $[0, 1]$ definiéndola como una constante adecuada en cada uno de los tercios excluidos.

En efecto, llamemos $\Phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a esta extensión de φ . Supongamos que x y y son extremos de cierto intervalo J excuído en el k -ésimo paso de la construcción de C . Como $\varphi(x) = \varphi(y) = c$ para algún $c \in [0, 1]$, definimos $\Phi(t) = c$ para todo $t \in J$.

Así, obtenemos $\Phi(t) = \frac{1}{2}$ si $t \in A_0$.

Si $t \in A_1$,

$$\Phi(t) = \frac{1}{4}, \quad \text{si } t \in \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)$$

y

$$\Phi(t) = \frac{3}{4}, \quad \text{si } t \in \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right).$$

La idea está clara (ver figura 6.2).

Esta función es popularmente conocida como *la escalera del diablo*. Invitamos al lector a reflexionar sobre las motivaciones para merecer ese nombre.

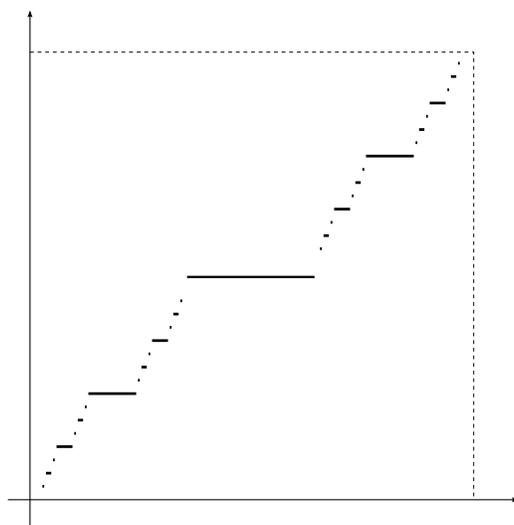


FIGURA 6.2: Escalera del diablo.

Desde el punto de vista topológico C es un conjunto compacto pero también tiene otras cualidades. Una de ellas es que todos sus elementos son puntos de acumulación de C .

Cuando todos los elementos de un conjunto cerrado son puntos de acumulación de éste, se dice que dicho conjunto es *perfecto*. *El conjunto de Cantor C es perfecto.*

Un conjunto A , contenido en un espacio métrico X , se define como una *componente* de X si A es conexo, pero no es un subconjunto propio de algún otro conexo en X (es decir, si B es conexo en X y $A \subseteq B$, entonces $A = B$). En otras palabras, una componente de X es un subconjunto conexo máximo de X . Para mayor énfasis, a las componentes se les suele llamar también *componentes conexas*.

Obviamente, si X es conexo, entonces sólo tiene una componente $A = X$.

Si $X = C_k$, $k \geq 0$, cada uno de los 2^k intervalos cerrados cuya unión es C_k es una componente de C_k .

Un espacio X se define como *totalmente desconexo* si cada componente de X está formada por un solo punto.

Como en \mathbb{R} los únicos conjuntos conexos no vacíos son los intervalos o los formados por un solo punto, un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es totalmente desconexo

si, y sólo si, no existe un intervalo con más de un punto contenido en A . *El conjunto C es totalmente desconexo.*

Las dos últimas afirmaciones que hicimos sobre C las demostramos a continuación.

Proposición 6.4. *El conjunto de Cantor es compacto, perfecto y totalmente desconexo.*

Demostración. Ya tenemos que C es compacto. Para ver que todos sus puntos son de acumulación, sean $x \in C$ y $\varepsilon > 0$. Sea V una vecindad de radio ε de x , $V = B(x, \varepsilon)$. Como la longitud de C_k tiende a 0 cuando k tiende a infinito, para k adecuadamente grande, alguna componente de C_k que contiene a x está contenida en V .

Sea y cualquier punto de C , distinto de x , que sea elemento de dicha componente (por ejemplo, alguno de sus extremos tiene que ser diferente de x). Entonces $y \in V$ y por lo tanto, x es punto de acumulación de C .

Para ver que es totalmente desconexo, sean $x \neq y$ dos elementos de C . Para k suficientemente grande es claro que x y y están en dos componentes distintas de C_k . En consecuencia x y y no pueden estar en la misma componente de C . O sea que una componente de C no puede tener dos puntos distintos, y la conclusión se sigue. \square

Si X es un espacio métrico o topológico, un conjunto $A \subset X$ es *denso en ninguna parte* si el interior de la cerradura de A es vacío: $\text{int}(cl(A)) = \emptyset$. Como C es cerrado, coincide con su cerradura, $C = cl(C)$.

De la argumentación para demostrar la proposición 6.4 se sigue que C no contiene intervalos de más de un punto, en consecuencia no contiene puntos interiores. Por lo tanto C es denso en ninguna parte.

Ejercicios

EJERCICIO 6.1. Sean A y B dos subconjuntos de \mathbb{R} distintos del vacío, compactos y totalmente desconexos. Demostrar que $A \cup B$ es totalmente desconexo.

EJERCICIO 6.2. Comprobar que la longitud total de los tercios excluidos, es decir, del conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, es 1. Concluir de aquí que C debe tener longitud 0.

EJERCICIO 6.3. Comprobar que, en base 3, si

$$x = 0.b_1b_2b_3 \dots b_k \quad \text{y} \quad b_k = 1,$$

podemos reemplazar a este último 1 por un 0 y agregar una “cola infinita” de 2s. Es decir,

$$x = 0.b_1b_2b_3 \dots b_{k-1}1 = 0.b_1b_2b_3 \dots b_{k-1}0\bar{2}.$$

Sugerencia: Usar una serie geométrica.

EJERCICIO 6.4. Para cada $k \geq 1$ demostrar lo siguiente: x es un extremo de cualquiera de los intervalos cerrados cuya unión es C_k si, y sólo si, en base 3, x es de la forma

$$x = 0.b_1b_2b_3 \dots b_k$$

con $b_k = 1$ o 2 , y $b_j = 0$ o 2 , si $1 \leq j < k$.

EJERCICIO 6.5. Expresar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ en base 3. Usar esto para comprobar que no son elementos de C .

EJERCICIO 6.6. Exhibir un irracional en C . Exhibir otro. Exhibir una infinidad.

EJERCICIO 6.7. Sea $\varphi : C \rightarrow [0, 1]$ la función definida en la proposición 6.3. Demostrar que $\varphi(x) = \varphi(y)$ si, y sólo si, para algún número natural k se tiene que

$$x = 0.b_1b_2b_3 \dots b_{k-1}0\bar{2} \quad \text{y} \quad y = 0.b_1b_2b_3 \dots b_{k-1}2.$$

Es decir, si y sólo si los puntos x y y son extremos de uno de los intervalos excluidos en algún paso de la construcción de C .

EJERCICIO 6.8. Sea $\varphi : C \rightarrow [0, 1]$ la función definida en la proposición 6.3. Demostrar que φ es continua en C . *Sugerencia:* Si x_1 y x_2 son extremos de uno de los intervalos cerrados cuya unión es C_k , la diferencia

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera, si k es suficientemente grande.

Comentarios

Queremos destacar ciertas simetrías que se advierten en la construcción de C y que nos serán útiles en capítulos posteriores. Una evidente es que tanto C como los conjuntos C_k son simétricos respecto al punto medio del intervalo I . Otra es que, en el paso $k \geq 1$, el conjunto C_k tiene el mismo

CAPÍTULO 6. UNA SUPERESTRELLA: EL CONJUNTO DE CANTOR 93

número de componentes (2^{k-1} intervalos) en $[0, \frac{1}{3}]$ que en $[\frac{2}{3}, 1]$. Otras las presentamos en el ejercicio 6.9.

Por conveniencia, introducimos la siguiente terminología: Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos a los conjuntos αA y $A + \alpha$ del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha A &= \{\alpha x : x \in A\}, \\ A + \alpha &= \{x + \alpha : x \in A\}.\end{aligned}$$

EJERCICIO 6.9. Sea $k \geq 1$.

- Si J es una componente de C_k (o de A_{k-1}) contenida en $[0, \frac{1}{3}]$, entonces $J + \frac{2}{3}$ también es una componente de C_k (o de A_{k-1}) y está contenida en el intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$.
- Si J es una componente de C_k contenida en $[0, 1]$, entonces $\frac{1}{3}J$ es una componente de C_{k+1} contenida en $[0, \frac{1}{3}]$.
- Si $x \in C_{k+1} \cap [0, \frac{1}{3}]$, entonces $3x$ está en C_k .

Una consecuencia de las afirmaciones contenidas en el ejercicio 6.9 es que toda componente de $C_{k+1} \cap [0, \frac{1}{3}]$ es de la forma $\frac{1}{3}J$ con J una componente de C_k . Ello se debe, simplemente, al hecho de que C_k tiene 2^k componentes y $C_{k+1} \cap [0, \frac{1}{3}]$ también.

Por último, obsérvese que todo el proceso de construcción del conjunto de Cantor se repite, a escala, en cada componente de C_k , $k \geq 0$. Es decir, si J es una tal componente, en el paso siguiente J se divide en tres partes iguales y se excluye el intervalo abierto que constituye el tercio de en medio. El complemento en J de este tercio excluido, o sea, los dos tercios restantes, son ahora componentes de C_{k+1} . Esto conduce a la propiedad de *autosemejanza* que tiene el conjunto C : cualquier parte de C , así sea a escala muy pequeña, es esencialmente igual a todo el conjunto.

Este rasgo de C lo convierte en algo que se llama un *conjunto fractal*. En sistemas dinámicos los fractales abundan y el conjunto de Cantor es sin duda uno de los más típicos. Para el lector interesado, le sugerimos consultar los libros *Fractals everywhere*, escrito por M. F. Barnsley, [7], y *Una introducción a la geometría fractal* de G. Arenas y S. Sabogal, [5]. También es muy recomendable el artículo *Fractals and self-similarity* escrito por J. E. Hutchinson, [27]. En estos tres trabajos se presenta la teoría de los conjuntos fractales.

Finalmente, no podemos dejar de mencionar que, topológicamente hablando, *¡todos los conjuntos compactos, perfectos y totalmente desconexos son esencialmente iguales entre sí y por lo tanto, iguales al conjunto de Cantor C !* En este sentido, el conjunto de Cantor es único.

Esto se desprende del siguiente resultado general.

Teorema 6.5. *Cualesquiera dos espacios métricos compactos, totalmente desconexos y perfectos, son homeomorfos entre sí.*

Corolario 6.6. *Si X es un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente desconexo, X es homeomorfo al conjunto de Cantor C .*

El corolario es una consecuencia inmediata del teorema.

La demostración del teorema 6.5, que queda completamente fuera de los alcances de este texto, puede consultarse en la página 99 del libro *Topology* escrito por J. G. Hocking y G. S. Young, ver [25]. En virtud de este teorema a cualquier conjunto compacto, perfecto y totalmente desconexo se le llama un conjunto de Cantor.

EJERCICIO 6.10. Sean A y B dos subconjuntos de \mathbb{R} . Demostrar que si ambos son conjuntos de Cantor, entonces $A \cup B$ también es un conjunto de Cantor.

CAPÍTULO 7

Una visita a la *Tienda*

En los capítulos 2 y 3 iniciamos el estudio de las propiedades de la función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. La riqueza dinámica presente en ella no se limita a lo observado hasta ahora. En este capítulo conoceremos nuevas propiedades dinámicas de T .

Por el Teorema de Sharkovskii y el corolario 3.5 sabemos que T tiene puntos periódicos de todos los periodos. Así $Per(T)$ tiene cardinalidad infinita. Veremos que este conjunto es denso en el intervalo $[0, 1]$, y que todos sus elementos son números racionales.

En la parte final del capítulo mostramos una familia de funciones cuyos elementos se obtienen al modificar la función *Tienda* de manera conveniente. Estas nuevas funciones nos dan ejemplos sencillos que muestran que las implicaciones *de regreso* en el orden de Sharkovskii (*Tabla S* en la página 39) no son válidas.

7.1. Más propiedades de la función *Tienda*

La gráfica de T en el intervalo $[0, 1]$ está formada por dos segmentos de recta. El primero, el que está sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, tiene pendiente 2, el segundo, sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, tiene pendiente -2 , ver figura 2.8 en la página 21. La gráfica de la composición $T \circ T = T^2$ está formada por cuatro segmentos cada uno de ellos con pendiente 2^2 y $-(2^2)$, usando estos valores de manera alternada.

Para dibujar la gráfica de T^3 partimos el intervalo $[0, 1]$ en 2^3 pequeños intervalos de igual longitud. Sobre cada uno de ellos, $[\frac{\ell}{2^3}, \frac{\ell+1}{2^3}]$, ponemos un segmento de recta cuya pendiente toma el valor 2^3 o el valor $-(2^3)$.

Observemos que

$$T^3 : \left[\frac{\ell}{2^3}, \frac{\ell+1}{2^3} \right] \rightarrow [0, 1]$$

es un homeomorfismo que *estira* el intervalo $\left[\frac{\ell}{2^3}, \frac{\ell+1}{2^3} \right]$ por un factor de 2^3 . Ver figura 7.1.

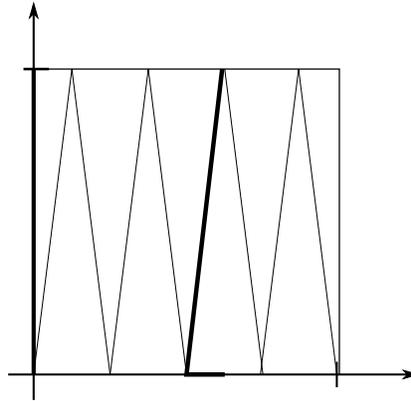


FIGURA 7.1: Transformación del intervalo $\left[\frac{\ell}{2^3}, \frac{\ell+1}{2^3} \right]$ en $[0, 1]$ con T^3 .

Esta misma situación se presenta cuando dibujamos la gráfica de T^n . Claro, ahora partimos en intervalo $[0, 1]$ en 2^n pequeños intervalos, y en cada uno de ellos la gráfica de T^n utiliza segmentos de recta de pendiente 2^n o de pendiente $-(2^n)$.

La siguiente proposición contiene la demostración de las afirmaciones que hemos presentado. No obstante su aspecto *muy técnico*, la proposición es importante ya que nos permitirá descubrir otras muy interesantes propiedades de la función $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Proposición 7.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ se tiene lo siguiente:*

- La función T^n restringida al intervalo $\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n} \right]$,

$$T^n|_{\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n} \right]} : \left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n} \right] \rightarrow [0, 1], \quad (7.1)$$

es un homeomorfismo.

- La regla de correspondencia de T^n en $\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right]$ es

$$T^n(x) = \mu + (-1)^\ell 2^n x,$$

donde μ es un número entero. Por lo tanto, en cada intervalo $\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right]$ la gráfica de T^n es un segmento de recta cuya pendiente es 2^n , si ℓ es par, y es $-(2^n)$, si ℓ es impar.

Demostración. Nuestro argumento utiliza inducción matemática.

Veamos que la afirmación es cierta para $n = 1$. En este caso, $\ell \in \{0, 1\}$.

Si $\ell = 0$, es inmediato que $T : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$ es homeomorfismo ya que en este intervalo,

$$T(x) = 2x = 0 + (-1)^0 2x.$$

Si $\ell = 1$, entonces $T : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow [0, 1]$ es también un homeomorfismo ya que en este conjunto,

$$T(x) = 2 - 2x = 2 + (-1)^1 2x.$$

Suponemos válida la afirmación para $n = k$. Es decir, para cada ℓ en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 2^k - 1\}$,

$$T^k \Big|_{\left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell+1}{2^k}\right]} : \left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell+1}{2^k}\right] \rightarrow [0, 1]$$

es un homeomorfismo. Además en cada intervalo $\left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell+1}{2^k}\right]$ la regla de correspondencia de T^k es:

$$T^k(x) = \mu + (-1)^\ell 2^k x, \quad \mu \in \mathbb{Z}.$$

Sean $n = k + 1$, y $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{k+1} - 1\}$.

Observemos que si $\ell \leq 2^k - 1$, entonces

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

y si $2^k \leq \ell \leq 2^{k+1} - 1$, entonces

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Caso 1.

Si $\ell \leq 2^k - 1$, entonces la función T^{k+1} se puede expresar así:

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}} \right] \xrightarrow{T} \left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell+1}{2^k} \right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

Ambas funciones son homeomorfismos. La segunda de ellas, T^k , lo es por hipótesis de inducción. Por tanto

$$T^{k+1} \Big|_{\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}} \right]} : \left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}} \right] \rightarrow [0, 1]$$

es un homeomorfismo.

Además,

$$x \xrightarrow{T} 2x \xrightarrow{T^k} \mu + (-1)^\ell 2^k(2x).$$

Por tanto,

$$T^{k+1}(x) = \mu + (-1)^\ell 2^{k+1}x.$$

Caso 2.

Si $2^k \leq \ell \leq 2^{k+1} - 1$, entonces T^{k+1} es así:

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}} \right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1} - \ell - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - \ell}{2^k} \right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

Es inmediato que la primera función es un homeomorfismo.

Como

$$2^k \leq \ell \leq 2^{k+1} - 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} -2^k &\geq -\ell \geq 1 - 2^{k+1}, \\ 2^{k+1} - 2^k - 1 &\geq 2^{k+1} - \ell - 1 \geq 0, \\ 2^k - 1 &\geq 2^{k+1} - \ell - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Así la segunda función, gracias a la hipótesis de inducción, también es un homeomorfismo.

En este caso, si $x \in \left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}} \right]$, entonces

$$\begin{aligned} T^{k+1}(x) &= T^k(T(x)) = T^k(2 - 2x) = \mu + (-1)^{2^{k+1} - \ell - 1} 2^k(2 - 2x) \\ &= \mu + (-1)^{2^{k+1} - \ell - 1} 2^{k+1} + (-1)^{2^{k+1} - \ell} 2^{k+1}x. \end{aligned}$$

Sea $\mu' = \mu + (-1)^{2^{k+1}-\ell-1} 2^{k+1}$.

Como ℓ y $2^{k+1} - \ell$ tienen la misma paridad, entonces

$$T^{k+1}(x) = \mu' + (-1)^\ell 2^{k+1}(x),$$

con $\mu' \in \mathbb{Z}$. □

La acción de la iteración T^n en cada intervalo de la forma $[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}]$ tiene consecuencias en todos los intervalos abiertos contenidos en $[0, 1]$. La proposición 7.2 muestra que todos los intervalos *crecen* al aplicarles la función *Tienda* una y otra vez. Crecen tanto que en una cantidad finita de iteraciones la imagen correspondiente se convierte en todo el intervalo $[0, 1]$.

Proposición 7.2. *Sea (a, b) , $a < b$, tal que $(a, b) \subset [0, 1]$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a, b) = [0, 1]$.*

Demostración. Como $a < b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Se sigue que existe un valor ℓ en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 2^N - 1\}$ tal que

$$\left[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N} \right] \subset (a, b).$$

Ahora, gracias a la proposición 7.1, tenemos que $T^N(a, b) = [0, 1]$. □

Un conjunto $B \subset [a, b]$ denso en el intervalo $[a, b]$, con $a < b$, tiene, al menos, dos características: Por un lado, está formado por una infinidad de elementos, ver ejercicio 7.1; por otro lado, los elementos de B están distribuidos por todo el intervalo $[a, b]$.

En el capítulo 3, corolario 3.5, página 33, observamos que la función T tiene puntos periódicos de todos los periodos en el intervalo $[0, 1]$. Esto implica que el conjunto $Per(T)$ tiene cardinalidad infinita. La proposición 7.3 muestra que estos puntos están presentes en todas las zonas de $[0, 1]$.

Proposición 7.3. *El conjunto $Per(T)$ es denso en $[0, 1]$.*

Demostración. Sea $(a, b) \subset [0, 1]$, $a < b$. Procediendo como en el corolario 7.2, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ y $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, 2^N - 1\}$ tales que el intervalo $[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}]$ está contenido en (a, b) .

Como $T^N([\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}]) = [0, 1]$, podemos aplicar la proposición 2.3 para encontrar un punto fijo de la función T^N en $[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}]$.

Así concluimos que existe

$$x_0 \in \left[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N} \right] \subset (a, b)$$

tal que $T^N(x_0) = x_0$. □

Otra consecuencia interesante de la proposición 7.1 es la siguiente: Si $x \in [0, 1]$ es un punto periódico bajo la función T , entonces existe n tal que

$$T^n(x) = x.$$

Así, existen $\mu \in \mathbb{Z}$ y $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ tales que

$$T^n(x) = \mu + (-1)^\ell 2^n x = x.$$

Por lo tanto x es racional.

En conclusión, el conjunto $Per(T)$ está contenido en $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

En el ejercicio 7.4 el lector se dará cuenta de que no todo número racional del intervalo $[0, 1]$ es punto periódico bajo T . De hecho existe una infinidad de racionales en $[0, 1]$ que no son puntos periódicos.

7.2. Sharkovskii y la función *Tienda*

En el capítulo 3 presentamos el siguiente arreglo de los números naturales:

$$\begin{aligned} &3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \\ &2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright 2 \cdot 9 \triangleright \dots \\ &2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright 2^2 \cdot 9 \triangleright \dots \\ &2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright 2^3 \cdot 9 \triangleright \dots \\ &\dots \\ &\dots \triangleright 2^5 \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1. \end{aligned}$$

La segunda y tercera parte del Teorema de Sharkovskii (teorema 3.11) dicen lo siguiente:

- Sea $n \in \mathbb{N}$. Si m es cualquier número natural tal que $m \triangleright n$, entonces existen un intervalo $A \subset \mathbb{R}$ y una función continua $f : A \rightarrow A$ tales que f tiene periodo n pero no tiene periodo m .
- Existen un intervalo $A \subset \mathbb{R}$ y una función continua $f : A \rightarrow A$ tales que f tiene puntos periódicos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y no tiene puntos periódicos de ningún otro periodo.

El capítulo 4 lo dedicamos a la demostración de estas dos afirmaciones construyendo las funciones correspondientes.

Ahora que conocemos más propiedades de la función *Tienda* tenemos la posibilidad de mostrar al lector otro camino, en esencia, otra colección de ejemplos, que demuestra la validez de las dos afirmaciones de Sharkovskii. Dedicaremos esta sección a esta tarea.

Por la proposición 7.1 sabemos que la ecuación $T^3(x) = x$ tiene exactamente ocho soluciones. Como $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sólo tiene dos puntos fijos, que corresponden a dos de las soluciones, entonces T tiene dos órbitas de periodo 3, a saber:

$$o\left(\frac{2}{9}, T\right) = \left\{ \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \dots \right\}, \quad \text{y} \quad o\left(\frac{2}{7}, T\right) = \left\{ \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \dots \right\}.$$

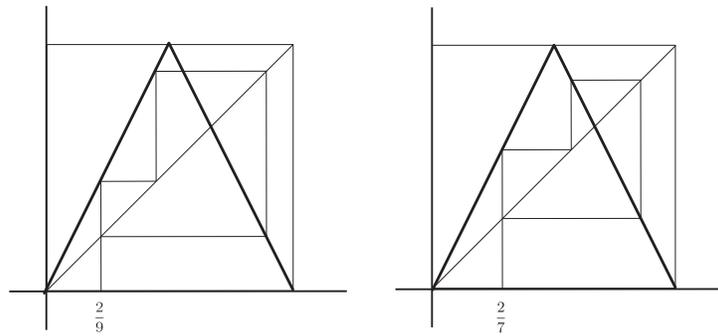


FIGURA 7.2: Dos órbitas de periodo 3 bajo T .

Ahora, a partir de $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, vamos a construir una función, lineal por partes, definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$, que solamente tenga una órbita de periodo 3, precisamente la $o\left(\frac{2}{7}, T\right)$.

Sea $F_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función dada por

$$F_3(x) = \begin{cases} \frac{6}{7}, & \text{si } x \in \left[\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right], \\ \frac{2}{7}, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{7}\right] \cup \left[\frac{6}{7}, 1\right], \\ T(x), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right] \cup \left[\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right]. \end{cases}$$

Es inmediato que $F_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua en el intervalo $[0, 1]$. Además el conjunto de puntos periódicos de F_3 , $Per(F_3)$, está contenido en el conjunto de puntos periódicos de T , $Per(T)$.

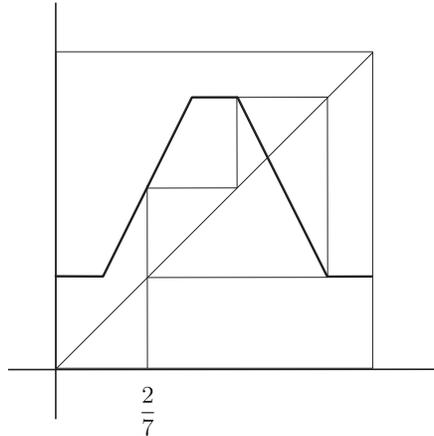


FIGURA 7.3: Gráfica de la función $F_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Como $\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\} \subset \left[\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right] \cup \left[\frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right]$, entonces

$$o\left(\frac{2}{7}, F_3\right) = o\left(\frac{2}{7}, T\right).$$

Así, F_3 tiene puntos periódicos de todos los periodos.

Por otro lado, dado que $\frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{4}{7}$, entonces $F_3\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{6}{7}$. De aquí se sigue que F_3 sólo tiene una órbita de periodo 3.

El camino que nos lleva de T a F_3 se puede explicar así: Tomamos la gráfica de T , que es un pico de altura 1, y lo *truncamos*. Es decir, cambiamos

la parte de arriba del pico por un segmento de recta horizontal. Así lo que antes era una *pirámide picuda*, de altura 1, ahora es una *pirámide con una meseta*, de altura < 1 . Al ir bajando la altura de este segmento de recta vamos modificando la dinámica generada por T . Obsérvese que mientras la altura de la meseta sea mayor que $\frac{6}{7}$ la órbita $o\left(\frac{2}{7}, T\right)$ sigue vigente, no la hemos alterado. Al mismo tiempo podemos ir modificando las *patas* de la gráfica de T con dos segmentos de recta que, ahora, van a subir poco a poco. Al poner la meseta exactamente a la altura $\frac{6}{7}$ y los segmentos de las patas a la altura $\frac{2}{7}$ obtenemos la gráfica de F_3 . Gracias a que nos detuvimos en estas alturas conservamos la órbita $o\left(\frac{2}{7}, T\right)$ y perdemos la órbita $o\left(\frac{2}{9}, T\right)$.

Seguiremos este mismo proceso para obtener ahora una función que sí tenga periodo 5 y no tenga periodo 3. La idea es bajar un poco más la meseta y, con ello, perder la única órbita de periodo 3 que tenemos y, al mismo tiempo, subir ligeramente los segmentos horizontales que modifican las *patas*. Intentando *salvar* una única órbita de periodo 5.

La función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tiene seis órbitas periódicas de periodo 5. De todas ellas, $F_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ solamente conservó dos:

$$o\left(\frac{10}{31}, T\right) = \left\{ \frac{10}{31}, \frac{20}{31}, \frac{22}{31}, \frac{18}{31}, \frac{26}{31}, \frac{10}{31}, \dots \right\}$$

y

$$o\left(\frac{10}{33}, T\right) = \left\{ \frac{10}{33}, \frac{20}{33}, \frac{26}{33}, \frac{14}{33}, \frac{28}{33}, \frac{10}{33}, \dots \right\}.$$

Como $\frac{26}{31} < \frac{28}{33}$, definimos $F_5 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ así:

$$F_5(x) = \begin{cases} \frac{26}{31}, & \text{si } x \in \left[\frac{13}{31}, 1 - \frac{13}{31}\right], \\ \frac{10}{31}, & \text{si } x \in \left[0, \frac{5}{31}\right] \cup \left[1 - \frac{5}{31}, 1\right], \\ T(x), & \text{si } x \in \left[\frac{5}{31}, \frac{13}{31}\right] \cup \left[1 - \frac{13}{31}, 1 - \frac{5}{31}\right]. \end{cases}$$

La función F_5 tiene exactamente una órbita de periodo 5 y no tiene órbitas de periodo 3.

Veamos ahora cómo funciona esta idea en el caso general.

Sea $N \geq 2$. El número de soluciones de la ecuación $T^N(x) = x$ es 2^N . Por tanto, el número k de órbitas periódicas de T de periodo N está acotado por $\frac{2^N - 2}{N}$.

Sean $\{o(x_i, T) : 1 \leq i \leq k\}$, esas k órbitas periódicas.

Sea

$$x_0 = \min \{ \max \{ x \in o(x_i, T) \} : 1 \leq i \leq k \}. \quad (7.2)$$

Las siguientes tres observaciones son inmediatas:

- La órbita $o(x_0, T)$ es periódica de periodo N .
- $T(x_0) = \min \{ x \in o(x_0, T) \}$.
- Si i , $1 \leq i \leq k$, es tal que $x_0 \notin o(x_i, T)$, entonces existe $y \in o(x_i, T)$ tal que $x_0 < y$.

Definimos $F_N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ así:

$$F_N(x) = \begin{cases} x_0, & \text{si } x \in \left[\frac{x_0}{2}, 1 - \frac{x_0}{2} \right], \\ T(x_0), & \text{si } x \in \left[0, \frac{T(x_0)}{2} \right] \cup \left[1 - \frac{T(x_0)}{2}, 1 \right], \\ T(x), & \text{si } x \in \left[\frac{T(x_0)}{2}, \frac{x_0}{2} \right] \cup \left[1 - \frac{x_0}{2}, 1 - \frac{T(x_0)}{2} \right]. \end{cases} \quad (7.3)$$

Otra forma de expresar la función $F_N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es esta:

$$F_N(x) = \begin{cases} x_0, & \text{si } T(x) \geq x_0, \\ T(x_0), & \text{si } T(x) \leq T(x_0), \\ T(x), & \text{si } T(x_0) \leq T(x) \leq x_0. \end{cases}$$

Proposición 7.4. *La función $F_N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cumple las siguientes propiedades:*

- *Es continua en $[0, 1]$.*
- *F_N tiene una única órbita de periodo N . De hecho, esa órbita es la del punto x_0 , $o(x_0, F_N) = o(x_0, T)$.*
- *Sea $m \in \mathbb{N}$. Si $m \triangleright N$, entonces F_N no tiene ninguna órbita periódica de periodo m .*

Demostración. Demostraremos sólo la tercera propiedad. El lector es invitado en el ejercicio 7.12 a ofrecer los argumentos necesarios de las dos primeras propiedades.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \triangleright N$. Supongamos que F_N tiene una órbita periódica de periodo m , digamos $o(y, F_N)$.

Sea

$$y_0 = \text{máx} \{x \in o(y, F_N)\}.$$

Entonces $y_0 < x_0$ y $T(x_0) < T(y_0)$. Además $o(y_0, F_N) = o(y_0, T)$.

Sea $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función dada por

$$F(x) = \begin{cases} y_0, & \text{si } x \in \left[\frac{y_0}{2}, 1 - \frac{y_0}{2}\right], \\ T(y_0), & \text{si } x \in \left[0, \frac{T(y_0)}{2}\right] \cup \left[1 - \frac{T(y_0)}{2}, 1\right], \\ T(x), & \text{si } x \in \left[\frac{T(y_0)}{2}, \frac{y_0}{2}\right] \cup \left[1 - \frac{y_0}{2}, 1 - \frac{T(y_0)}{2}\right]. \end{cases}$$

La función F tiene una órbita de periodo m . Como $m \triangleright N$, entonces, por la primera parte del teorema 3.11, F también tiene una órbita periódica de periodo N , digamos $o(z, F)$.

Observemos que $o(z, F) = o(z, T)$ y que

$$\text{máx} \{x \in o(z, F)\} < y_0 < x_0.$$

Esto es una contradicción con la definición de x_0 dada en (7.2). \square

Proposición 7.5. *Existe una función continua $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que F tiene puntos periódicos de periodo 2^k para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y no tiene puntos periódicos de ningún otro periodo.*

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión de números naturales:

$$\{N_i = 2^i \cdot 3\}_{i=1}^{\infty}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos la función $F_{N_i} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ siguiendo los argumentos dados en las fórmulas (7.2) y (7.3). Así cada función F_{N_i} tiene una única órbita periódica de periodo N_i , y no tiene ninguna órbita periódica de periodo m si $m \triangleright N_i$.

Sea $F_{N_i}([0, 1]) = D_i = [a_i, b_i]$. La colección $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de intervalos cerrados encajados. Para cada i , $D_{i+1} \subset \text{int}(D_i)$, $T(b_i) = a_i$, y la órbita $o(b_i, T)$ es periódica de periodo $2^i \cdot 3$.

Sean $[a, b] = D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ y $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función dada por

$$F(x) = \begin{cases} b, & \text{si } T(x) \geq b, \\ T(b), & \text{si } T(x) \leq T(b), \\ T(x), & \text{si } T(b) \leq T(x) \leq b. \end{cases}$$

Observemos que, por la continuidad de T , $T(b) = a$.

Otra forma de expresar F es ésta:

$$F(x) = \begin{cases} b, & \text{si } x \in [\frac{b}{2}, 1 - \frac{b}{2}], \\ a, & \text{si } x \in [0, \frac{T(b)}{2}] \cup [1 - \frac{T(b)}{2}, 1], \\ T(x), & \text{si } x \in [\frac{T(b)}{2}, \frac{b}{2}] \cup [1 - \frac{b}{2}, 1 - \frac{T(b)}{2}]. \end{cases}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que m no es una potencia de 2. Es decir,

$$m \notin \{n \in \mathbb{N} : n = 2^k, \text{ para alguna } k \geq 0\}.$$

Existe i tal que $m \triangleright 2^i \cdot 3 = N_i$.

Como $F_{N_i} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ no tiene órbitas de periodo m , entonces en $D \subset D_i$ tampoco hay ninguna órbita periódica de T de periodo m . Por lo tanto, F no tiene órbitas periódicas de periodo m .

Ahora veremos que $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sí tiene órbitas periódicas de todas las potencias de 2.

Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. La función *Tienda*, T , tiene una cantidad finita de órbitas periódicas de periodo 2^k . Cada función $F_{N_i} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tiene al menos una órbita periódica de periodo 2^k en el intervalo D_i . Por tanto, para una infinidad de índices i las funciones correspondientes F_{N_i} comparten una misma órbita de periodo 2^k , digamos $o(x_0, T)$.

Como $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión encajada, $o(x_0, T)$ está contenida en D . Así

$$o(x_0, T) = o(x_0, F),$$

F tiene un punto periódico de periodo 2^k . □

Ejercicios

EJERCICIO 7.1. Demostrar que si $B \subset [a, b]$ es un conjunto denso en el intervalo $[a, b]$, con $a < b$, entonces B tiene cardinalidad infinita.

EJERCICIO 7.2. Para la función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, exhibir un punto periódico tal que su periodo sea exactamente 763.

EJERCICIO 7.3. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

- $T(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$, y
- $T([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = ([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$.

EJERCICIO 7.4. Demostrar que $Per(T) \neq \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Más aún, mostrar un conjunto infinito, contenido en $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, tal que ninguno de sus elementos es punto periódico bajo T .

EJERCICIO 7.5. Demostrar que para todo $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ se tiene que $o(x, T)$ sólo visita una cantidad finita de puntos. *Sugerencia:* Si $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, considerar el conjunto

$$A = \left\{ 0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}, 1 \right\},$$

y observar que $T(A) \subset A$.

EJERCICIO 7.6. Sea $x \in [0, 1]$ tal que x no es racional. Demostrar que la órbita $o(x, T)$ visita una cantidad infinita de puntos. *Sugerencia:* Demostrar que para cada pareja n y m en \mathbb{N} con $n \neq m$, se tiene que $T^n(x) \neq T^m(x)$.

EJERCICIO 7.7. Sean (a, b) y (c, d) dos intervalos abiertos contenidos en $[0, 1]$ tales que $a < b < c < d$. Demostrar que existe $x_0 \in Per(T)$ tal que

$$o(x_0, T) \cap (a, b) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad o(x_0, T) \cap (c, d) \neq \emptyset.$$

EJERCICIO 7.8. Demostrar que para cada punto $x_0 \in [0, 1]$ se tiene que el conjunto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(x_0)$$

es denso en el intervalo $[0, 1]$.

EJERCICIO 7.9. Sea $\lambda > 0$. Consideremos la función $T_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ \lambda(1-x), & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cuando $\lambda = 2$ obtenemos la función *Tienda*, $T_2 = T$. La colección formada por todas estas funciones,

$$\{T_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \lambda > 0\},$$

es conocida como la *familia de las Tiendas*. Demostrar lo siguiente:

- Si $0 < \lambda < 1$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_\lambda)^n(x) = 0$.
- Si $\lambda = 1$, entonces para todo $x \leq \frac{1}{2}$, $T_\lambda(x) = x$; y para todo punto $x \geq \frac{1}{2}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_\lambda)^n(x) = T_\lambda(x) = 1 - x.$$

- Si $1 < \lambda \leq 2$, entonces para todo $x \in [0, 1]$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(T_\lambda)^n(x) \in [0, 1]$; y para todo punto $x \notin [0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_\lambda)^n(x) = -\infty.$$

- Si $\lambda > 2$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_\lambda)^n\left(\frac{1}{2}\right) = -\infty$.

EJERCICIO 7.10. Sean $A = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ y $F : A \rightarrow A$ la función dada por $F(x, y) = (T(x), T(y))$.

- Demostrar que el conjunto $Per(F)$ es denso en A .
- ¿Cuántas órbitas periódicas de periodo 3 tiene F ?
- Sean $\mathbf{u} = (u, v) \in A$ y $\varepsilon > 0$. Demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$A = F^N(B(\mathbf{u}, \varepsilon)).$$

EJERCICIO 7.11. Consideremos la función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ lineal por partes definida por $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{3}) = 1$, $f(\frac{2}{3}) = 0$ y $f(1) = 1$. Su gráfica tiene cierto parecido con la *Tienda*, la diferencia es que ahora se utilizan tres segmentos de recta cuyas pendientes son 3, -3 y 3. Demostrar lo siguiente:

- f tiene puntos periódicos de todos los periodos.
- $Per(f)$ forma un conjunto denso en $[0, 1]$.
- Si $x \in Per(f)$, entonces x es un número racional.

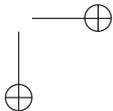
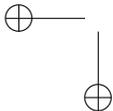
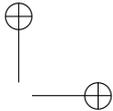
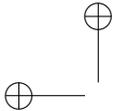
EJERCICIO 7.12. Demostrar las dos primeras afirmaciones contenidas en la proposición 7.4.

EJERCICIO 7.13. Sean $0 \leq a \leq \frac{2}{3} \leq b \leq 1$.

Sea $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función dada por:

$$F(x) = \begin{cases} b, & \text{si } T(x) \geq b, \\ a, & \text{si } T(x) \leq a, \\ T(x), & \text{si } a \leq T(x) \leq b, \end{cases}$$

Verdadero o falso: $Per(F) \subset Per(T)$. *Sugerencia:* Considere $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{7}{8}$.



CAPÍTULO 8

Transitividad topológica

Dedicamos esta parte a la transitividad topológica. En esencia una función es transitiva si para cada par de conjuntos abiertos no vacíos, existe un punto cuya órbita pasa por ambos conjuntos. Algunas de las funciones que ya conocemos tienen esta propiedad. En particular, la función *Tienda* es transitiva.

En este capítulo veremos que si una función $f : X \rightarrow X$ es transitiva, y X es un espacio métrico compacto, entonces existe un punto en X cuya órbita forma un conjunto denso en X .

La existencia de órbitas densas bajo f nos dice que hay puntos en X cuya dinámica no es nada simple. Un punto x_0 con estas características goza de la siguiente propiedad: su órbita visitará, en esencia, todos los rincones del espacio X .

Para demostrar este importante resultado necesitamos recordar algunas propiedades de las sucesiones. También traeremos a colación el Teorema de Baire.

8.1. Funciones transitivas

Definición 8.1. Sean X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Decimos que f es *topológicamente transitiva en X* (o *transitiva en X*) si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos de X , digamos U y V , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Observemos que si U y V son dos subconjuntos de X y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, entonces existe $x \in U$ tal que $f^n(x) \in V$. Al menos un

punto de U llega hasta V bajo la acción de la iteración f^n .

Hemos interpretado a la función $f : X \rightarrow X$ como la que define el movimiento: Un objeto que está en la posición $x \in X$, estará, una unidad de tiempo después, en la posición $f(x)$; dos unidades después en la posición $f^2(x)$, y así sucesivamente. Bajo esta óptica una función transitiva f da vida a una dinámica muy interesante. Hablando de manera intuitiva, una función que es transitiva *mueve* puntos de cualquier región U de X a cualquier otra región V de X . No lo hace de manera inmediata, es decir, no necesariamente a la primera aplicación de f hay puntos de U que van a dar a V . Pero lo que sí es seguro es que aplicando f una cantidad suficiente de veces sí habrá puntos de U que *viajen* a V .

Proposición 8.2. *La función Tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es transitiva en el intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos de $[0, 1]$ abiertos y no vacíos. Entonces existe un intervalo abierto (a, b) , $a < b$, contenido en U . Por la proposición 7.2, página 99, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a, b) = [0, 1]$. De aquí se sigue que $T^N(U) = [0, 1]$ y, por tanto, $T^N(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

Sea $f : X \rightarrow X$ una función transitiva en X . No es difícil demostrar que dados tres conjuntos abiertos no vacíos en X , digamos U , V y W , existe $x \in X$ tal que su órbita visita los tres conjuntos. De hecho la siguiente proposición contiene una afirmación más general.

Proposición 8.3. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y transitiva en X . Sea $U \subset X$ un conjunto abierto y distinto del vacío. Entonces para toda colección de n subconjuntos no vacíos y abiertos en X , U_1, U_2, \dots, U_n , se tiene que existen $x_0 \in U$ y n números naturales,*

$$m_1 < m_2 < \dots < m_n,$$

tales que

$$f^{m_1}(x_0) \in U_1, f^{m_2}(x_0) \in U_2, \dots, f^{m_n}(x_0) \in U_n.$$

Demostración. Utilizamos inducción. Sea $U \subset X$ abierto y no vacío.

Si la colección está formada por un solo elemento, U_1 , entonces, como f es transitiva, existen $x_0 \in U$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $f^{n_1}(x_0) \in U_1$.

Supongamos que la afirmación es cierta para toda colección de k conjuntos abiertos no vacíos en X .

Consideremos una colección de $k + 1$ conjuntos abiertos no vacíos en X , digamos $U_1, U_2, \dots, U_k, U_{k+1}$. Como f es transitiva, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^N(U_k) \cap U_{k+1} \neq \emptyset.$$

Entonces el conjunto $U_k \cap f^{-N}(U_{k+1})$ es abierto y distinto del vacío.

Consideramos ahora la colección

$$U_1, U_2, \dots, U_{k-1}, U_k \cap f^{-N}(U_{k+1}).$$

Aplicando la hipótesis de inducción, existe $x_0 \in U$ y existen k números naturales,

$$m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1} < m_k,$$

tales que

$$f^{m_1}(x_0) \in U_1, f^{m_2}(x_0) \in U_2, \dots, f^{m_{k-1}}(x_0) \in U_{k-1},$$

y

$$f^{m_k}(x_0) \in U_k \cap f^{-N}(U_{k+1}).$$

De aquí se sigue que $f^{m_k}(x_0) \in U_k$ y que $f^{m_k+N}(x_0) \in U_{k+1}$.

Tomando

$$m_{k+1} = m_k + N$$

concluimos la demostración. \square

Si un espacio métrico X se puede cubrir con una cantidad finita de bolas de radio $\varepsilon > 0$,

$$X = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon), \quad x_1, x_2, \dots, x_k \in X,$$

y $f : X \rightarrow X$ es transitiva, entonces la proposición 8.3 nos dice que existe al menos un punto en X cuya órbita visita todas las bolas $B(x_i, \varepsilon)$. Si esta condición de cubierta finita es posible para toda $\varepsilon > 0$, entonces la transitividad de f implica la existencia de puntos cuyas órbitas recorren extensiones cada vez más amplias del espacio X .

A partir de este hecho, suena interesante discutir la posible relación entre el concepto de transitividad y la existencia de al menos un punto cuya órbita forme un conjunto denso en X . Demostrar que para ciertos espacios X la transitividad de $f : X \rightarrow X$ sí implica la existencia de al menos una órbita densa es la meta principal de las siguientes dos secciones.

8.2. Espacios completos y el Teorema de Baire

En el capítulo 5 mencionamos los espacios completos. Recordemos que un espacio métrico X es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto de X .

Los conceptos de compacidad y completez están estrechamente relacionados. Para descubrir algunos aspectos de esta conexión recordamos el concepto de subsucesión.

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ en X , decimos que $\{b_j\}_{j=1}^\infty$ es una *subsucesión* de $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Para todo j , existe n_j tal que $b_j = a_{n_j}$.
- Si $j < k$, entonces $n_j < n_k$.

Proposición 8.4. *Toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ en un espacio métrico y compacto X tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sean X un espacio métrico compacto y $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión contenida en él.

Caso 1. Existe x_0 en X tal que para cada $\delta > 0$ se tiene que la cardinalidad del conjunto

$$A(x_0, \delta) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B(x_0, \delta)\}$$

es infinita. Entonces, gracias al ejercicio 8.3, existe una subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ que es convergente a x_0 .

Caso 2. Supongamos ahora que para todo $x \in X$ existe un radio $\delta_x > 0$ tal que la cardinalidad del conjunto

$$A(x, \delta_x) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B(x, \delta_x)\}$$

es finita.

Es inmediato que la colección de bolas abiertas $\{B(x, \delta_x) : x \in X\}$ forma una cubierta abierta de X . Como X es compacto existen $k \in \mathbb{N}$, x_1, x_2, \dots, x_k en X , y $\delta_{x_1} > 0, \delta_{x_2} > 0, \dots, \delta_{x_k} > 0$, tales que

$$X = \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \delta_{x_j}).$$

Como la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está contenida en X se tiene que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^k \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B(x_j, \delta_{x_j})\} = \bigcup_{j=1}^k A(x_j, \delta_{x_j}).$$

Pero esto es una contradicción ya que la cardinalidad de cada conjunto

$$A(x_j, \delta_{x_j}) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B(x_j, \delta_{x_j})\}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

es finita. Por lo tanto este segundo caso no es posible. \square

Proposición 8.5. *Todo espacio métrico y compacto X es completo.*

Demostración. Sean X un espacio métrico y compacto, y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy. Por la proposición 8.4, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos a x_0 .

Por el ejercicio 8.4 tenemos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge al mismo punto. \square

El siguiente teorema es conocido como el Teorema de Baire. La demostración que presentamos se basa en la que ofrece H. L. Royden en el libro *Real Analysis*, ver [36].

Teorema 8.6. *Sea X un espacio métrico completo. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos no vacíos, abiertos y densos en X .*

Entonces

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

116 8.2. ESPACIOS COMPLETOS Y EL TEOREMA DE BAIRE

Demostración. Sea $x_1 \in A_1$ y sea $r_1 > 0$ tal que

$$S_1 = B(x_1, r_1) \subset cl(S_1) \subset A_1.$$

Como A_2 es denso en X , entonces existe $x_2 \in A_2 \cap S_1$.

Dado que $A_2 \cap S_1$ es abierto, existe r_2 ,

$$0 < r_2 < \frac{r_1}{2},$$

tal que

$$S_2 = B(x_2, r_2) \subset cl(S_2) \subset A_2 \cap S_1 \subset cl(S_1).$$

Como A_3 es denso en X , existen $x_3 \in A_3 \cap S_2$, y r_3 ,

$$0 < r_3 < \frac{r_2}{2} < \frac{r_1}{2^2},$$

tales que

$$S_3 = B(x_3, r_3) \subset cl(S_3) \subset A_3 \cap S_2 \subset cl(S_2).$$

Siguiendo este procedimiento obtenemos tres cosas:

- una sucesión de puntos en X , $\{x_n\}_{n=1}^\infty$,
- una colección de conjuntos abiertos $\{S_n\}_{n=1}^\infty$, $S_n \subset cl(S_n) \subset A_n$, y
- una sucesión de números positivos $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \in S_n$, y las siguientes dos condiciones se cumplen:

$$0 < r_n \leq \frac{r_1}{2^{n-1}},$$

y

$$cl(S_{n+1}) \subset A_{n+1} \cap S_n \subset S_n \subset cl(S_n).$$

Sea $N \in \mathbb{N}$. Observemos que si n y m son mayores o iguales a N , entonces

$$x_n, x_m \in (S_n \cup S_m) \in S_N.$$

Por lo tanto, $d(x_n, x_m) \leq 2r_N$.

Así la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy (ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$).

Sea $x_0 \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Sea $N \in \mathbb{N}$, fijo. Observemos que para toda $n > N$ se tiene que x_n es elemento de S_{N+1} . Esto implica que

$$x_0 \in cl(S_{N+1}) \subset S_N \subset A_N.$$

Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_0 \in A_n$. Es decir, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Así la intersección $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es distinta del vacío. \square

Sea $B \subset X$. Recordemos que B es denso en ninguna parte si $int(cl(B))$ es el conjunto vacío.

Proposición 8.7. *Sea X un espacio métrico completo y sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección numerable de conjuntos, en X , densos en ninguna parte. Entonces*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \neq X.$$

Demostración. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $int(cl(B_n)) = \emptyset$, entonces los conjuntos $A_n = X \setminus cl(B_n)$ forman una colección de conjuntos abiertos y densos en X .

Por el teorema 8.6, existe $x_0 \in X$ tal que

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

De aquí se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \notin B_n$.

Por tanto,

$$x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

\square

Decimos que una función $f : X \rightarrow X$ es una *contracción* si existe r con $0 < r < 1$, tal que para toda pareja de puntos, x, y , en X se tiene que

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y).$$

El siguiente resultado es conocido y es muy importante. La demostración se puede consultar en el libro de H. L. Royden *Real Analysis*, ver [36].

Teorema 8.8. *Sea X un espacio métrico completo. Si $f : X \rightarrow X$ es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo, digamos x_0 , tal que para todo punto $x \in X$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$.*

Las observaciones son pertinentes antes de irnos a la siguiente sección. Sea $f : X \rightarrow X$ una contracción.

- Si X es completo, entonces toda órbita $o(x, f)$ es convergente a un solo punto. Así, la dinámica inducida por f es muy sencilla.
- Si X no es completo, entonces no es posible asegurar, ni siquiera, la existencia de un punto fijo bajo f . Ver ejercicio 8.8.

8.3. Las órbitas densas sí existen

La siguiente afirmación relaciona la transitividad topológica con la existencia de órbitas densas en un sistema dinámico discreto dado.

Teorema 8.9. *Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y transitiva en X . Entonces existe $x_0 \in X$ tal que la órbita $o(x_0, f)$ forma un conjunto denso en X .*

Demostración. Como X es compacto, dado $\varepsilon_1 = 1$, existen una cantidad finita de puntos $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n_1 1}$ en X , y una colección finita de bolas abiertas de radio 1, tales que:

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_1} B(x_{j1}, 1).$$

De hecho, para cada $k \in \mathbb{N}$, fijo, existen una cantidad finita de puntos $x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{n_k k}$, en X , y sus correspondientes bolas abiertas de radio $\frac{1}{k}$, tales que:

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_k} B\left(x_{jk}, \frac{1}{k}\right).$$

Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ la colección formada por todas estas bolas abiertas,

$$U_1 = B(x_{11}, 1), \quad U_2 = B(x_{21}, 1), \dots, \quad U_{n_1} = B(x_{n_1 1}, 1),$$

$$U_{n_1+1} = B\left(x_{12}, \frac{1}{2}\right), \quad U_{n_1+2} = B\left(x_{22}, \frac{1}{2}\right), \dots, U_{n_1+n_2} = B\left(x_{n_22}, \frac{1}{2}\right),$$

$$U_{n_1+n_2+1} = B\left(x_{13}, \frac{1}{3}\right), \dots$$

Por cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto:

$$A_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(U_i).$$

Observemos que cada A_i es un conjunto abierto y denso en X (ver ejercicio 8.1).

Entonces, por el Teorema de Baire, se tiene que:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset.$$

Afirmamos que para todo $x_0 \in A$ se tiene que su órbita, $o(x_0, f)$, forma un conjunto denso en X .

Sea $x_0 \in A$. Sea $U \subset X$ un conjunto abierto y distinto del vacío. Sean $y_0 \in U$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que $B(y_0, \varepsilon_0) \subset U$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Observemos que en la colección $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una de las bolas de radio $\frac{1}{k}$ contiene al punto y_0 . Existe $1 \leq j \leq n_k$ tal que:

$$y_0 \in B\left(x_{jk}, \frac{1}{k}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_0) \subset U.$$

Como $x_0 \in A$, entonces $x_0 \in \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}\left(B\left(x_{jk}, \frac{1}{k}\right)\right)$.

Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(x_0) \in B\left(x_{jk}, \frac{1}{k}\right) \subset U.$$

Es decir, la órbita $o(x_0, f)$ tiene un elemento en U y, por lo tanto, ella forma un conjunto denso en X . \square

Sea $Y \subset X$, donde X un espacio métrico completo. Decimos que Y es un *conjunto residual* si existe una colección numerable de conjuntos abiertos y densos en X , digamos $\{W_n\}_{n=1}^\infty$, tal que

$$\bigcap_{n=1}^\infty W_n \subset Y.$$

El teorema 8.9 muestra que el conjunto

$$D = \{x \in X : o(x, f) \text{ es densa en } X\}$$

es residual cuando $f : X \rightarrow X$ es continua y transitiva en X , y X es un espacio métrico compacto.

Si el espacio X no es completo, entonces la transitividad de $f : X \rightarrow X$ no implica la existencia de una órbita densa. Convencer al lector que esta afirmación es cierta es la meta del ejercicio 8.16.

Sea X un espacio métrico compacto. Si $A \subset X$ es residual, entonces A es denso en X , ejercicio 8.11. Por otro lado, no todo conjunto denso en X es residual. Por ejemplo $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ es denso en $[0, 1]$ pero no es residual.

La función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, es una función transitiva en el intervalo compacto $[0, 1]$, proposición 8.2. De aquí que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que su órbita es densa en $[0, 1]$. La siguiente proposición muestra que este punto no puede ser un número racional.

Proposición 8.10. *Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función Tienda. Sea $x_0 \in [0, 1]$ tal que la $o(x_0, T)$ es un conjunto denso en $[0, 1]$. Entonces $x_0 \notin \mathbb{Q}$.*

Demostración. Sea x_0 tal que su órbita bajo T es densa en $[0, 1]$. Si $x_0 \in \mathbb{Q}$ y $x_0 \neq 0$, existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $x_0 = \frac{p}{q}$, $p \leq q$.

Consideremos el conjunto

$$A = \left\{ 0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}, 1 \right\}.$$

Tenemos que $x_0 \in A$, y como $T(A) \subset A$ (ver ejercicio 7.5, capítulo 7), la cardinalidad de la $o(x_0, T)$ es finita, lo cual es una contradicción (ver ejercicio 8.20).

Por lo tanto, x_0 no puede ser racional. □

Quedaría ahora la pregunta de si todo punto $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ tiene órbita densa en $[0, 1]$ bajo la función $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. La respuesta es negativa. Pero necesitamos más herramientas para convencer al lector de que nuestra respuesta es correcta.

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas. La letra X representa un espacio métrico.

EJERCICIO 8.1. Sean $f : X \rightarrow X$ una función transitiva en X , y $U \subset X$ un conjunto abierto no vacío.

- Demostrar que la unión infinita

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$$

es un conjunto abierto y denso en X .

- Demostrar que la unión infinita

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$$

es un conjunto denso en X .

EJERCICIO 8.2. Sea $f : X \rightarrow X$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $f : X \rightarrow X$ es transitiva en X .
- Para todo par de puntos en X , x, y , y para toda $\varepsilon > 0$, existen $z \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(x, z) < \varepsilon \quad \text{y} \quad d(y, f^n(z)) < \varepsilon.$$

- Para toda pareja de conjuntos abiertos no vacíos en X , U y V , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-k}(U) \cap V \neq \emptyset$.
- Si $E \subset X$ es un conjunto cerrado tal que $f(E) \subset E$ y $E \neq X$, entonces $\text{int}(E) = \emptyset$.

EJERCICIO 8.3. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en X . Sea x_0 un punto en X tal que para cada $\delta > 0$ se tiene que la cardinalidad del conjunto

$$A(x_0, \delta) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B(x_0, \delta)\}$$

es infinita. Demostrar que existe una subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que es convergente al punto x_0 .

EJERCICIO 8.4. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy contenida en X . Supongamos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente a $a_0 \in X$,

$$\{b_k = a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = a_0.$$

Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es convergente a a_0 .

EJERCICIO 8.5. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $a_0 \in X$, entonces toda subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a a_0 .

EJERCICIO 8.6. Demostrar que en el intervalo unitario $[0, 1]$ hay al menos un número irracional. *Sugerencia:* Sea $q \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$. Entonces el conjunto formado por un solo elemento $\{q\}$ es denso en ninguna parte.

EJERCICIO 8.7. El intervalo $[0, 1]$ es infinito no numerable. *Sugerencia:* Dado $x_0 \in [0, 1]$, el conjunto $A = [0, 1] \setminus \{x_0\}$ es abierto y denso en el intervalo $[0, 1]$.

EJERCICIO 8.8. Mostrar un espacio métrico X y una contracción $f : X \rightarrow X$ tal que f no tenga puntos fijos en X .

EJERCICIO 8.9. Sea $\{A_n\}_{n=1}^k$ una colección finita de conjuntos abiertos y densos en $[0, 1]$. Demostrar que $A = \bigcap_{n=1}^k A_n$ es un conjunto abierto y denso en $[0, 1]$.

EJERCICIO 8.10. Verdadero o falso. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos abiertos y densos en $[0, 1]$. Entonces $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto infinito no numerable.

EJERCICIO 8.11. Sea X un espacio métrico compacto. Demostrar que si $A \subset X$ es residual, entonces A es denso en X .

EJERCICIO 8.12. Verdadero o falso. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos abiertos y densos en $[0, 1]$. Entonces $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto denso en $[0, 1]$.

EJERCICIO 8.13. Dar una colección $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos abiertos y densos en $[0, 1]$ tales que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ no sea abierto.

EJERCICIO 8.14. Sea X un espacio completo. Sean A y B dos subconjuntos de X . Demostrar que si A y B son residuales, entonces $A \cap B$ es residual.

EJERCICIO 8.15. Sean $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ y $B = [0, 1] \setminus A$. Demostrar que A no es residual en $[0, 1]$ mientras que B sí lo es.

EJERCICIO 8.16. Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función *Tienda*.

- Demostrar que si $0 \leq a < b \leq 1$ y $0 \leq c < d \leq 1$, entonces existen $x_0 \in \text{Per}(T)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$a < x_0 < b \quad \text{y} \quad c < T^n(x_0) < d.$$

- Sean $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ y $f : X \rightarrow X$ dada por $f(x) = T(x)$ para cada $x \in X$. Demostrar que f es transitiva en X y que f no tiene órbitas densas.

EJERCICIO 8.17. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transitiva en \mathbb{R} . Demostrar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que la órbita $o(x_0, f)$ forma un conjunto denso en \mathbb{R} .

Sugerencia: Sea $\mathbb{Q} = \{q_i : i \in \mathbb{N}\}$ una numeración de \mathbb{Q} . La colección infinita numerable

$$\mathbb{F} = \left\{ U_{i,n} = B\left(q_i, \frac{1}{n}\right) : i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

forma una cubierta abierta de \mathbb{R} .

EJERCICIO 8.18. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Sea $f : A \rightarrow A$ dada por $f(0) = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$.

- Exhibir una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua en \mathbb{R} , tal que para todo $x \in A$, se tenga que $F(x) = f(x)$. Esto demuestra que la función f es continua en A .
- Demostrar que existe $x_0 \in A$ tal que la órbita $o(x_0, f)$ forma un conjunto denso en A .
- ¿Es f transitiva en A ?

EJERCICIO 8.19. Sea X tal que todos sus elementos son puntos de acumulación. Demostrar lo siguiente:

- Sean $A \subset X$, y $a \in A$. Si A es denso en X , entonces $B = A \setminus \{a\}$ también es denso en X .
- Sea $x_0 \in X$ tal que $o(x_0, f)$ es densa en X . Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, fijo, la órbita de $f^k(x_0)$, $o(f^k(x_0), f)$, es densa en X .
- Si existe $x_0 \in X$ tal su órbita $o(x_0, f)$ es densa en X , entonces f es una función transitiva en X .

- Si existe $x_0 \in X$ tal su órbita $o(x_0, f)$ es densa en X , entonces el conjunto

$$B = \{x \in X : o(x, f) \text{ es densa en } X\}$$

también es denso en X .

EJERCICIO 8.20. Sean X un espacio de cardinalidad infinita y f una función de X en X . Sea $x_0 \in X$ tal que la órbita $o(x_0, f)$ forma un conjunto denso en X . Demostrar que la cardinalidad de $o(x_0, f)$ también es infinita.

EJERCICIO 8.21. Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función *Tienda*. Sean x_0 en $[0, 1]$, $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$. Demostrar que existe $x \in \text{Per}(T)$, de periodo n , tal que $d(x, x_0) < \delta$ y $n > N$. *Sugerencia:* En la bola $B(x_0, \delta)$ hay un punto con órbita densa en $[0, 1]$.

EJERCICIO 8.22. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, $a < b$, una función transitiva en $[a, b]$. Demostrar que existe un punto fijo de f , digamos w , tal que $a < w < b$.

EJERCICIO 8.23. Supongamos que X es compacto y que todos sus puntos son puntos de acumulación. Demostrar que si $f : X \rightarrow X$ es una función transitiva en X , entonces el conjunto

$$B = \{x \in X : o(x, f) \text{ es densa en } X\}$$

es infinito no numerable. *Sugerencia:* Suponer que B es infinito numerable y recordar el Teorema de Baire.

EJERCICIO 8.24. Sean $A \subset [0, 1]$ y $B \subset [0, 1]$ dos conjuntos totalmente desconexos. Demostrar que si A y B son cerrados, entonces $A \cup B$ es totalmente desconexo. *Sugerencia:* Considerar los conjuntos $[0, 1] \setminus A$ y $[0, 1] \setminus B$.

CAPÍTULO 9

Órbitas estables

En esta parte aparecen las órbitas estables y el concepto de sensibilidad a las condiciones iniciales. Su estudio nos permite, finalmente, arribar a la importante definición de *caos*. Los sistemas dinámicos discretos caóticos presentan una extraordinaria combinación de propiedades. Esto les permite generar órbitas con una gran variedad de comportamientos.

9.1. Una primera idea de estabilidad

Las órbitas periódicas representan movimientos sencillos. Si x_0 es un punto periódico bajo la función $f : X \rightarrow X$, digamos de periodo m , entonces al aplicar las iteraciones de f la órbita de x_0 recorre una y otra vez, de manera ordenada, un conjunto finito de puntos,

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\}.$$

Nuestro interés es saber si esta información implica algún comportamiento similar en las órbitas de los puntos cercanos a x_0 .

A primera vista este intento no parece tener mucho futuro. La dinámica de la función *Tienda* nos ha enseñado que muy cerca de una órbita periódica, digamos de periodo 3, podemos encontrar puntos con órbita periódica de periodos tan grandes como queramos (ver ejercicio 8.21 del capítulo 8), o puntos con órbita densa en $[0, 1]$.

En contraste con lo anterior, la función

$$f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], \quad \text{dada por} \quad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) \quad (9.1)$$

126 9.2. PUNTOS FIJOS ATRACTORES (UN POCO MÁS GENERAL)

tiene una órbita periódica de periodo dos,

$$o(-1, f) = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\},$$

y en una vecindad pequeña del punto $x_0 = -1$ todos los puntos tienen órbitas que se comportan de manera muy similar a $o(-1, f)$, ver ejercicio 2.20 en el capítulo 2.

Nuestra meta es descubrir las condiciones que debe cumplir f que nos permitan estar seguros que si x es un punto suficiente cercano a x_0 , entonces la órbita de x *se parece* a la órbita de x_0 , no en el sentido de que ella sea periódica del mismo periodo, sino en el sentido de que la distancia entre ambas órbitas se mantenga acotada. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, la distancia entre los puntos $f^n(x)$ y $f^n(x_0)$ es tan pequeña como hayamos establecido previamente. Un punto x_0 que tuviera este tipo de propiedad es para nosotros un punto con *órbita estable*.

Una de las ventajas más importantes de que la órbita de x_0 resultara ser estable es que tenemos un *margen de tolerancia*. Si al intentar iniciar un movimiento con la condición inicial x_0 escogemos, por error, un punto distinto a x_0 pero muy cercano a él, digamos x , podemos estar seguros que ambas órbitas recorren paso a paso casi los mismos lugares del espacio X .

9.2. Puntos fijos atractores (un poco más general)

En el capítulo 2 vimos puntos fijos atractores y repulsores. Consideramos ahora una situación un poco más general. Si la función f está definida en un espacio métrico X que no es, necesariamente, un intervalo, entonces debemos modificar un poco las definiciones de punto fijo atractor y repulsor.

Sea $f : X \rightarrow X$, y sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. Decimos que x_0 es un *punto fijo atractor* de f si para todo conjunto abierto W , $x_0 \in W$, existe un subconjunto abierto $U \subset W$ tal que $x_0 \in U$, $f(U) \subset U$, y para toda $x \in U$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0.$$

Decimos que x_0 es un *punto fijo repulsor* de f si existe un subconjunto abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y para cada $x \in U$, $x \neq x_0$, existe $n \in \mathbb{N}$, n depende de x , tal que $f^n(x) \notin U$.

Sea x_0 es un punto fijo atractor bajo f . La *cuenca de atracción* de x_0 es el conjunto de todos los puntos de X cuya órbita converge a x_0 . Denotamos

este conjunto así: $W^s(x_0)$. La primera propiedad que notamos en $W^s(x_0)$ es que siempre es un conjunto abierto, ver ejercicio 9.1.

De manera análoga a lo hecho en el capítulo 2 definimos órbitas periódicas atractoras o repulsoras. Sean $f : X \rightarrow X$ y $x_0 \in \text{Per}(f)$ de periodo n . Decimos que la órbita $o(x_0, f)$ es *atractora* si x_0 un punto fijo atractor para la iteración f^n . Decimos que la órbita $o(x_0, f)$ es *repulsora* si x_0 un punto fijo repulsor para f^n .

Para la función descrita por la fórmula (9.1), la órbita de $x_0 = -1$ es periódica atractora.

Un ejemplo donde hay órbitas periódicas repulsoras nos lo proporciona la función *Tienda*. Resulta que todas las órbitas periódicas presentes en la *Tienda* son repulsoras, ver ejercicio 9.15. Combinemos esta información con otro dato conocido: el conjunto $\text{Per}(T)$ es denso en el intervalo $[0, 1]$, (proposición 7.3), y obtenemos una situación *casi explosiva*.

Por el ejercicio 7.6, capítulo 7, sabemos que todos los puntos irracionales del intervalo $[0, 1]$ tienen órbitas infinitas bajo T . Así ninguno de esos puntos tiene órbita periódica o preperiódica. ¿Cómo son estas órbitas? Por un lado no pueden salir del intervalo $[0, 1]$, por otro lado deben alejarse de las órbitas periódicas, ya que todas son repulsoras, y, para colmo, estas órbitas periódicas forman un conjunto denso en ese mismo intervalo. El resultado es un sistema dinámico en verdad muy interesante.

9.3. Órbitas estables

Sean $f : X \rightarrow X$ una función continua en el espacio métrico X , y $x_0 \in X$ tales que $f(x_0) = x_0$. Si x_0 es atractor, entonces los puntos cercanos tienen órbitas convergentes a x_0 . Una situación ligeramente diferente es la contenida en la siguiente definición.

Definición 9.1. Decimos que el punto fijo x_0 es *estable* (o tiene *órbita estable*) si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in B(x_0, \delta)$, y para toda $n \geq 0$, se tiene que

$$d(f^n(x), x_0) < \varepsilon.$$

En este caso los puntos cercanos no necesariamente tienen órbitas convergentes a x_0 , sin embargo tenemos información importante sobre su com-

portamiento: estas órbitas no se alejan más allá de una distancia $\varepsilon > 0$ del punto fijo.

Un punto fijo x_0 *no es estable* (su órbita *no es estable*) si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existen $x \in B(x_0, \delta)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(f^n(x), x_0) \geq \varepsilon_0.$$

Proposición 9.2. *Sea $f : A \rightarrow A$ una función continua en un intervalo $A \subset \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in A$. Supongamos que f es derivable en x_0 , y que $f(x_0) = x_0$.*

- i) Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo estable.*
- ii) Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo que no es estable.*

Demostración. Seguimos las ideas que presentamos en la proposición 2.4, capítulo 2.

(i) Sea $\varepsilon > 0$. Para un valor c tal que $|f'(x_0)| < c < 1$, existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo punto $x \in A$, con $|x - x_0| < \delta_0$ se tiene que

$$|f(x) - x_0| \leq c|x - x_0| < c\delta_0.$$

Por lo tanto,

$$|f(x) - x_0| < \delta_0.$$

Observemos que para cada γ , $0 < \gamma < \delta_0$, se cumple la siguiente condición: Si $x \in B(x_0, \gamma)$, entonces para toda $n \geq 0$ se tiene que $f^n(x) \in B(x_0, \gamma)$.

Tomando $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_0\}$, confirmamos que la órbita de x_0 bajo f es estable.

(ii) En este caso tenemos $|f'(x_0)| > 1$. Sea $\delta_0 > 0$ tal que para todo punto $x \in B(x_0, \delta_0)$, $x \neq x_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin B(x_0, \delta_0)$.

Concluimos que para cada γ , con $0 < \gamma < \delta_0$, existen $x \in B(x_0, \gamma)$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f^N(x)$ ya no pertenece a la bola $B(x_0, \delta_0)$.

Por lo tanto, tomando $\varepsilon_0 = \delta_0$, la órbita de x_0 no es estable. □

Los puntos fijos de la función *Tienda*, 0 y $\frac{2}{3}$, son ambos puntos fijos no estables ya que $T'(0) = 2$ y $T'(\frac{2}{3}) = -2$.

La siguiente es una definición más general. La idea es describir órbitas estables aún en el caso de que no se trate de órbitas de puntos fijos.

Definición 9.3. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Decimos que un punto x_0 de X tiene *órbita estable*, o tiene *órbita Lyapunov estable*, si

para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para toda $x \in B(x_0, \delta)$ y para toda $n \geq 0$ se tiene que

$$d(f^n(x), f^n(x_0)) < \varepsilon.$$

En la figura 9.1 se muestran los primeros pasos de un punto con órbita estable.

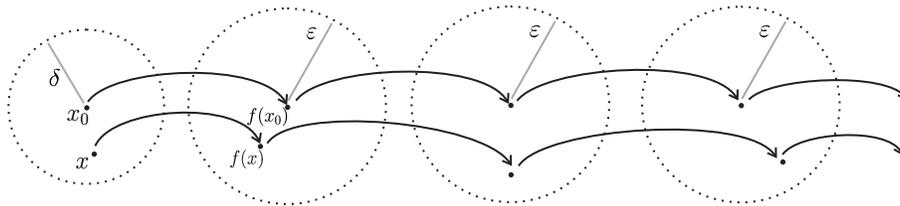


FIGURA 9.1: Órbita estable

Las órbitas estables son, en cierto sentido, fáciles de seguir con un error pequeño. Supongamos que la órbita de x_0 es estable. Si queremos seguir las iteraciones $f^n(x_0)$ con un error menor que un valor positivo ε , entonces tomemos la condición inicial x cercana a x_0 con un error menor que $\delta > 0$. Es decir, tomemos x tal que $d(x, x_0) < \delta$ y sigamos la órbita $o(x, f)$. La estabilidad de la órbita de x_0 nos asegura que para cualquier ε positiva, sí podemos encontrar la δ positiva que cumpla la condición.

La órbita de $x_0 \in X$ *no es estable* si sucede lo siguiente: existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, podemos encontrar un punto $y \in B(x_0, \delta)$ y un número natural n , que depende de y , tales que

$$d(f^n(x_0), f^n(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Por ejemplo, para la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2x$ se tiene que todos los puntos en \mathbb{R} tienen órbitas no estables.

En la siguiente sección veremos que todas las órbitas de la función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, son no estables. Antes de hacer la demostración formal de este hecho llamamos la atención del lector hacia la figura 9.2. En ella presentamos las gráficas de un *experimento* hecho con la computadora. En la primera de ellas mostramos las primeras 80 iteraciones de la órbita periódica $o(\frac{2}{9}, T)$. En la segunda seguimos la órbita de un punto muy cercano a $\frac{2}{9}$,

$$x = \frac{2}{9} + \frac{1}{1,000,000}.$$

En la tercera mostramos la distancia, iteración a iteración, entre ellas.

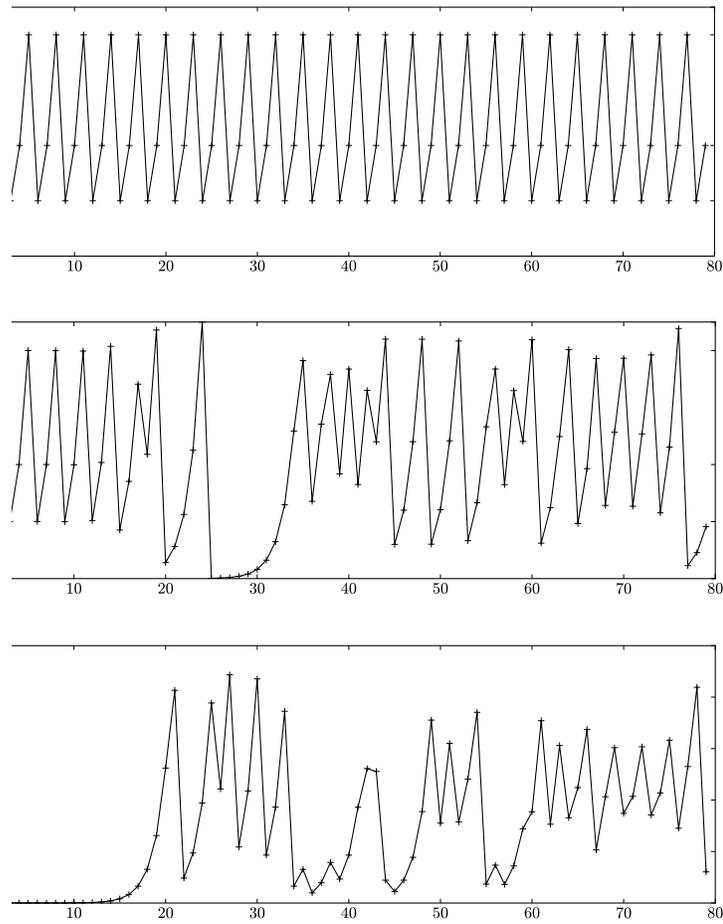


FIGURA 9.2: Órbita no estable en la *Tienda*.

En términos coloquiales podríamos decir que un sistema dinámico discreto, $f : X \rightarrow X$, donde todas sus órbitas son estables es un sistema que se *comporta muy bien*. Por otro lado, la presencia de algunas o muchas órbitas no estables provocaría, si no escogemos de manera exacta la condición inicial, muchos problemas. Al iterar la función f estaríamos tal vez siguiendo una

órbita que se aleja significativamente de la órbita que realmente queremos seguir. En este sentido, un sistema dinámico con estas características sería muy poco útil si queremos hacer predicciones que tengan alguna validez.

9.4. Sensibilidad a las condiciones iniciales

La siguiente definición la podríamos entender como una *no estabilidad* que abarca a todas las órbitas por igual.

Definición 9.4. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Decimos que f es *sensible a las condiciones iniciales en X* si existe un valor $\varepsilon_0 > 0$, fijo, tal que para toda $x \in X$, y para toda $\delta > 0$, existen $y \in B(x, \delta)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Al número ε_0 se le llama *constante de sensibilidad de f* .

Una función que es sensible a las condiciones iniciales $f : X \rightarrow X$ nos dice que ninguna de sus órbitas es estable. Pero no sólo eso, hay además una suerte de uniformidad en este fenómeno: La $\varepsilon_0 > 0$ para la cual falla la estabilidad es la misma para todas las órbitas.

Ejemplo 9.5. Cada elemento de la familia de funciones $f_{m,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_{m,b}(x) = mx + b, \quad \text{con } |m| > 1,$$

es sensible a las condiciones iniciales en \mathbb{R} . Ver ejercicio 9.6.

Proposición 9.6. La función Tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es sensible a las condiciones iniciales en el intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Sea $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Tomemos $x \in [0, 1]$ y $\delta > 0$. Por la proposición 7.2, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(B(x, \delta)) = [0, 1].$$

Por lo tanto existen en el intervalo $(x - \delta, x + \delta) \cap [0, 1] = B(x, \delta)$ dos puntos, digamos x_1 y x_2 , tales que $T^n(x_1) = 0$, $T^n(x_2) = 1$.

De aquí que:

$$|T^n(x) - T^n(x_1)| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{ó} \quad |T^n(x) - T^n(x_2)| \geq \frac{1}{2}.$$

□

Con el concepto de la sensibilidad a las condiciones iniciales en nuestro poder estamos ya en posición de definir lo que se entiende por *dinámica caótica*. Dedicamos la siguiente sección a esta tarea.

9.5. La definición de caos

La siguiente es la definición de *caos* dada por R. L. Devaney en 1985 (ver [14]). No es la única definición posible para describir la presencia de una gran cantidad de puntos con órbitas cuyos movimientos son, de alguna manera, *extraños* o *complejos*. Sin embargo es una de las más populares.

Sea X un espacio métrico que no tiene puntos aislados. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua en X .

Definición 9.7. Decimos que $f : X \rightarrow X$ es una *función caótica*, o genera un *sistema dinámico caótico*, en X si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- El conjunto $Per(f)$ forma un conjunto denso en X ,
- f es transitiva en X , y
- f es sensible a las condiciones iniciales en X .

No es de extrañar que, luego de todo lo que hemos descubierto de la dinámica generada por la función *Tienda*, ella sea nuestro primer ejemplo.

Teorema 9.8. *La función $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es caótica en $[0, 1]$.*

Demostración. Se sigue de manera inmediata de lo hecho en las proposiciones 7.3, 8.2 y 9.6. □

En los capítulos que siguen presentamos otros ejemplos de funciones caóticas. En particular veremos que la función Logística,

$$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad L(x) = 4x(1 - x),$$

es caótica en el intervalo $[0, 1]$.

A continuación hacemos una pequeña lista de varios resultados importantes relacionados con los conceptos que hasta ahora hemos visto. Si bien no damos las demostraciones correspondientes, sí ofrecemos a los lectores las referencias necesarias.

El primero de ellos nos dice que la tercera condición en la definición 9.7 es consecuencia de las dos primeras condiciones. La demostración se puede consultar en el artículo *On Devaney’s Definition of Chaos*, escrito por J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey en 1992, ver [6].

Teorema 9.9. *Si $f : X \rightarrow X$ es transitiva en X y el conjunto $Per(f)$ es denso en X , entonces f es sensible a las condiciones iniciales en X .*

Los siguientes dos resultados se refieren a funciones definidas en un intervalo de la recta real. Resulta que para este tipo de funciones la transitividad es una condición muy fuerte ya que ella sola implica a las dos condiciones restantes de la definición 9.7. La demostración del teorema 9.10 viene en el artículo *On Intervals, Transitivity = Chaos* escrito en 1994 por M. Vellekoop y R. Berglund, ver [44].

Teorema 9.10. *Sea A un intervalo en \mathbb{R} . Sea $f : A \rightarrow A$ una función transitiva en A . Entonces $Per(f)$ es un conjunto denso en A .*

De los teorema 9.9 y 9.10 se sigue que si A es un intervalo en la recta real \mathbb{R} , y $f : A \rightarrow A$ es una función transitiva en A , entonces f es caótica en A .

En el último resultado que presentamos en esta sección se destaca la importancia de la sensibilidad a las condiciones iniciales cuando se trabaja con funciones definidas en un intervalo. La demostración se encuentra en el artículo *Sensitivity implies chaos* escrito por H. Méndez en 2003, ver [31], y en las notas *Chaos for continuous interval maps* de S. Ruette, ver [37].

Teorema 9.11. *Sea $A = [a, b]$ un intervalo en \mathbb{R} . Si $f : A \rightarrow A$ es sensible a las condiciones iniciales en A , entonces existen $B \subset A$, conjunto cerrado con $int(B) \neq \emptyset$, y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f^N(B) = B$ y f^N , restringida a B , es caótica en B .*

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas. La letra X representa un espacio métrico sin puntos aislados.

EJERCICIO 9.1. Sean $f : X \rightarrow X$ y $x_0 \in X$ un punto fijo atractor bajo f . Demostrar que la cuenca de atracción de x_0 , $W^s(x_0)$, es un subconjunto abierto de X .

EJERCICIO 9.2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = x^2$. Demostrar lo siguiente:

- Si $0 \leq x < 1$, entonces la órbita $o(x, f)$ sí es estable.
- El punto $x_0 = 1$ tiene bajo f una órbita no estable.

EJERCICIO 9.3. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función lineal por partes dada por $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$ y $f(1) = \frac{1}{2}$. Encontrar todos los puntos x con órbita estable bajo f .

EJERCICIO 9.4. Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo sensible a las condiciones iniciales. Demostrar que f tiene a lo más un punto fijo.

EJERCICIO 9.5. ¿Existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sensible a las condiciones iniciales y tal que f no tiene puntos fijos?

EJERCICIO 9.6. Demostrar la afirmación contenida en el ejemplo 9.5.

EJERCICIO 9.7. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función lineal por partes dada por $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{3}) = 1$, $f(\frac{2}{3}) = 0$ y $f(1) = 1$. Demostrar que f es caótica en $[0, 1]$.

EJERCICIO 9.8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada por

$$f(x) = mx + b, \quad m \text{ y } b \text{ constantes.}$$

Demostrar que f no es caótica en \mathbb{R} .

EJERCICIO 9.9. Sea $f : X \rightarrow X$. Demostrar que si f tiene un punto periódico atractor, entonces f no es caótica en X .

EJERCICIO 9.10. Demostrar que f es caótica en X si y sólo si para toda pareja de conjuntos abiertos, no vacíos, U y V , se tiene que existe un punto periódico x , tal que

$$o(x, f) \cap U \neq \emptyset, \quad \text{y} \quad o(x, f) \cap V \neq \emptyset.$$

Sugerencia: Utilizar el teorema 9.9.

EJERCICIO 9.11. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función caótica en $[0, 1]$. Sean $B = [0, 1] \cup [2, 3]$ y $F : B \rightarrow B$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) + 2 & \text{si } x \in [0, 1], \\ x - 2 & \text{si } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Demostrar que F es caótica en B .

EJERCICIO 9.12. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5]$. Mostrar una función $f : A \rightarrow A$, caótica en A .

EJERCICIO 9.13. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ la función dada por

$$f(x, y) = (T(x), T(y)),$$

donde $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la función *Tienda*.

Demostrar que f es caótica en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

EJERCICIO 9.14. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y sea x_1 un punto periódico de f de periodo n . Supongamos que

$$o(x_1, f) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, \dots\},$$

y que f es derivable en cada uno de los puntos de la órbita de x_1 . Demostrar que para cada $1 \leq j \leq n$ se tiene que

$$(f^n)'(x_j) = f'(x_1) f'(x_2) \cdots f'(x_n) = \prod_{i=1}^n f'(x_i).$$

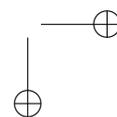
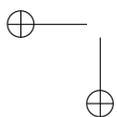
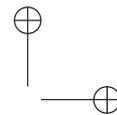
EJERCICIO 9.15. Demostrar que todas las órbitas periódicas presentes en la *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, son repulsoras. *Sugerencia:* Si $o(x, T)$ es una órbita periódica, entonces $\frac{1}{2}$ no pertenece a $o(x, T)$.

EJERCICIO 9.16. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = x_0$ y $|f'(x_0)| < 1$. Demostrar que todo punto en la cuenca de atracción de x_0 , $W^s(x_0)$, tiene órbita estable.

EJERCICIO 9.17. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Demostrar que si $f^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es caótica en $[0, 1]$, entonces f es caótica en $[0, 1]$.

EJERCICIO 9.18. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un homeomorfismo tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, y tal que para toda x , $0 < x < 1$, se tiene que $f(x) < x$. Entonces

- para toda $0 \leq x < 1$, la órbita $o(x, f)$ es estable, y
- la órbita del punto $x_0 = 1$ no es estable.



CAPÍTULO 10

Dinámica simbólica

El estudio de las propiedades dinámicas de un elemento de la familia de las *Tiendas* nos llevará a la presentación de la *dinámica simbólica*.

La función que nos interesa en este capítulo, $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, está dada por

$$P(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (10.1)$$

El conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ cuya órbita bajo P está acotada tiene una fuerte e inesperada relación con el conjunto de Cantor. Una vez instalados en este conjunto, introduciremos un espacio cuyos elementos son sucesiones infinitas de ceros y unos. Definiremos, además, en este extraño espacio una función *corrimiento*.

Resulta que la dinámica de P , restringida al conjunto de puntos con órbita acotada, se explica de manera clara y elegante con este espacio de sucesiones y con ese corrimiento.

10.1. El conjunto de los puntos atrapados

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en \mathbb{R} .

Definición 10.1. El conjunto de todos los puntos x cuya órbita está acotada lo llamamos el *conjunto de los puntos atrapados* o el *conjunto de los puntos prisioneros*. Este conjunto lo denotamos con $J(f)$. Es decir,

$$J(f) = \{x \in \mathbb{R} : o(x, f) \text{ está acotada}\}.$$

Observemos que si $x \in J(f)$, entonces $f(x)$ también está en $J(f)$ ya que $o(f(x), f)$ está contenida en $o(x, f)$. De aquí se sigue que

$$f(J(f)) \subset J(f).$$

Por otro lado, sea y en $J(f)$. Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, entonces x también está en $J(f)$ ya que

$$o(x, f) = \{x\} \cup o(y, f).$$

Así, si se tiene que $J(f) \subset f(\mathbb{R})$, entonces

$$J(f) \subset f(J(f)),$$

y con ello estos dos conjuntos son iguales, $f(J(f)) = J(f)$.

Definición 10.2. Sean $f : X \rightarrow X$ y A un subconjunto de X . Decimos que A es un *conjunto invariante* bajo f si $f(A) \subset A$. Decimos que A es *estrictamente invariante* bajo f si $f(A) = A$.

Resulta que $J(f)$ es siempre un conjunto invariante bajo f . Otras propiedades del conjunto $J(f)$ se presentan en los ejercicios de este capítulo.

Tal vez la importancia de este conjunto de puntos atrapados se vea si recordamos que para la función *Tienda*, $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que $J(T) = [0, 1]$. Y es precisamente en este conjunto donde T tiene una dinámica caótica, y fuera de él su dinámica es muy sencilla.

Si la función f está definida en los números complejos, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, y la regla de correspondencia de f se expresa de forma polinomial,

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_Nz^N,$$

con $N \geq 2$ y $a_N \neq 0$, entonces

$$J(f) = \{z \in \mathbb{C} : o(z, f) \text{ está acotada}\}.$$

es conocido como el *conjunto de Julia lleno de f* y la frontera de $J(f)$ es el *conjunto de Julia de f* .

Sea $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por la regla de correspondencia (10.1). De aquí en adelante la letra P sólo la utilizaremos para designar esta función.

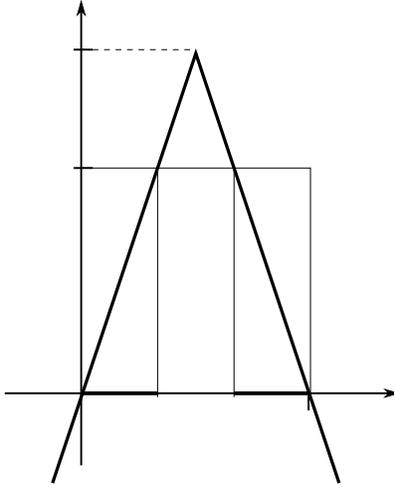


FIGURA 10.1: Gráfica de la función $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nos interesa descubrir la estructura del conjunto $J(P)$. En particular demostraremos que este conjunto es el conjunto de Cantor. Una vez que cumplida esta tarea demostraremos que P restringida a $J(P)$ es caótica.

En la figura 10.1 el lector puede ver la gráfica de la función $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Las gráficas de P y T son muy parecidas. La única diferencia es la altura que alcanza el pico que ambas tienen en el punto $x = \frac{1}{2}$. Sin embargo, el conjunto de los puntos atrapados de una y otra es muy distinto.

Las demostraciones de las siguientes cinco observaciones son casi inmediatas. El lector es invitado a ofrecer los detalles necesarios en el ejercicio 10.6.

- Sea $x < 0$. Entonces $P(x) < x$. Más aún, para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P^n(x) = 3^n x$. Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty$.
- Si $x > 1$, entonces $P(x) < 0$. Por lo tanto para estos puntos también se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty$.
- Los únicos puntos fijos de P son 0 y $\frac{3}{4}$, y ambos son repulsivos. De hecho todas las órbitas periódicas de P son repulsoras.
- Si x está en el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, entonces $P(x) > 1$. Esto nos permite,

nuevamente, concluir que para este tipo de puntos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty.$$

- $x_0 = \frac{3}{28}$ es un punto periódico bajo P y es de periodo 3. Por tanto, P tiene puntos periódicos de todos los periodos. Además el conjunto $Per(P)$ tiene cardinalidad infinita.

Sobre el conjunto $J(P)$ hasta ahora sabemos lo siguiente:

$$J(P) \subset \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

tanto 0 como $\frac{3}{4}$ pertenecen a $J(P)$ y los puntos que recorre la órbita de $\frac{3}{28}$ también están en $J(P)$. De hecho, $Per(P) \subset J(P)$.

Llamamos C_1 a la unión de los intervalos cerrados $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

La función P transforma al intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ en el intervalo $[0, 1]$ de manera lineal haciendo crecer las distancias por un factor de 3. El intervalo abierto $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ es transformado bajo P en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Así $J(P)$ no tiene puntos en el intervalo $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$. Algo similar le sucede al intervalo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Sea C_2 la unión de los 2^2 intervalos cerrados

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \text{ y } \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Cada uno de estos intervalos es transformado bajo P^2 en el intervalo unitario. Este hecho provoca que el tercio de en medio de cada uno de ellos esté formado por puntos que no están en $J(P)$. Ver figura 10.2.

Con esta información podemos definir C_3 como la unión de 2^3 intervalos cerrados de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, tal que la iteración P^3 transforma a cada uno de ellos en el intervalo unitario $[0, 1]$, y tal que el conjunto $J(P)$ está contenido en C_3 .

Podemos continuar este proceso indefinidamente, quitando en cada paso puntos cuya órbita no está acotada.

Los conjuntos C_n que se van formando son precisamente los que se utilizan en la construcción del conjunto de Cantor clásico que realizamos en el capítulo 6.

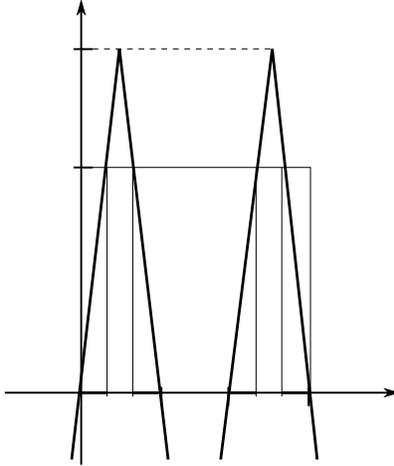


FIGURA 10.2: Gráfica de la función $P^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Denotamos con la letra C a la intersección de todos los conjuntos C_n . Como para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $J(P) \subset C_n$, entonces $J(P) \subset C$. Es decir, $J(P)$ es subconjunto del conjunto de Cantor.

Por otro lado, si x es un elemento de C , entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $x \in C_n$ y por ello $P^n(x) \in [0, 1]$. Esto implica que la órbita entera de x está en $[0, 1]$, así $x \in J(P)$. Por lo tanto C es subconjunto de $J(P)$ y, con ello, $J(P) = C$.

Como $J(P)$ está contenido en la imagen de \mathbb{R} bajo P , entonces $J(P)$ es un conjunto estrictamente invariante bajo la función P .

Estas observaciones contienen la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 10.3. *El conjunto de los puntos atrapados de la función $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto de Cantor C . Además este conjunto es estrictamente invariante bajo P .*

Nuestra meta es convencer al lector de que la función $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, restringida a $J(P)$, es una función caótica en $J(P)$. Así el conjunto de Cantor es el escenario donde se lleva a cabo un sistema dinámico discreto caótico.

10.2. Dinámica simbólica

A cada punto de $J(P)$ le vamos a asignar una sucesión infinita formada solamente por ceros y unos.

Sea

$$\Sigma_2 = \{\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) : \text{para cada } n \geq 0, t_n \in \{0, 1\}\}.$$

En los siguientes párrafos definimos una función $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$.

Sea x_0 un punto en $J(P)$. Observemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P^n(x_0)$ está en el intervalo $[0, \frac{1}{3}]$ o en el intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$. La idea es asignar un 0 o un 1 según el punto $P^n(x_0)$ se encuentre en el primer o en el segundo intervalo. Reuniendo toda esta información podremos asignarle a x_0 un elemento de Σ_2 .

Sean $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Definimos

$$\varphi(x_0) = \mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots),$$

donde las coordenadas de \mathbf{t} se definen de la siguiente manera: Para cada $n \geq 0$,

$$t_n = \begin{cases} 0, & \text{si } P^n(x_0) \in I_0, \\ 1, & \text{si } P^n(x_0) \in I_1. \end{cases}$$

Por ejemplo

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

ya que $P\left(\frac{1}{3}\right) = 1$, $P(1) = 0$ y $P(0) = 0$.

$$\varphi\left(\frac{3}{10}\right) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

ya que $P\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{9}{10}$ y $P\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{3}{10}$.

Como

$$o\left(\frac{3}{28}, P\right) = \left\{ \frac{3}{28}, \frac{9}{28}, \frac{27}{28}, \frac{3}{28}, \dots \right\},$$

entonces

$$\varphi\left(\frac{3}{28}\right) = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots).$$

Los puntos fijos de P tienen bajo φ estas imágenes:

$$\varphi(0) = \mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots), \quad \varphi\left(\frac{3}{4}\right) = \mathbf{1} = (1, 1, 1, \dots).$$

A la sucesión

$$\varphi(x_0) = \mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$$

se le llama el *itinerario de x_0* . Si lo pensamos un poco este nombre tiene mucho sentido. El punto x_0 sólo puede *viajar*, al aplicarle P varias veces, a dos *lugares*: I_0 e I_1 . El valor que asuma t_n nos dirá, de manera inmediata, en cual de estos dos destinos se encuentra el punto $P^n(x_0)$.

La siguiente fórmula nos proporciona una métrica en el conjunto Σ_2 (ver ejercicio 10.7),

$$d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n},$$

donde $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ y $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$.

La pareja (Σ_2, d) es conocida como el *espacio de dos símbolos* o como el *espacio de las sucesiones de ceros y unos*.

Las siguientes cuatro proposiciones contienen las propiedades más importantes de la función $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$. La meta es mostrar que φ es en realidad un homeomorfismo.

Proposición 10.4. $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$ es una función inyectiva.

Demostración. Sean x_0 y y_0 dos puntos en $J(P)$ tales que

$$\varphi(x_0) = \mathbf{t} = \varphi(y_0).$$

De aquí se sigue que para cada $n \geq 0$, los puntos $P^n(x_0)$ y $P^n(y_0)$ están ambos en I_0 o ambos en I_1 . Así,

$$|P(x_0) - P(y_0)| = 3|x_0 - y_0|,$$

$$|P^2(x_0) - P^2(y_0)| = 3|P(x_0) - P(y_0)| = 3^2|x_0 - y_0|.$$

Así sucesivamente hasta que en el paso n se tiene que

$$|P^n(x_0) - P^n(y_0)| = 3^n|x_0 - y_0|.$$

Como $|P^n(x_0) - P^n(y_0)| \leq 1$, concluimos que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_0 - y_0| \leq \frac{1}{3^n}.$$

Por lo tanto, $x_0 = y_0$. □

Proposición 10.5. $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$ es una función suprayectiva.

Demostración. Observemos primero que si $E = [a, b]$ es un intervalo contenido en $[0, 1]$, entonces existen dos intervalos cerrados $E_0 \subset I_0$ y $E_1 \subset I_1$ tales que $P(E_i) = E$, $i = 0, 1$, $E_0 \cap E_1 = \emptyset$. Además la longitud de cada E_i es un tercio de la longitud de E .

Para los intervalos I_0 e I_1 existen dos intervalos en I_0 , que llamaremos I_{00} e I_{01} , tales que $P(I_{00}) = I_0$ y $P(I_{01}) = I_1$, y existen dos intervalos en I_1 , que ahora llamaremos I_{10} e I_{11} , tales que $P(I_{10}) = I_0$ y $P(I_{11}) = I_1$.

La longitud de cada uno de estos cuatro intervalos cerrados es $(\frac{1}{3})^2$. Son ajenos entre sí por parejas. La unión de los cuatro intervalos nos da el conjunto C_2 .

En el siguiente paso existen cuatro intervalos en I_0 , llamados I_{000} , I_{001} , I_{010} e I_{011} , tales que la función P transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_{000} &\rightarrow I_{00} \rightarrow I_0 \rightarrow [0, 1], \\ I_{001} &\rightarrow I_{01} \rightarrow I_1 \rightarrow [0, 1], \\ I_{010} &\rightarrow I_{10} \rightarrow I_0 \rightarrow [0, 1], \\ I_{011} &\rightarrow I_{11} \rightarrow I_1 \rightarrow [0, 1]. \end{aligned}$$

De manera análoga existen cuatro intervalos en I_1 que se comportan de modo similar a los cuatro anteriores. Ver figura 10.3 para darse una idea de este movimiento.

En este paso ya tenemos 2^3 intervalos de la forma

$$I_{s_0 s_1 s_2}, \quad s_i \in \{0, 1\},$$

que son ajenos entre sí por parejas, y tales que la función P transforma de esta manera:

$$I_{s_0 s_1 s_2} \rightarrow I_{s_1 s_2} \rightarrow I_{s_2} \rightarrow [0, 1],$$

La longitud de cada uno de ellos es $(\frac{1}{3})^3$. Además para cada terna $s_0 s_1 s_2$ se dan las siguientes contenciones:

$$I_{s_0 s_1 s_2} \subset I_{s_0 s_1} \subset I_{s_0} \subset [0, 1].$$

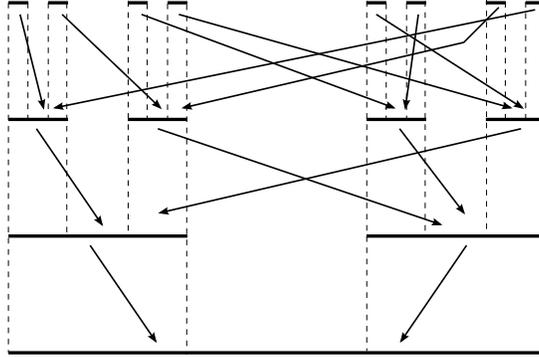


FIGURA 10.3: Movimiento de los intervalos.

La unión de todos los intervalos $I_{s_0 s_1 s_2}$ es C_3 .

Obsérvese que si $x \in I_{s_0 s_1 s_2}$, entonces

$$x \in I_{s_0}, \quad P(x) \in I_{s_1} \quad \text{y} \quad P^2(x) \in I_{s_2}.$$

En el paso n de esta construcción obtenemos 2^n intervalos de la forma

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}, \quad s_i \in \{0, 1\},$$

tales que se cumplen las siguientes condiciones:

- La longitud de cada uno de ellos es $(\frac{1}{3})^n$. La unión de todos es el conjunto C_n .
- Son ajenos por parejas. Más aún, si $x \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$ y $y \in I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1}}$ con $s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} \neq t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1}$, entonces

$$|x - y| \geq \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

- La función P los *mueve* de esta manera:

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}} \rightarrow I_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}} \rightarrow \dots \rightarrow I_{s_{n-1}} \rightarrow [0, 1].$$

- Se dan las siguientes contenciones:

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}} \subset I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-2}} \subset I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-3}} \subset \dots \subset I_{s_0}.$$

- Si $x \in I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$, entonces

$$x \in I_{s_0}, \quad P(x) \in I_{s_1}, \quad P^2(x) \in I_{s_2},$$

y así hasta que $P^{n-1}(x)$ está en $I_{s_{n-1}}$.

Ahora sí demostraremos que φ es suprayectiva.

Sea $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ un punto en Σ_2 .

Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$.

Observemos que si x es un punto en $J(P)$ tal que $x \in I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$, entonces $\varphi(x)$ y \mathbf{t} tienen iguales las primeras $n + 1$ coordenadas.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$ está contenido en el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1}}$, la colección

$$\{I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}\}_{n=0}^{\infty}$$

forma una sucesión de intervalos cerrados encajados, cada uno de ellos distinto del vacío.

Sabemos también que la longitud del intervalo $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Entonces la intersección

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$$

es exactamente un punto, que llamaremos x_0 .

Por la forma en que encontramos a x_0 se sigue que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el punto $P^n(x_0)$ está en el intervalo I_{t_n} .

Entonces $x_0 \in J(P)$ y $\varphi(x_0) = \mathbf{t}$. □

Proposición 10.6. $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$ es una función continua.

Demostración. Sean $x_0 \in J(P)$, $\varphi(x_0) = \mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$, y $\varepsilon > 0$.

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

Consideremos el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$. Este es uno de los 2^{N+1} intervalos que componen C_{N+1} . Su longitud es $(\frac{1}{3})^{N+1}$. Además $x_0 \in I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$.

Observemos que si x y y son dos puntos de $J(P)$ tales que también están en $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$, entonces $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$ coinciden desde la primera hasta la coordenada N . Así,

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Sea $\delta > 0$ tal que

$$((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap C_{N+1}) \subset I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}.$$

Si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in J(P)$, entonces x pertenece al intervalo $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$. Por ello, $d(\varphi(x), \varphi(x_0)) < \varepsilon$. \square

Proposición 10.7. *La función $\varphi^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow J(P)$ es continua.*

Demostración. Sean $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2$ y $\varepsilon > 0$.

Como la longitud del intervalo $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la longitud de $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$ es menor que ε .

Sea $\delta = \frac{1}{2^N}$. Observemos que si $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ es tal que $d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) < \delta$, entonces para cada i , $0 \leq i \leq N$, se tiene $t_i = s_i$, ver ejercicio 10.9.

Esto implica que $\varphi^{-1}(\mathbf{s})$ también está en el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2 \dots t_N}$.

Por lo tanto la distancia entre $\varphi^{-1}(\mathbf{t})$ y $\varphi^{-1}(\mathbf{s})$ es menor que ε . \square

La demostración del siguiente resultado es inmediata a partir de las proposiciones 10.4, 10.5, 10.6 y 10.7.

Proposición 10.8. *La función $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo.*

La proposición 10.8 nos dice también que el conjunto de Cantor C es, desde el punto de vista de la topología, indistinguible del conjunto Σ_2 , ya que ambos son homeomorfos. Esto es algo sorprendente. El conjunto Σ_2 está formado por sucesiones infinitas de ceros y unos y es, en principio, un objeto abstracto. Esta colección de extrañas sucesiones no tiene ninguna relación con nada, o casi nada, de lo que conocíamos hasta ahora. Descubrir que en realidad es una nueva presentación del conjunto C es realmente inesperado. Antes de abandonar este tema, invitamos al lector a comparar estas observaciones con los comentarios que hacemos al final del capítulo 6.

10.3. Función corrimiento

La siguiente observación nos permitirá definir una función del espacio Σ_2 en sí mismo.

Sea x en $J(P)$. La idea es encontrar una relación entre los itinerarios de x y de $P(x)$. Supongamos que

$$\varphi(x) = \mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3, \dots).$$

Entonces, como la órbita de $P(x)$ siempre va un paso adelante de la órbita de x , es inmediato que el itinerario de $P(x)$ es:

$$\varphi(P(x)) = (t_1, t_2, t_3, \dots).$$

Es natural, entonces, definir la siguiente función $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$,

$$\sigma(\mathbf{t}) = \sigma((t_0, t_1, t_2, t_3, \dots)) = (t_1, t_2, t_3, \dots) = \mathbf{s}.$$

El punto $\mathbf{s} = \sigma(\mathbf{t})$ tiene una infinidad de coordenadas. Para encontrarlas sólo quitamos la primera coordenada de \mathbf{t} , es decir, nos deshacemos de t_0 , y desplazamos todas las demás un lugar hacia la izquierda. Así $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es conocida como la *función desplazamiento* o como la *función corrimiento*. En inglés se le llama *shift map*.

La demostración de que esta función es continua no es tan difícil y el lector es invitado a realizarla en el ejercicio 10.13.

Antes de continuar nos permitimos llamar la atención del lector hacia los dos resultados que tenemos entre manos:

Por un lado, la función $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo.

Por el otro, resulta que para cada punto $x \in J(P)$ se tiene que

$$\varphi(P(x)) = \sigma(\varphi(x)).$$

Esta igualdad es la clave para decifrar la dinámica de P restringida al conjunto de los puntos atrapados $J(P)$. Este hecho es tan importante que merece una definición que tome en cuenta a muchos posibles casos semejantes.

Definición 10.9. Sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ dos funciones continuas definidas en los espacios métricos X y Y . Decimos que f y g son

topológicamente equivalentes o *topológicamente conjugadas*, o, simplemente, *equivalentes* o *conjugadas*, si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que para todo punto $x \in X$ se tiene que

$$h(f(x)) = g(h(x)).$$

La condición de conjugación a veces se expresa diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

Si $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ son dos funciones conjugadas, entonces las propiedades dinámicas de f son esencialmente iguales a las propiedades dinámicas de g . Dedicaremos el siguiente capítulo a la tarea de darle cuerpo a esta afirmación. En particular demostraremos que, bajo esta hipótesis, la función f es caótica en X si y solamente si la función g es caótica en Y .

Regresando al estudio de las propiedades dinámicas de la función P , observemos que ya tenemos el siguiente resultado.

Las funciones $P : J(P) \rightarrow J(P)$ y $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ son conjugadas bajo el homeomorfismo $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$.

Para demostrar que P es caótica en $J(P)$, nuestro primer paso será demostrar que σ es caótica en Σ_2 .

Proposición 10.10. *El conjunto de puntos periódicos de σ es denso en Σ_2 .*

Demostración. Sean $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2$ y $\varepsilon > 0$.

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \varepsilon$.

Consideremos el siguiente punto en Σ_2 ,

$$\mathbf{s} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, t_0, t_1, t_2, \dots)$$

donde el bloque de coordenadas $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ se repite indefinidamente.

Es inmediato que

$$\sigma^{N+1}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} \in \text{Per}(\sigma),$$

y que la distancia de \mathbf{s} a \mathbf{t} es menor que ε . □

Proposición 10.11. *La función $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es transitiva en Σ_2 .*

Demostración. Sean $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ y $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ dos puntos en el espacio Σ_2 y sea $\varepsilon > 0$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \varepsilon$.

Consideremos el siguiente punto en Σ_2 :

$$\mathbf{u} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, s_0, s_1, s_2, \dots, s_N, 0, 0, \dots).$$

Por la forma que le hemos asignado al punto \mathbf{u} sus primeras coordenadas, las siguientes dos desigualdades son inmediatas:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{t}) < \varepsilon \quad \text{y} \quad d(\sigma^{N+1}(\mathbf{u}), \mathbf{s}) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es transitiva en Σ_2 . □

Sabemos que Σ_2 no tiene puntos aislados, ver ejercicio 10.10. Como σ es transitiva, entonces existe \mathbf{t} tal que su órbita, $o(\mathbf{t}, \sigma)$, es densa en Σ_2 . Lo interesante de la función corrimiento es que podemos *mostrar* uno de esos puntos que tienen órbita densa. Para lograrlo observemos que dos puntos están cercanos si sus primeras coordenadas coinciden (y están más cercanos si el número de coincidencias aumenta). Así la idea es proponer un punto \mathbf{t} que al ir *viajando* sobre su órbita, vaya *pasando cerca de todos los puntos* del espacio Σ_2 . Es decir, que al aplicar varias veces σ (borrar la primera coordenada y recorrer las demás) la imagen correspondiente tenga la propiedad de coincidir en las primeras coordenadas con todos los puntos. Esto sí es posible ya que por cada $n \in \mathbb{N}$ hay 2^n cadenas distintas de ceros y unos cuya longitud es n .

Construimos las coordenadas de \mathbf{t} poniendo primero todas las posibles cadenas de longitud 1, luego todas las posibles cadenas de longitud 2, luego las de longitud 3, y así sucesivamente,

$$\mathbf{t} = (\underbrace{0, 1}, \underbrace{0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1}, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 1, 1, 1}, \dots).$$

Es inmediato que la órbita $o(\mathbf{t}, \sigma)$ es densa en Σ_2 .

Proposición 10.12. *La función $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es sensible a las condiciones iniciales en Σ_2 .*

Demostración. Sea $\varepsilon_0 = 1$. Este valor va a ser nuestra constante de sensibilidad.

Sean $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ en Σ_2 y $\delta > 0$. Demostraremos que existen un punto $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, que está a distancia menor que δ de \mathbf{t} , y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(\sigma^{N+1}(\mathbf{t}), \sigma^{N+1}(\mathbf{s})) \geq \varepsilon_0.$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \delta$. Consideramos ahora un punto $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ tal que sus primeras $N + 1$ coordenadas coincidan con las primeras $N + 1$ coordenadas de \mathbf{t} ,

$$\mathbf{s} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, s_{N+1}, s_{N+2}, \dots),$$

y tal que el valor de s_{N+1} sea distinto de valor de t_{N+1} . Si $t_{N+1} = 1$, ponemos $s_{N+1} = 0$; si $t_{N+1} = 0$, ponemos $s_{N+1} = 1$.

Obsérvese que la distancia de \mathbf{s} a \mathbf{t} es menor que δ .

Además, como $\sigma^{N+1}(\mathbf{t})$ y $\sigma^{N+1}(\mathbf{s})$ difieren en la primera coordenada, entonces $d(\sigma^{N+1}(\mathbf{t}), \sigma^{N+1}(\mathbf{s})) \geq 1$. \square

De las tres proposiciones anteriores se sigue el siguiente corolario.

Corolario 10.13. *La función $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es caótica en Σ_2 .*

Nuestra meta, demostrar que $P : J(P) \rightarrow J(P)$ es caótica en el conjunto $J(P)$, la alcanzaremos finalmente en el siguiente capítulo. La historia continuará.

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas.

EJERCICIO 10.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que si $J(f) \neq \emptyset$, entonces f tiene al menos un punto fijo.

EJERCICIO 10.2. Exhibir una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $J(f) \neq \emptyset$ y f no tenga puntos fijos. *Sugerencia:* Analizar los puntos periódicos de las siguientes funciones: $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por

$$g(x, y) = (-x, y) \quad \text{y} \quad h(x, y) = (x, y + \cos(x)).$$

EJERCICIO 10.3. Para cada valor $0 \leq \lambda \leq 4$ consideremos la función $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$. La colección de todas estas funciones forma la *Familia Logística*.

- Describir el conjunto $J(f_\lambda)$ cuando $0 \leq \lambda < 1$.
- Ahora describir el conjunto $J(f_\lambda)$ para $1 \leq \lambda \leq 4$.

EJERCICIO 10.4. ¿Para cuáles de las siguientes funciones, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que el conjunto $J(f)$ está acotado? ¿Para cuáles $J(f)$ es un intervalo?

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = x^2 - 2$.
3. $f(x) = x + \text{sen}(x)$.
4. $f(x) = x^2 + 1$.
5. $f(x) = x^2 - 3$.
6. $f(x) = e^x - 1$.
7. $f(x) = x^3$.
8. $f(x) = \arctan(x)$.

EJERCICIO 10.5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que si $J(f)$ es distinto del vacío y acotado, entonces $J(f)$ es un conjunto cerrado. *Sugerencia:* Existe $M > 0$ tal que para todo punto $a \in J(f)$, $-M \leq a \leq M$. Por lo tanto los intervalos abiertos $(-\infty, -M)$ y (M, ∞) están contenidos en el complemento de $J(f)$.

EJERCICIO 10.6. Demostrar las siguientes propiedades de la función $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Sea $x < 0$. Entonces $P(x) < x$. Además, para toda $n \in \mathbb{N}$, $P^n(x) = 3^n x$. Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty$.
- Si $x > 1$, entonces $P(x) < 0$. Por lo tanto para estos puntos también se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty$.
- Los únicos puntos fijos de P son 0 y $\frac{3}{4}$, y ambos son repulsores. De hecho todas las órbitas periódicas de P son repulsoras.
- Si $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, entonces $P(x) > 1$: Esto nos permite, nuevamente, concluir que para este tipo de puntos $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x) = -\infty$.
- $x_0 = \frac{3}{28}$ es un punto periódico bajo P y es de periodo 3. Por tanto, P tiene puntos periódicos de todos los periodos.

EJERCICIO 10.7. Demostrar que

$$d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n},$$

donde $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ y $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$, es una métrica en el espacio Σ_2 . Es decir, demostrar que para cualquier terna de puntos \mathbf{t} , \mathbf{s} y \mathbf{u} de Σ_2 se tiene que:

- $d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \geq 0$,
- $d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{t} = \mathbf{s}$,
- $d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = d(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, y
- $d(\mathbf{t}, \mathbf{u}) \leq d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) + d(\mathbf{s}, \mathbf{u})$.

EJERCICIO 10.8. Demostrar que la función $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$ que se estudia en la proposición 10.6 es en realidad uniformemente continua.

EJERCICIO 10.9. Sean $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots)$ y $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots)$ dos puntos en Σ_2 . Sea $N \in \mathbb{N}$. Demostrar que si $d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) < \frac{1}{2^N}$, entonces para toda $0 \leq i \leq N$ se tiene que $t_i = s_i$.

EJERCICIO 10.10. Sin utilizar la función $\varphi : J(P) \rightarrow \Sigma_2$ de la proposición 10.6 demostrar que el espacio Σ_2 no tiene puntos aislados.

EJERCICIO 10.11. Sea

$$A = \{\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2 : t_0 = 1, t_1 = 0\}.$$

Demostrar que A es abierto y cerrado en Σ_2 .

EJERCICIO 10.12. Mostrar, si es que existe, un conjunto $B \subset \Sigma_2$ tal que B no es abierto ni cerrado en Σ_2 .

EJERCICIO 10.13. Demostrar que la función corrimiento $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es continua.

EJERCICIO 10.14. Demostrar que la función $\sigma^2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$, también es caótica en Σ_2 .

EJERCICIO 10.15. Sean $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$, $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ dos puntos en Σ_2 . Demostrar que si el $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\sigma^n(\mathbf{t}), \sigma^n(\mathbf{s})) = 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene que $s_n = t_n$. Demostrar también el recíproco.

EJERCICIO 10.16. Sea $\mathbf{t} \in \Sigma_2$. Definimos el *conjunto estable* de \mathbf{t} bajo σ de la siguiente manera:

$$W^s(\mathbf{t}, \sigma) = \{\mathbf{s} \in \Sigma_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} d(\sigma^n(\mathbf{t}), \sigma^n(\mathbf{s})) = 0\}$$

Sean $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots)$ y

$$A = \{\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2 : \text{existe } n_0 \text{ tal que para todo } n \geq n_0, t_n = 0\}.$$

Demostrar que $A = W^s(\mathbf{0}, \sigma)$ y que $\sigma(W^s(\mathbf{0}, \sigma)) = W^s(\mathbf{0}, \sigma)$.

EJERCICIO 10.17. En cada caso decidir si la afirmación correspondiente es verdadera o falsa.

- Para cada $\mathbf{t} \in \Sigma_2$, $W^s(\mathbf{t}, \sigma)$ es un conjunto numerable.
- Para cada $\mathbf{t} \in \Sigma_2$, $W^s(\mathbf{t}, \sigma)$ es denso en Σ_2 .
- Si \mathbf{t} y \mathbf{s} son puntos periódicos, y $W^s(\mathbf{t}, \sigma) \cap W^s(\mathbf{s}, \sigma) \neq \emptyset$, entonces $\mathbf{t} = \mathbf{s}$.
- Si $\mathbf{w} \in W^s(\mathbf{u}, \sigma)$ y $\mathbf{u} \in W^s(\mathbf{t}, \sigma)$, entonces $\mathbf{w} \in W^s(\mathbf{t}, \sigma)$.

EJERCICIO 10.18. Sea

$$Q = \prod_{n=0}^{\infty} [0, 1] = \{\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots) : t_i \in [0, 1], \text{ para toda } i \geq 0\}.$$

- Sean $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in Q$. Demostrar que $d(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n}$ es una métrica en Q .
- Sea $\sigma : Q \rightarrow Q$ dada por $\sigma(t_0, t_1, t_2, \dots) = (t_1, t_2, \dots)$. Demostrar que σ es una función continua y que σ es caótica en Q .

El espacio $Q = \prod_{n=0}^{\infty} [0, 1]$ es conocido como el *Cubo de Hilbert*. Este conjunto es de gran interés en distintas ramas de las matemáticas. En particular Q juega un papel esencial en la topología y en los sistemas dinámicos. Varias de sus propiedades se estudian en los libros [25] y [33].

Observemos que el espacio Σ_2 es en realidad un subconjunto de Q . Así la función corrimiento, $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, es la restricción a Σ_2 de la misma función pero definida en Q .

EJERCICIO 10.19. Sea Q el cubo de Hilbert. En cada inciso dar el ejemplo que se pide. Si tal ejemplo no existe, argumentar.

1. Un subconjunto A de Q tal que A es homeomorfo al intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
2. Un subconjunto B de Q tal que B es homeomorfo al cuadrado $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.
3. Sea $k \in \mathbb{N}$. Un subconjunto D de Q tal que D es homeomorfo al *cubo* $[0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$.
4. Un subconjunto E de Q tal que E es homeomorfo al intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ y $\sigma(E) = E$.

5. Un subconjunto F de Q tal que F es homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.
6. Un subconjunto G de Q tal que $G \neq Q$ y G es homeomorfo a Q .
7. Una cantidad infinita no numerable de subconjuntos de Q , ajenos por parejas, tal que cada uno de ellos es homeomorfo a Q .

Comentarios

Las primeras propiedades dinámicas de los elementos de la familia de las *Tiendas* las presentamos en el capítulo 7, en el ejercicio 7.9.

Recordamos aquí su definición.

Dado $\lambda > 0$, sea $T_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ \lambda(1-x), & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La colección formada por todas estas funciones,

$$\{T_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \lambda > 0\},$$

es la *familia de las Tiendas*.

La función $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que estudiamos en este capítulo, se obtiene cuando λ toma el valor de 3, $T_3 = P$.

La gráfica de cada función $T_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está formada por dos semirectas que se tocan en el punto $(\frac{1}{2}, T_\lambda(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{2})$. Cada elemento de esta familia es una función continua en \mathbb{R} y derivable en todo punto salvo en $x_0 = \frac{1}{2}$.

La altura máxima de T_λ se alcanza en el punto $\frac{1}{2}$, $T_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{2}$. Ahí T_λ tiene un pico. Si $\lambda > 2$, entonces la altura de este pico excede el valor de 1, ver figura 10.4.

De aquí en adelante consideramos $\lambda > 2$.

En el estudio de la dinámica de $T_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se puede seguir, en esencia, el mismo camino que utilizamos para el estudio de la función $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

De entrada, existen dos intervalos ajenos, $K_0 = [0, \frac{1}{\lambda}]$ y $K_1 = [1 - \frac{1}{\lambda}, 1]$, que cumplen las siguientes propiedades:

- Si $x \notin K_0 \cup K_1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_\lambda)^n(x) = -\infty$.

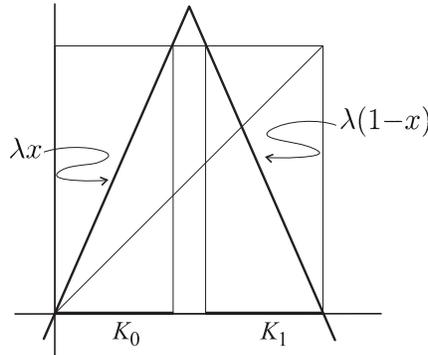


FIGURA 10.4: Elemento de la familia de las *Tiendas* con $\lambda > 2$.

- $T_\lambda : K_0 \rightarrow [0, 1]$ y $T_\lambda : K_1 \rightarrow [0, 1]$ son homeomorfismos. Cada uno de ellos hace crecer las distancias entre cualesquiera dos puntos de su dominio por un factor λ .

De aquí se sigue no sólo que el conjunto de puntos atrapados de T_λ , $J(T_\lambda)$, está contenido en la unión $K_0 \cup K_1$ sino también la siguiente caracterización del conjunto $J(T_\lambda)$.

$$J(T_\lambda) = \{x \in \mathbb{R} : \text{para toda } n \in \mathbb{N}, (T_\lambda)^n(x) \in K_0 \cup K_1\}.$$

Adecuaciones mínimas al razonamiento que desarrollamos para llegar a la proposición 10.3 nos permiten concluir que $J(T_\lambda) = C_\lambda$ es un conjunto estrictamente invariante bajo T_λ , compacto, totalmente desconexo y perfecto. Es decir, es un conjunto de Cantor.

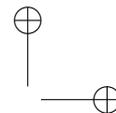
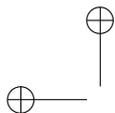
A cada punto x_0 de C_λ le asignamos una sucesión infinita de ceros y unos,

$$\varphi_\lambda(x_0) = \mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots),$$

donde, para cada $n \geq 0$,

$$t_n = \begin{cases} 0, & \text{si } (T_\lambda)^n(x_0) \in K_0, \\ 1, & \text{si } (T_\lambda)^n(x_0) \in K_1. \end{cases}$$

Esto nos da una función, φ_λ , de C_λ en el espacio de dos símbolos Σ_2 .



CAPÍTULO 10. DINÁMICA SIMBÓLICA

157

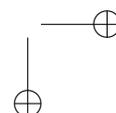
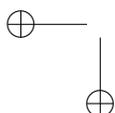
Los argumentos que presentamos en las proposiciones 10.4, 10.5, 10.6 y 10.7, con las modificaciones que el caso requiere, nos llevan a concluir que $\varphi_\lambda : C_\lambda \rightarrow \Sigma_2$ es, en realidad, un homeomorfismo.

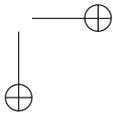
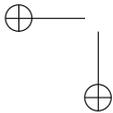
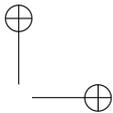
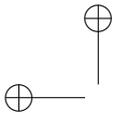
Por último, resulta que para cada punto $x \in C_\lambda$ se tiene que

$$\varphi_\lambda(T_\lambda(x)) = \sigma(\varphi_\lambda(x)),$$

donde $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es la función corrimiento.

La conclusión es que las funciones $T_\lambda : C_\lambda \rightarrow C_\lambda$ y $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ son topológicamente conjugadas. Esta información, junto con los resultados que desarrollamos en el capítulo 11, nos llevan a concluir que $T_\lambda : C_\lambda \rightarrow C_\lambda$ es caótica en C_λ .





CAPÍTULO 11

Conjugación topológica

La cantidad de sistemas dinámicos discretos posibles, aún sólo considerando funciones definidas en subconjuntos de \mathbb{R} , es enorme. Existen aquí muchas preguntas sin respuesta y muchísimas funciones todavía aguardan un estudio más profundo. Ante este panorama algunos matemáticos han optado por la siguiente táctica: buscar semejanzas entre funciones, formar grupos de ellas que tengan dinámicas parecidas y, luego, estudiar un representante de cada uno de estos grupos.

El camino para delimitar los grupos es a través de la equivalencia o conjugación topológica cuya definición presentamos en el capítulo 10. Varias son las propiedades dinámicas que se preservan a través de esta conjugación. Dedicaremos por entero este capítulo al estudio de algunas de ellas. En particular nos interesan las propiedades que nos permiten descubrir si estamos ante un sistema dinámico discreto caótico: densidad de puntos periódicos, transitividad y sensibilidad a las condiciones iniciales.

11.1. Dos ejemplos

Sean X y Y dos espacios métricos sin puntos aislados. Dadas dos funciones continuas $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ decimos que son conjugadas si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que para todo punto x en X se tiene que $h(f(x)) = g(h(x))$, ver definición 10.9, página 148. Si f y g son conjugadas, también es común decir que f y g son *equivalentes*.

Ejemplo 11.1. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = x + 1, \quad y \quad g(x) = x + 2.$$

La dinámicas generadas por f y g son muy parecidas: En ambos casos la órbita de cada punto $x_0 \in \mathbb{R}$ diverge a infinito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0 + n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0 + 2n = \infty.$$

La afirmación es que f y g son conjugadas.

Demostración. La tarea es encontrar un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in \mathbb{R}$, $h(f(x)) = g(h(x))$.

Los homeomorfismos más sencillos definidos en \mathbb{R} son los de la forma $h(x) = \alpha x + \beta$, donde α y β son constantes, $\alpha \neq 0$. Iniciamos nuestra búsqueda en esta familia.

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $h(x) = \alpha x + \beta$. La igualdad $h(f(x)) = g(h(x))$ nos permite encontrar los valores de α y β . Por un lado,

$$h(f(x)) = \alpha(x + 1) + \beta = \alpha x + \alpha + \beta,$$

por el otro,

$$g(h(x)) = g(\alpha x + \beta) = \alpha x + \beta + 2.$$

De aquí se sigue que $\alpha = 2$ y que β puede ser cualquier valor.

Por lo tanto, las funciones f y g son conjugadas a través del homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(x) = 2x$. \square

En el ejercicio 11.2 el lector encontrará una afirmación que, de alguna manera, generaliza lo demostrado en el ejemplo 11.1.

Ejemplo 11.2. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x + cx(1 - x)$, donde c es una constante positiva. Entonces existe un elemento de la familia logística,

$$f(x) = \lambda x(1 - x), \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda > 0 \text{ constante},$$

tal que f es topológicamente conjugada con g .

Demostración. Consideremos el homeomorfismo $h(x) = \alpha x + \beta$, donde α y β son constantes, $\alpha \neq 0$.

Dado $x \in \mathbb{R}$,

$$h(f(x)) = \alpha \lambda x(1 - x) + \beta = \alpha \lambda x - \alpha \lambda x^2 + \beta,$$

y

$$\begin{aligned}
 g(h(x)) &= g(\alpha x + \beta) = \alpha x + \beta + c(\alpha x + \beta)(1 - (\alpha x + \beta)) \\
 &= \alpha x + \beta + c(\alpha x + \beta - (\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2)) \\
 &= \alpha x + \beta + c(-\alpha^2 x^2 + \alpha x - 2\alpha\beta x + \beta - \beta^2) \\
 &= -c\alpha^2 x^2 + x(\alpha + c\alpha - 2\alpha\beta c) + \beta + c\beta - c\beta^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-c\alpha^2 = -c\alpha^2, \quad \alpha\lambda = \alpha + c\alpha - 2\alpha\beta c, \quad \beta = \beta + c\beta - c\beta^2.$$

Como $\alpha \neq 0$, entonces:

$$\lambda = c\alpha, \quad \lambda = 1 + c - 2c\beta, \quad 0 = c\beta - c\beta^2 = c\beta(1 - \beta).$$

El valor de β puede ser 0 ó 1. Escogemos $\beta = 0$.

Así $\lambda = 1 + c$, y $\alpha = \frac{1+c}{c}$.

Por lo tanto,

$$f(x) = (1 + c)x(1 - x), \quad y \quad g(x) = x + cx(1 - x)$$

son conjugadas a través del homeomorfismo $h(x) = \frac{1+c}{c}x$. □

11.2. Propiedades que se preservan bajo conjugación

Sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ dos funciones continuas en los espacios métricos X y Y . Nuestra meta en esta parte se resume en la siguiente afirmación: Si f y g son conjugadas, entonces f es caótica en X si y sólo si g es caótica en Y .

A partir de este momento la hipótesis para todos los resultados contenidos en lo que resta de este capítulo es la siguiente: Las funciones $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ son conjugadas bajo el homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$.

Proposición 11.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$ se tiene que*

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)).$$

162 11.2. PROPIEDADES QUE SE PRESERVAN BAJO CONJUGACIÓN

Demostración. Procederemos por inducción. Como f y g son conjugadas, la afirmación es cierta para el caso $n = 1$.

Sean $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$h(f^k(x)) = g^k(h(x)) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Entonces

$$\begin{aligned} h(f^{k+1}(x)) &= h(f^k(f(x))) = g^k(h(f(x))) \\ &= g^k(g(h(x))) = g^{k+1}(h(x)), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. □

Proposición 11.4. *Las funciones $g : Y \rightarrow Y$ y $f : X \rightarrow X$ son conjugadas bajo el homeomorfismo $h^{-1} : Y \rightarrow X$.*

Demostración. Sea y un punto en Y . Entonces

$$g(y) = g(h(h^{-1}(y))) = h(f(h^{-1}(y))).$$

Aplicando el homeomorfismo h^{-1} a los extremos de la expresión anterior obtenemos la igualdad siguiente: $h^{-1}(g(y)) = f(h^{-1}(y))$. □

Ahora veremos el comportamiento de los puntos periódicos bajo la conjugación. Sea x en X . Si x es un punto fijo bajo f , entonces $h(x) \in Y$ es un punto fijo bajo g ya que

$$g(h(x)) = h(f(x)) = h(x).$$

Si x es un punto periódico bajo f de periodo $N > 1$, entonces $h(x)$ es un punto periódico bajo g de periodo N también.

La razón es la siguiente: Sabemos que $f^N(x) = x$ y para todo $1 \leq j < N$, $f^j(x) \neq x$. Entonces

$$g^N(h(x)) = h(f^N(x)) = h(x).$$

Por otro lado, como h es un homeomorfismo, h es inyectiva. Así para cada $1 \leq j < N$,

$$g^j(h(x)) = h(f^j(x)) \neq h(x).$$

Por último, si $y \in Per(g)$, entonces $x = h^{-1}(y)$ es punto periódico bajo f por la proposición 11.4.

En resumen, el homeomorfismo h transforma el conjunto $Per(f)$ en el conjunto $Per(g)$,

$$h(Per(f)) = Per(g),$$

preservando los periodos correspondientes.

La siguiente proposición nos dice que h también respeta la densidad del conjunto $Per(f)$, si es que este es el caso. Así dos funciones conjugadas tienen, en esencia, el mismo comportamiento en cuanto a puntos periódicos se refiere.

Proposición 11.5. *El conjunto $Per(f)$ es denso en X si y sólo si el conjunto $Per(g)$ es denso en Y .*

Demostración. Gracias a la proposición 11.4 es suficiente demostrar que si $Per(f)$ es denso en X , entonces $Per(g)$ es denso en Y .

Sea $U \subset Y$ un conjunto abierto y distinto del vacío. Entonces $h^{-1}(U)$ es un subconjunto de X que es también abierto y distinto del vacío. Como $Per(f)$ es denso en X , existe x_0 , punto periódico de f , en $h^{-1}(U)$.

Sea $y_0 = h(x_0)$. Tenemos que y_0 es un punto periódico de g que está en U . □

Proposición 11.6. *La función f es transitiva en X si y sólo si g es una función transitiva en Y .*

Demostración. Es suficiente demostrar que si f es transitiva en X , entonces la función g es transitiva en Y .

Sean U y W dos conjuntos abiertos, no vacíos, en Y .

Los conjuntos $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(W)$ son conjuntos no vacíos y abiertos en el espacio X .

Como f es transitiva en X , existen x_0 en $h^{-1}(U)$ y N , un número natural, tales que $f^N(x_0)$ está en $h^{-1}(W)$. Entonces $h(x_0) \in U$ y

$$g^N(h(x_0)) = h(f^N(x_0)) \in W.$$

De aquí se sigue que $g^N(U) \cap W \neq \emptyset$. □

Proposición 11.7. *Supongamos que X y Y son conjuntos compactos. La función f es sensible a las condiciones iniciales en X si y sólo si g es sensible a las condiciones iniciales en Y .*

Demostración. Nuevamente es suficiente demostrar sólo una de las implicaciones.

Supongamos que f es sensible a las condiciones iniciales en X .

Sea $\varepsilon_0 > 0$ una constante de sensibilidad para f . Denotamos con d_X la métrica en X y con d_Y la métrica en Y .

Como Y es un espacio compacto y $h^{-1} : Y \rightarrow X$ es continua, entonces h^{-1} es uniformemente continua en Y . Para el valor ε_0 , existe $\delta_0 > 0$ tal que para toda pareja de puntos y_1 y y_2 en Y tales que $d_Y(y_1, y_2) < \delta_0$ se tiene que $d_X(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) < \varepsilon_0$.

Demostraremos que δ_0 es una constante de sensibilidad para $g : Y \rightarrow Y$.

Sean y_0 un punto en Y y $\gamma > 0$. Sea U la bola $B(y_0, \gamma)$. El conjunto U es abierto en Y . Sea $x_0 = h^{-1}(y_0)$.

El conjunto $h^{-1}(U)$ es abierto en X y contiene al punto x_0 . Por lo tanto existen $x_1 \in h^{-1}(U)$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$d_X(f^N(x_0), f^N(x_1)) \geq \varepsilon_0.$$

Los correspondientes puntos $h(x_0) = y_0$ y $h(x_1)$ están en U .

Además como

$$d_X(h^{-1}(g^N(y_0)), h^{-1}(g^N(h(x_1)))) = d_X(f^N(x_0), f^N(x_1)) \geq \varepsilon_0,$$

se tiene que la distancia en Y entre $g^N(y_0)$ y $g^N(h(x_1))$ debe cumplir la relación

$$d_Y(g^N(y_0), g^N(h(x_1))) \geq \delta_0.$$

□

Ahora la demostración de la siguiente proposición es inmediata.

Proposición 11.8. *Supongamos que X y Y son conjuntos compactos. La función f es caótica en X si y sólo si g es caótica en Y .*

Hemos llegado al momento en que podemos cumplir la tarea que nos propusimos en el capítulo 10. Ahí presentamos la función $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia está dada por la ecuación (10.1), página 137.

La restricción de P al conjunto de los puntos atrapados $J(P)$ es conjugada a la función corrimiento $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

Esta segunda función es caótica en Σ_2 . Y como, por último, estos espacios, $J(P)$ y Σ_2 , son compactos, entonces la función P es caótica en el conjunto de los puntos atrapados $J(P)$.

Dada la importancia de este resultado lo redactamos como una proposición.

Proposición 11.9. *La función $P : J(P) \rightarrow J(P)$ es caótica en $J(P)$.*

11.3. La *Tienda* es equivalente a la *Logística*

En esta sección utilizamos la herramienta de la conjugación topológica para demostrar que la función *Logística*,

$$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad L(x) = 4x(1 - x),$$

es caótica en el intervalo $[0, 1]$.

Sabemos que la función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, es caótica en $[0, 1]$. Este hecho reduce nuestra tarea a mostrar que T y L son conjugadas.

Consideremos la función $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$h(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \tag{11.1}$$

Demostrar las siguientes propiedades de h no es muy difícil. El lector queda invitado a dar los detalles correspondientes en el ejercicio 11.4.

- Para todo x en $[0, 1]$ se tiene que $h'(x) \geq 0$.
- h es estrictamente creciente en $[0, 1]$. Por tanto es una función inyectiva.
- h es suprayectiva. Por tanto $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es biyectiva.
- Para todo intervalo abierto $A = (a, b)$ contenido en $[0, 1]$ se tiene que $h(A)$ también es un intervalo abierto.
- La función inversa, $h^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua en $[0, 1]$. Por tanto h es un homeomorfismo.

Proposición 11.10. *Las funciones $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ son conjugadas utilizando el homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.*

Demostración. Sea x un punto en el intervalo $[0, 1]$.

Entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} L \circ h(x) &= L\left(\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \left(2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 \\ &= \sin^2(\pi x). \end{aligned}$$

Por otro lado, calculemos ahora $h \circ T(x)$.

Aquí nos enfrentamos a dos casos.

Caso 1.

Sea $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Entonces

$$\begin{aligned} h \circ T(x) &= h(2x) = \sin^2\left(\frac{\pi(2x)}{2}\right) \\ &= \sin^2(\pi x). \end{aligned}$$

Caso 2.

Sea $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Entonces

$$\begin{aligned} h \circ T(x) &= h(2 - 2x) = \sin^2\left(\frac{\pi(2-2x)}{2}\right) \\ &= \sin^2(\pi - \pi x) \\ &= \sin^2(\pi x). \end{aligned}$$

Por lo tanto para todo $x \in [0, 1]$ se tiene que $L \circ h(x) = h \circ T(x)$. \square

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas.

El espacio de sucesiones Σ_2 y la función corrimiento $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ fueron definidas en el capítulo 10.

EJERCICIO 11.1. Sea $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ la función lineal por partes definida en el ejemplo 3.8, página 36. Demostrar que f es una función caótica en $[0, 2]$. *Sugerencia:* Demostrar que la iteración f^2 restringida al intervalo $[0, 1]$ es conjugada a la función *Tienda*.

EJERCICIO 11.2. Sean c y k dos números reales distintos de cero. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x + c$ y $g(x) = x + k$. Demostrar que f y g son funciones conjugadas. *Sugerencia:* Suponer que el homeomorfismo buscado es de la forma $h(x) = \alpha x + \beta$, α y β constantes.

EJERCICIO 11.3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x$ y $g(x) = 3x$. Demostrar que existe $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, homeomorfismo, tal que para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f \circ h(x) = h \circ g(x)$. *Sugerencia:* Suponer que el homeomorfismo buscado tiene la forma: $h(x) = x^\lambda$, λ constante, cuando $x > 0$.

EJERCICIO 11.4. En relación a la función $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por la ecuación (11.1), demostrar lo siguiente:

- Para todo x en $[0, 1]$ se tiene que $h'(x) \geq 0$.
- h es estrictamente creciente en $[0, 1]$.
- h es suprayectiva.
- Para todo intervalo abierto $A = (a, b)$ contenido en $[0, 1]$ se tiene que $h(A)$ es un intervalo abierto.
- La función inversa, $h^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua en $[0, 1]$. Así h es un homeomorfismo.

EJERCICIO 11.5. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones conjugadas a través del homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demostrar lo siguiente:

- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto fijo atractor de f si y sólo si $h(x_0)$ es un punto fijo atractor de g .
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto fijo repulsor de f si y sólo si $h(x_0)$ es un punto fijo repulsor de g .
- La órbita $o(x_0, f)$ es densa en \mathbb{R} si y sólo si la órbita $o(h(x_0), g)$ es densa en \mathbb{R} .
- Sea $A \subset \mathbb{R}$. El conjunto A es denso en \mathbb{R} si y sólo si $h(A)$ es denso en \mathbb{R} .

EJERCICIO 11.6. Sea $\sigma^2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$. ¿Son σ y σ^2 conjugadas?

EJERCICIO 11.7. Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función *Tienda*. Demostrar lo siguiente:

- Para cada $k \in \mathbb{N}$, $T^k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es caótica en $[0, 1]$.
- Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si $n \neq m$, entonces T^n y T^m no son conjugadas.

EJERCICIO 11.8. Demostrar que las funciones

$$L : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad L(x) = 4x(1 - x)$$

y

$$g : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2], \quad g(x) = x^2 - 2$$

son conjugadas.

EJERCICIO 11.9. Sean $c \in \mathbb{R}$, y

$$g_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_c(x) = x^2 + c.$$

Demostrar que para cada $c < \frac{1}{4}$, existe un único $\lambda > 1$ tal que g_c es conjugada a

$$f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$$

a través de un homeomorfismo de la forma $h(x) = \alpha x + \beta$.

EJERCICIO 11.10. Mostrar una familia infinita numerable \mathbb{F} de homeomorfismos $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, crecientes en $[0, 1]$, tales que para cualesquiera dos elementos de \mathbb{F} , $f \neq g$, se tenga que f y g no son equivalentes. *Sugerencia:* La cantidad de puntos fijos se preserva bajo conjugación.

EJERCICIO 11.11. Continuamos aquí el estudio de las propiedades dinámicas de los elementos de la familia de las *Tiendas*.

Sean $T_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $T_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\lambda > 2$ y $\mu > 2$, dos elementos de esa familia. Sean C_λ y C_μ sus respectivos conjuntos de puntos atrapados. Demostrar que T_λ restringida a C_λ es topológicamente conjugada a T_μ restringida a C_μ . *Sugerencia:* Ver los comentarios al final del capítulo 10, página 155.

EJERCICIO 11.12. Considere la siguiente colección de funciones:

$$\mathbb{F} = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : f \text{ es continua en } [0, 1]\}.$$

Dados dos elementos de \mathbb{F} , f y g , decimos que f está relacionada con g , $f \sim g$, si existe un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que para todo $x \in [0, 1]$, $h(f(x)) = g(h(x))$. Demuestre que \sim es una relación de equivalencia en \mathbb{F} .

CAPÍTULO 12

El omega conjunto límite

Consideremos una función continua $f : X \rightarrow X$, X espacio métrico. Dado $x \in X$, el omega conjunto límite de x es el lugar a donde se dirige la órbita de x . Por ejemplo, si la órbita $o(x, f)$ es una sucesión convergente al punto x_0 , entonces el omega conjunto límite de x es $\{x_0\}$. Si la órbita $o(x, f)$ se dirige, en algún sentido, a una órbita periódica, entonces el omega conjunto límite de x está formado por los puntos que visita esa órbita periódica.

Denotamos el omega conjunto límite de x así: $\omega(x, f)$. En este capítulo estudiamos las propiedades básicas de este conjunto.

Como la órbita $o(x, f)$ *tiende* a $\omega(x, f)$, entonces algunas de las características de este conjunto nos darán información sobre el comportamiento de los puntos $f^n(x)$ cuando n es un número muy grande.

12.1. Propiedades básicas de el conjunto $\omega(x, f)$

Sean X un espacio métrico, $f : X \rightarrow X$ una función continua.

Definición 12.1. Sea $x_0 \in X$. Decimos que $y \in X$ es *punto límite* de la órbita $o(x_0, f)$ si existe una sucesión de números naturales

$$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y.$$

La colección de todos los puntos límite de $o(x_0, f)$ es el *omega conjunto límite* de x_0 bajo f . A este conjunto lo denotamos $\omega(x_0, f)$,

$$\omega(x_0, f) = \{y \in X : y \text{ es punto límite de } o(x_0, f)\}.$$

170 12.1. PROPIEDADES BÁSICAS DE EL CONJUNTO $\omega(x, f)$

De la definición es inmediato lo siguiente: Si x_0 es un punto fijo bajo f , entonces $\omega(x_0, f) = \{x_0\}$.

La demostración de la siguiente afirmación no es tan inmediata: Si x_0 es un punto periódico de f , entonces $\omega(x_0, f)$ es precisamente la órbita $o(x_0, f)$. Sin embargo invitamos al lector, en el ejercicio 12.1, a ofrecer los argumentos necesarios.

De aquí en adelante cuando nos refiramos a una sucesión formada por números naturales, $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, se entenderá que esta sucesión es estrictamente creciente. Es decir, $n_i < n_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 12.2. Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función *Tienda*.

- Si $x_0 = \frac{2}{5}$, entonces $\omega(x_0, T) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$.
- Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Si $x_0 = (\frac{1}{2})^k$, entonces $\omega(x_0, T) = \{0\}$.

Ejemplo 12.3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x + 1$. Entonces para todo punto $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\omega(x, f) = \emptyset$.

Ejemplo 12.4. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ la función dada por

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right).$$

Para todo punto $x \neq 0$ se tiene que $\omega(x, f) = \{-1, 1\}$. Ver ejercicio 12.3.

Proposición 12.5. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Entonces para todo $x \in X$, se tiene que $\omega(x, f) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $x \in X$. Como X es compacto, la sucesión

$$o(x, f) = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$$

tiene una subsucesión convergente, digamos a $y_0 \in X$.

Entonces $y_0 \in \omega(x, f)$. □

Proposición 12.6. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua. Para todo $x \in X$, $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Si $\omega(x, f) = \emptyset$, entonces la afirmación es cierta.

Consideremos el caso $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Utilizaremos la caracterización de conjunto cerrado dada en la proposición 5.9, página 5.9.

Sean $x_0 \in X$ y $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión contenida en $\omega(x_0, f)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. Demostraremos que $y_0 \in \omega(x_0, f)$ y con ello concluimos que $\omega(x_0, f)$ es cerrado.

Como $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ converge al punto y_0 , para $\varepsilon_1 = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_{n_1}, y_0) < \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Dado que $y_{n_1} \in \omega(x_0, f)$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{k_1}(x_0) \in B\left(y_{n_1}, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_1).$$

Para $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que $d(y_{n_2}, y_0) < \frac{\varepsilon_2}{2}$.

Como $y_{n_2} \in \omega(x_0, f)$, entonces existe $k_2 > k_1$ tal que

$$f^{k_2}(x_0) \in B\left(y_{n_2}, \frac{\varepsilon_2}{2}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_2).$$

De esta manera encontramos una sucesión creciente de números naturales $\{k_j\}$ tal que para cada j ,

$$f^{k_j}(x_0) \in B(y_0, \varepsilon_j), \quad \varepsilon_j = \frac{1}{j}.$$

Por lo tanto, y_0 pertenece al conjunto $\omega(x_0, f)$. □

En el ejercicio 12.16 se presenta otra demostración de la proposición 12.6.

Proposición 12.7. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Para todo $x \in X$, se tiene que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Es decir, $\omega(x, f)$ es un conjunto estrictamente invariante bajo f .

Demostración. Tomemos $x_0 \in X$ y consideremos el conjunto $\omega(x_0, f)$.

Veamos primero que $f(\omega(x_0, f))$ está contenido en $\omega(x_0, f)$.

Sea $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. Existe $z_0 \in \omega(x_0, f)$ tal que $f(z_0) = y_0$.

Existe, además, una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ contenida en \mathbb{N} tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = z_0.$$

172 12.1. PROPIEDADES BÁSICAS DE EL CONJUNTO $\omega(x, f)$

Entonces, gracias a la continuidad de la función f ,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i+1}(x_0) = f(z_0) = y_0.$$

Así y_0 está en el $\omega(x_0, f)$.

Por lo tanto, $f(\omega(x_0, f))$ es subconjunto de $\omega(x_0, f)$.

Ahora demostraremos que $\omega(x_0, f) \subset f(\omega(x_0, f))$.

Sea $y_0 \in \omega(x_0, f)$. Existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números naturales tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x_0) = y_0.$$

Podemos suponer que cada n_i es mayor o igual a 2.

Como X es compacto y la sucesión $\{f^{n_i-1}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ está contenida en X , entonces existe una subsucesión de $\{n_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0) = z_0.$$

Así $z_0 \in \omega(x_0, f)$ y

$$f(z_0) = f\left(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0)\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}}(x_0) = y_0.$$

Por lo tanto, $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. □

El lector es invitado en el ejercicio 12.8 a dar los argumentos necesarios en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 12.8. *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Sea $k \in \mathbb{N}$, fijo. Entonces para todo $x \in X$ se tiene lo siguiente:*

- $f(\omega(x, f^k)) = \omega(f(x), f^k)$.
- $\omega(x, f) = \omega(x, f^k) \cup \omega(f(x), f^k) \cup \omega(f^2(x), f^k) \cup \dots \cup \omega(f^{k-1}(x), f^k)$.

La siguiente proposición aclara lo que queremos decir cuando expresamos que la órbita de x tiende al conjunto $\omega(x, f)$.

Proposición 12.9. *Sean $f : X \rightarrow X$ una función continua, X un espacio compacto, $x_0 \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que*

$$\omega(x_0, f) \subset U.$$

Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $f^n(x_0) \in U$.

Demostración. Sea U un conjunto abierto tal que $\omega(x_0, f) \subset U$. El conjunto $X \setminus U$ es cerrado, por tanto es compacto. Si la cardinalidad de

$$A = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) \in X \setminus U\}$$

es infinita, entonces existe una sucesión creciente de números naturales, $n_1 < n_2 < \dots$ tal que las iteraciones correspondientes $f^{n_i}(x_0)$ permanecen en $X \setminus U$.

Podemos suponer, sin perder generalidad, que esta sucesión $\{f^{n_i}(x_0)\}$ es convergente a un punto de $X \setminus U$, digamos a y_0 .

De aquí se sigue que $y_0 \in \omega(x, f)$ y y_0 no pertenece al conjunto U . Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto A es finito y concluimos la demostración. \square

Con la ayuda de la proposición 12.9 obtenemos ahora información sobre la dinámica que induce la función f en el conjunto $\omega(x, f)$ cuando este conjunto es finito.

Proposición 12.10. *Sean $f : X \rightarrow X$ una función continua, X un espacio compacto y x un punto en X tal que el conjunto $\omega(x, f)$ es finito. Entonces existe y en $\omega(x, f)$ tal que y es un punto periódico bajo f . Además*

$$\omega(x, f) = o(y, f).$$

Demostración. Supongamos que la cardinalidad de $\omega(x, f)$ es k . Así

$$\omega(x, f) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}.$$

Como $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$, entonces f restringida al conjunto $\omega(x, f)$ es una permutación. Por tanto cada punto x_i , $1 \leq i \leq k$, es elemento de una órbita periódica.

174 12.1. PROPIEDADES BÁSICAS DE EL CONJUNTO $\omega(x, f)$

Consideremos la órbita $o(x_1, f)$ contenida en $\omega(x, f)$. Renombrando los elementos de $\omega(x, f)$, si es necesario, podemos suponer que

$$o(x_1, f) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

con $m \leq k$.

Afirmamos que $o(x_1, f) = \omega(x, f)$.

Si sucede que $o(x_1, f) \neq \omega(x, f)$, entonces $m < k$.

Observemos que la órbita $o(x_1, f)$ es un conjunto estrictamente invariante bajo la función f . Esto implica que el conjunto $\{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_k\}$ también es estrictamente invariante bajo f .

Sea $\delta > 0$ tal que para cada pareja $1 \leq i, j \leq k$, con $i \neq j$,

$$cl(B(x_i, \delta)) \cap cl(B(x_j, \delta)) = \emptyset. \tag{12.1}$$

Sean

$$U = \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \delta) \quad \text{y} \quad W = \bigcup_{i=m+1}^k B(x_i, \delta). \tag{12.2}$$

Observemos que $o(x_1, f) \subset U$ y que $U \cup W$ es un conjunto abierto que contiene a $\omega(x, f)$. Además de (12.1) y (12.2) se sigue que

$$cl(U) \cap cl(W) = \emptyset.$$

Por la proposición 12.9, existe un número natural N tal que si $n \geq N$, entonces $f^n(x)$ está en $U \cup W$.

Consideremos ahora los conjuntos

$$E = \{n \geq N : f^n(x) \in U\} \quad \text{y} \quad F = \{n \geq N : f^n(x) \in W\}.$$

Ambos son infinitos ya que tanto U como W contienen una parte de $\omega(x, f)$. Los puntos $f^n(x)$ deben ir y venir de U a W constantemente.

Esto implica que existe una sucesión de naturales, $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, tal que

$$f^{n_i}(x) \in U \quad \text{y} \quad f^{n_i+1}(x) \in W.$$

Sin perder generalidad podemos suponer que la sucesión $\{f^{n_i}(x)\}$ es convergente a un punto z en $cl(U)$. Como

$$cl(U) \cap \omega(x, f) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = o(x_1, f),$$

y $z \in \omega(x, f)$, entonces $z \in o(x_1, f)$.

Por otro lado, dado que f es continua,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i+1}(x) = f(z).$$

Como la sucesión $\{f^{n_i+1}(x)\}$ está contenida en W , entonces $f(z)$ es un elemento del conjunto $cl(W)$.

Dado que

$$f(z) \in o(x_1, f) \subset U,$$

concluimos que

$$cl(U) \cap cl(W) \neq \emptyset.$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, $o(x_1, f) = \omega(x, f)$. □

12.2. El conjunto $\omega(x, f)$ y la transitividad

Hasta ahora hemos visto sólo ejemplos donde el conjunto $\omega(x, f)$ es finito. La siguiente proposición nos muestra la posibilidad de que este conjunto sea, en algunos casos, de cardinalidad infinita.

Proposición 12.11. *Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función Tienda. Entonces existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $\omega(x_0, T) = [0, 1]$.*

Demostración. Sabemos que T es transitiva en $[0, 1]$ y el intervalo $[0, 1]$ es compacto. Entonces existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $o(x_0, T)$ es densa en $[0, 1]$.

Afirmamos que $\omega(x_0, T) = [0, 1]$.

Sea $x \in [0, 1]$. Como la órbita $o(x_0, T)$ es densa en $[0, 1]$, para cada $k \in \mathbb{N}$ la órbita $o(T^k(x_0), T)$ también es densa en $[0, 1]$ (ver ejercicio 8.19 en el capítulo 8).

Entonces existe una sucesión creciente de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$|T^{n_1}(x_0) - x| < \frac{1}{2}, \quad |T^{n_2}(x_0) - x| < \frac{1}{3}, \dots, \quad |T^{n_k}(x_0) - x| < \frac{1}{k}, \dots$$

Es inmediato que $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k}(x_0) = x$.

Por lo tanto $x \in \omega(x_0, T)$. Esto implica que

$$[0, 1] \subset \omega(x_0, T).$$

Y así, $\omega(x_0, T)$ es todo el intervalo $[0, 1]$. □

La clave en la demostración de la proposición 12.11 fue el hecho de que la *Tienda* es una función transitiva en el intervalo $[0, 1]$. La siguiente proposición contiene una afirmación más general. Invitamos al lector a dar los argumentos necesarios para su demostración en el ejercicio 12.12.

Proposición 12.12. *Sea X un espacio métrico compacto sin puntos aislados. Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua y transitiva en X . Entonces existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.*

Corolario 12.13. *Sean $C \subset \mathbb{R}$ el conjunto de Cantor, visto en el capítulo 6, y sea $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el elemento de la familia de las Tiendas estudiado en el capítulo 10. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(x, P) = C$.*

Corolario 12.14. *Sean Σ_2 el espacio en dos símbolos y $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función corrimiento estudiados en el capítulo 10. Entonces existe $t \in \Sigma_2$ tal que $\omega(t, \sigma) = \Sigma_2$.*

Dados X un espacio métrico compacto, $f : X \rightarrow X$ una función continua y x un punto en X sabemos, por la proposición 12.7, que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Como la órbita de x tiende hacia el conjunto $\omega(x, f)$, entonces para valores muy grandes de n el comportamiento dinámico de la órbita de x es cada vez más parecido a la dinámica de la función f restringida al omega conjunto límite de x .

En los ejemplos que hemos visto, la dinámica de

$$f|_{\omega(x, f)} : \omega(x, f) \rightarrow \omega(x, f)$$

cumple una de estas dos condiciones:

- Existe $y \in \omega(x, f)$, $y \in Per(f)$, tal que la órbita $o(y, f)$ es exactamente el conjunto $\omega(x, f)$.
- Existe $y \in \omega(x, f)$ tal que $o(y, f)$ es densa en $\omega(x, f)$.

En el ejercicio 12.14 el lector comprobará que ésta no es la situación general. Ahí se muestra la existencia de una función f y un punto x tales que f restringida al conjunto $\omega(x, f)$ no tiene órbitas densas.

Otro hecho importante, véase ejercicio 12.6, es el siguiente.

Resulta que si la cardinalidad del conjunto $\omega(x, f)$ es finita, entonces existe $y \in \text{Per}(f)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Por tanto el comportamiento de las órbitas $o(x, f)$ y $o(y, f)$ es, en esencia, el mismo. Claro, con la ventaja de que y es un punto periódico bajo f .

En este sentido, si queremos encontrar órbitas $o(x, f)$ con dinámica más complicada debemos voltear hacia puntos x tales que la cardinalidad del conjunto $\omega(x, f)$ no sea finita.

Definición 12.15. Sean $f : X \rightarrow X$ una función continua en X y $x \in X$. Decimos que x es un *punto aperiódico* o tiene *órbita aperiódica* si el conjunto $\omega(x, f)$ es infinito.

Si $f : X \rightarrow X$ es una función continua en X , X es métrico, compacto y sin puntos aislados y f es caótica en X , entonces, por la proposición 12.12, existe $x \in X$ cuya órbita es aperiódica.

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas. La letra X representa un espacio métrico y compacto.

EJERCICIO 12.1. Sea $f : X \rightarrow X$. Demostrar que si $x_0 \in X$ es un punto periódico de f , entonces $\omega(x_0, f) = o(x_0, f)$

EJERCICIO 12.2. Sean $f : X \rightarrow X$ y $x_0 \in X$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\omega(x_0, f) = \omega(f^k(x_0), f)$.

EJERCICIO 12.3. Demostrar la afirmación contenida en el ejemplo 12.4. *Sugerencia:* Ver ejercicio 2.20 en el capítulo 2.

EJERCICIO 12.4. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Demostrar que f tiene al menos un punto fijo.

EJERCICIO 12.5. Sean $f : X \rightarrow X$, $x, y \in X$.

- Demostrar que si $y \in \omega(x, f)$, entonces $\omega(y, f) \subset \omega(x, f)$.
- Mostrar un ejemplo donde $y \in \omega(x, f)$ y $\omega(y, f) \neq \omega(x, f)$.

178 12.2. EL CONJUNTO $\omega(x, f)$ Y LA TRANSITIVIDAD

EJERCICIO 12.6. Sean $f : X \rightarrow X$ y $x \in X$. Demostrar que si la cardinalidad del conjunto $\omega(x, f)$ es finita, entonces existe $y \in Per(f)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

EJERCICIO 12.7. Verdadero o falso: Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, y sea $x_0 \in [0, 1]$.

$$\omega(x_0, f) = \omega(x_0, f^2).$$

EJERCICIO 12.8. Sea $f : X \rightarrow X$ una función. Sea $k \in \mathbb{N}$, fijo. Entonces para todo $x \in X$ se tiene lo siguiente:

- $f(\omega(x, f^k)) = \omega(f(x), f^k)$.
- $\omega(x, f) = \omega(x, f^k) \cup \omega(f(x), f^k) \cup \omega(f^2(x), f^k) \cup \dots \cup \omega(f^{k-1}(x), f^k)$.

EJERCICIO 12.9. Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función *Tienda*. Demostrar que si $x_0 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, entonces la cardinalidad de $\omega(x_0, T)$ es finita.

EJERCICIO 12.10. Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función *Tienda*. Demostrar que los conjuntos

$$A = \{x \in [0, 1] : \omega(x, f) = \{0\}\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in [0, 1] : \omega(x, f) = [0, 1]\}$$

son, ambos, densos en $[0, 1]$.

EJERCICIO 12.11. Sean $f : X \rightarrow X$ y x_0 y y_0 en X tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x_0), f^n(y_0)) = 0.$$

Demostrar que $\omega(x_0, f) = \omega(y_0, f)$.

¿Será cierto el recíproco: si $\omega(x_0, f) = \omega(y_0, f)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x_0), f^n(y_0)) = 0?$$

EJERCICIO 12.12. Sean X un espacio sin puntos aislados y $f : X \rightarrow X$. Demostrar que f es transitiva en X si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\omega(x, f) = X$.

EJERCICIO 12.13. Sean $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ y $g : [c, d] \rightarrow [c, d]$ dos funciones conjugadas bajo el homeomorfismo $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$.

Demostrar que para toda $x \in [a, b]$, se tiene que

$$h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g).$$

EJERCICIO 12.14. Sea $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la función *corrimiento*. Sea \mathbf{t} el siguiente punto:

$$\mathbf{t} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

En \mathbf{t} las coordenadas con unos están aisladas por cadenas de ceros cada vez más grandes. Estas cadenas crecen como $n \in \mathbb{N}$ haciendo que sea cada vez más difícil encontrar un uno.

- Describir el conjunto $\omega(\mathbf{t}, \sigma)$. En particular demostrar que este conjunto es de cardinalidad infinita numerable.
- Describir la dinámica de σ restringida al conjunto $\omega(\mathbf{t}, \sigma)$. En particular demostrar que σ restringida a $\omega(\mathbf{t}, \sigma)$ no tiene órbitas densas en $\omega(\mathbf{t}, \sigma)$.

EJERCICIO 12.15. Sean $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, y $x_0 \in [0, 1]$. Demostrar lo siguiente:

- Si f es creciente en $[0, 1]$, entonces para todo x en $[0, 1]$ se tiene que $\omega(x, f)$ consta de un solo elemento.
- Si f es biyectiva, entonces para todo x en $[0, 1]$ se tiene que la cardinalidad del conjunto $\omega(x, f)$ es 1 ó 2.

EJERCICIO 12.16. Sea $f : X \rightarrow X$. Para cada $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$ consideramos el siguiente conjunto:

$$A_m(x) = \{f^k(x) : k \geq m\} = o(f^m(x), f).$$

Demostrar que

$$\omega(x, f) = \bigcap_{m \geq 0} cl(A_m(x)).$$

De aquí se concluye que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado. Comparar con la demostración de la proposición 12.6.

Comentarios

Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función *Tienda*. El ejemplo 12.2 y el ejercicio 12.9 muestran que existen una gran cantidad de puntos $x \in [0, 1]$ tales que su $\omega(x, T)$ es finito. Por otro lado, la proposición 12.11 y el ejercicio 12.10 nos ponen al tanto de que hay una cantidad infinita de puntos $x \in [0, 1]$ tales que su $\omega(x, T)$ es todo el intervalo $[0, 1]$.

Resulta que éstas no son las únicas opciones para el conjunto $\omega(x, T)$. En los siguientes párrafos ofrecemos al lector las ideas básicas que muestran la validez de esta afirmación.

Consideremos el elemento de la familia de las *Tiendas*, $\{T_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, cuando $\lambda = 4$,

$$T_4(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 4x, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (12.3)$$

En los comentarios al final del capítulo 10 definimos esta familia.

Sea $T^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $T^2(x) = T(T(x))$.

Observemos lo siguiente.

- Para todo $x \in [0, \frac{1}{4}] = K_0$, $T_4(x) = 4x = T^2(x)$.
- Para todo $x \in [\frac{3}{4}, 1] = K_1$, $T_4(x) = 4 - 4x = T^2(x)$.
- Sea $C_4 = J(T_4)$ el conjunto de los puntos atrapados de T_4 . En el capítulo 10, página 155, vimos que $J(T_4)$ es un conjunto de Cantor, contenido en el intervalo $[0, 1]$, estrictamente invariante bajo T_4 .
- Sea $x_0 \in J(T_4)$. Como la órbita de x_0 , $o(x_0, T_4)$, está acotada entonces para toda $n \geq 0$ se tiene que $(T_4)^n(x_0) \in K_0 \cup K_1$. Como T_4 y T^2 son iguales en $K_0 \cup K_1$, entonces

$$o(x_0, T_4) = o(x_0, T^2).$$

- Existe un homeomorfismo $\varphi : J(T_4) \rightarrow \Sigma_2$ tal que para toda $x \in J(T_4)$ se tiene que

$$\varphi \circ T_4(x) = \sigma \circ \varphi(x).$$

Es decir, las dinámicas generadas por T_4 en $J(T_4)$ y la función corrimiento σ en el espacio de dos símbolos Σ_2 son, esencialmente, las mismas.

- Por el corolario 12.14, existe $\mathbf{t} \in \Sigma_2$ tal que $\omega(\mathbf{t}, \sigma) = \Sigma_2$. Entonces el punto $x_0 = \varphi^{-1}(\mathbf{t})$ tiene como omega conjunto límite, $\omega(x_0, T_4)$, el conjunto de Cantor $J(T_4)$.
- Como las funciones T_4 y T^2 son indistinguibles en $K_0 \cup K_1$ y x_0 pertenece a esa unión, entonces

$$\omega(x_0, T^2) = \omega(x_0, T_4) = J(T_4).$$

- Por la proposición 12.8, para ese punto x_0 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \omega(x_0, T) &= \omega(x_0, T^2) \cup \omega(T(x_0), T^2) \\ &= \omega(x_0, T^2) \cup T(\omega(x_0, T^2)). \end{aligned}$$

- Como $\omega(x_0, T^2) \cap K_0 = J(T_4) \cap K_0$ es un conjunto de Cantor y T restringida al intervalo K_0 está dada por $T(x) = 2x$, entonces la imagen

$$T(\omega(x_0, T^2) \cap K_0)$$

es un conjunto de Cantor. De manera análoga podemos concluir que

$$T(\omega(x_0, T^2) \cap K_1)$$

también es un conjunto de Cantor.

- Entonces $\omega(x_0, T)$ es la unión de tres conjuntos de Cantor,

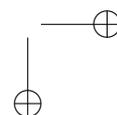
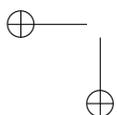
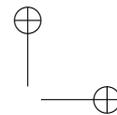
$$\omega(x_0, T) = \omega(x_0, T^2) \cup T(\omega(x_0, T^2) \cap K_0) \cup T(\omega(x_0, T^2) \cap K_1).$$

Por lo tanto, $\omega(x_0, T)$ es un conjunto de Cantor. Ver ejercicio 6.10, al final del capítulo 6, página 94.

Así, $\omega(x_0, T)$ no es finito y no es el intervalo $[0, 1]$.

En el ejercicio 12.14 se muestra que existe un punto $\mathbf{t} \in \Sigma_2$ tal que su $\omega(\mathbf{t}, \sigma)$ es de cardinalidad infinita numerable. Siguiendo las ideas presentadas en esta sección el lector es invitado a enfrentar el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 12.17. Demostrar que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que su omega conjunto límite bajo la función *Tienda*, $\omega(x_0, T)$, es infinito numerable.



CAPÍTULO 13

Una Sumadora

En este capítulo nos proponemos estudiar la dinámica de una función muy especial, $G : I \rightarrow I$, con $I = [0, 1]$.

Esta función tiene un comportamiento muy interesante.

Por un lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, $G : I \rightarrow I$ tiene una única órbita periódica repulsora de periodo 2^n y no tiene puntos periódicos de otros periodos, por lo que G proporciona otro ejemplo que demuestra la parte (iii) del Teorema de Sharkovskii (ver capítulo 3, página 27).

Por otro lado, existe un subconjunto contenido I —que el lector reconocerá inmediatamente— restringida al cual, la función G es conjugada a otro sistema dinámico definido en el espacio de sucesiones en dos símbolos Σ_2 . Este sistema es conocido como *sumadora* o *máquina de sumar*, $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

La sumadora es un modelo de dinámica simbólica muy diferente al estudiado en el capítulo 10. Su comportamiento es muy importante puesto que constituye una especie de frontera entre un régimen no caótico y uno en el que reina el caos.

La primera sección de este capítulo, haciendo uso de la duplicadora o doble de una función (ver capítulo 4) y del conjunto de Cantor C (descrito con detalle en el capítulo 6), la dedicamos a definir la función $G : I \rightarrow I$ y a establecer algunas de sus propiedades básicas. En particular, aquí probamos la conexión de ésta con el Teorema de Sharkovskii.

En la segunda sección establecemos nuevas propiedades de la dinámica de $G : I \rightarrow I$. En particular mostramos el extraordinario papel que juega el conjunto de Cantor C en todo esto. Resulta que para casi todo punto $x \in I$ se tiene que su órbita *converge* (en un sentido que precisaremos adelante) al conjunto C .

184 13.1. LA FUNCIÓN $G : I \rightarrow I$ Y SUS PUNTOS PERIÓDICOS

En la tercera sección recordamos el espacio de dos símbolos, Σ_2 , y definimos y exploramos la función sumadora, $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

La última sección la dedicamos a describir la conjugación entre G , restringida a un subconjunto del intervalo I , y $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

13.1. La función $G : I \rightarrow I$ y sus puntos periódicos

Denotamos con la letra I el intervalo unitario $[0, 1]$ contenido en la recta real.

Para definir la función $G : I \rightarrow I$ la idea es usar repetidamente *la duplicadora*. Empezamos con una función muy simple, la constante:

$$g_0(x) = \frac{1}{3}, \quad x \in [0, 1].$$

Luego tomamos la doble de $g_0 : I \rightarrow I$, que llamamos $g_1 : I \rightarrow I$. Luego $g_2 : I \rightarrow I$ la doble de $g_1 : I \rightarrow I$. Y así sucesivamente.

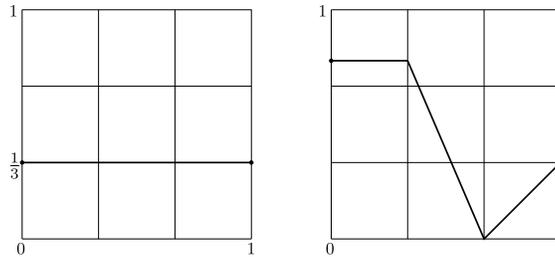


FIGURA 13.1: Gráficas de las funciones g_0 y g_1 .

Inductivamente, tomamos a $g_{n+1} : I \rightarrow I$ como la doble de $g_n : I \rightarrow I$ para $n \geq 1$. Las figuras 13.1 y 13.2 muestran las gráficas de g_n para $n = 0, 1, 2$ y 3 .

Finalmente, definimos $G : I \rightarrow I$ así:

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x), \quad x \in [0, 1] \tag{13.1}$$

Para convencernos de que $G : I \rightarrow I$ está bien definida (o sea, que el límite en (13.1) existe) examinemos brevemente, desde un punto de vista geométrico, a las funciones $g_n : I \rightarrow I$.

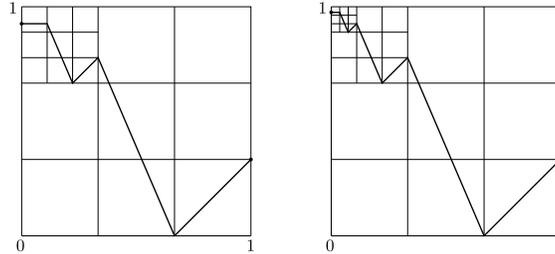


FIGURA 13.2: Gráficas de las funciones g_2 y g_3 .

Iniciamos destacando algunas propiedades de $g_1 : I \rightarrow I$. Por ser la doble de g_0 , la función g_1 tiene un único punto fijo x_0 . Este punto está en el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = A_0$. Existe una única órbita de periodo 2 bajo g_1 , ella está contenida en la unión

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = I \setminus A_0.$$

La gráfica de g_1 restringida al intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ es una recta de pendiente $-\frac{7}{3}$, por lo que

$$g_1'(x_0) = -\frac{7}{3} < -1,$$

de donde concluimos que x_0 es repulsor.

La órbita de periodo 2, en cambio, es atractora (de hecho, es súper-atractora, como podrá comprobar fácilmente el lector).

Las órbitas de todos los puntos $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $x \neq x_0$, eventualmente escapan de este intervalo para quedar atrapadas en la unión $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, convergiendo a la órbita atractora de periodo 2.

Al duplicar $g_1 : I \rightarrow I$, la nueva función $g_2 : I \rightarrow I$ tiene un único punto fijo repulsor en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, una única órbita periódica repulsora de periodo 2 contenida en

$$\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right) = A_1,$$

y una única órbita atractora de periodo cuatro contenida en la unión

$$\left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right] = I \setminus (A_0 \cup A_1).$$

186 13.1. LA FUNCIÓN $G : I \rightarrow I$ Y SUS PUNTOS PERIÓDICOS

Las órbitas de puntos no periódicos de g_2 que inician en

$$\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right) \quad \text{y en} \quad \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

eventualmente se escapan de estos intervalos para quedar atrapadas en los cuatro intervalos cerrados en donde vive la órbita atractora de periodo 4 de g_2 y convergen a ésta.

Nótese la relación que va apareciendo con la construcción del conjunto de Cantor C . Utilizando aquí la misma notación que desarrollamos en el capítulo 6, la órbita periódica repulsora de $g_1 : I \rightarrow I$ quedó en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = A_0$, que es el tercio excluido en el primer paso de la construcción de C . Las órbitas periódicas repulsoras de g_1 y g_2 quedaron, respectivamente, en los tercios excluidos en los primeros dos pasos de la construcción del conjunto C , es decir, en $A_0 \cup A_1$. La órbita atractora de g_2 quedó contenida en el complemento de estos tercios excluidos, es decir, en

$$C_2 = I \setminus (A_0 \cup A_1).$$

Al continuar duplicando para obtener g_n , $n \geq 3$, se produce un fenómeno análogo: aparece una nueva órbita periódica atractora de periodo 2^n contenida en el complemento de los tercios excluidos hasta el n -ésimo paso, o sea, en el conjunto C_n . El resto de las órbitas periódicas de periodo 2^j , $j = 0, \dots, n-1$, son repulsoras y expulsan a las órbitas de los demás puntos que están en los tercios excluidos

$$\bigcup_{j=0}^{n-1} A_j = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$$

de los pasos previos.

Además, $g_2 = g_1$ en el intervalo $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. De hecho, para toda $n \geq 2$, $g_n = g_1$ en $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Con lo que $G(x) = g_1(x)$ para todo punto $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

Análogamente, si $n \geq 3$, entonces $g_n = g_2$ en el intervalo $\left[\frac{1}{3^2}, 1\right]$. Así, para todo $x \in \left[\frac{1}{3^2}, 1\right]$, $G(x) = g_2(x)$.

En general, se tiene que $g_n = g_N$ en el intervalo $\left[\frac{1}{3^N}, 1\right]$ si $n \geq N > 3$. Con lo que $G(x) = g_N(x)$ para todo $x \in \left[\frac{1}{3^N}, 1\right]$.

De manera que las órbitas repulsoras de la función g_n las va heredando la función G , y como esto pasa para todo número natural n , al final las

órbitas periódicas de G son todas repulsoras. Los periodos de estas órbitas son siempre potencias de 2, y todas las posibilidades de periodo 2^j para $j \in \mathbb{N}$ están presentes en $G : I \rightarrow I$.

Estas y otras características de las funciones $g_n : I \rightarrow I$ y de $G : I \rightarrow I$ las demostramos a continuación.

Proposición 13.1. *Para cada $n \geq 0$ sea $g_n : I \rightarrow I$ la función definida en el párrafo previo, y sean C_n y A_n los conjuntos utilizados en la construcción del conjunto de Cantor C .*

- i) Si $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$, entonces $g_n(x) = g_1(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- ii) Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\frac{1}{3^n} \leq x \leq 1$, entonces*

$$g_{n+1}(x) = g_n(x).$$

En consecuencia, si $\frac{1}{3^n} \leq x \leq 1$, entonces

$$g_{n+k}(x) = g_n(x)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

iii) Para $n \geq 0$, la función $g_n : I \rightarrow I$ tiene una única órbita periódica atractora de periodo 2^n contenida en el conjunto C_n . Además, $g_n(C_n) \subseteq C_n$; es decir, C_n es invariante bajo g_n .

iv) Para $n \geq 2$ y cada $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, g_n tiene una única órbita repulsora de periodo 2^j contenida en A_j .

v) Si $x \in A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$ y no es un punto periódico de g_n de periodo 2^j , $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, entonces su órbita eventualmente abandona la unión $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$ y entra a C_n para converger a la órbita periódica atractora de g_n de periodo 2^n .

Demostración. (i) Por definición, si $n \geq 1$ tenemos que

$$g_n(x) = \begin{cases} (g_{n-1}(1) + 2) \left(\frac{2}{3} - x\right) = \frac{7}{3} \left(\frac{2}{3} - x\right), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ x - \frac{2}{3}, & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Conclusión: $g_n(x) = g_1(x)$ si $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

Los dos incisos siguientes se demuestran por inducción.

(ii) Demostramos aquí la primera afirmación de este inciso, es decir, que si $\frac{1}{3^n} \leq x \leq 1$, entonces $g_{n+1}(x) = g_n(x)$. La argumentación de la segunda afirmación la dejamos al lector (ver ejercicio 13.5).

188 13.1. LA FUNCIÓN $G : I \rightarrow I$ Y SUS PUNTOS PERIÓDICOS

El caso $k = 1$ se sigue del inciso anterior.

Suponemos válida la afirmación para $k = n$.

Para $k = n + 1$, sea $x \in [\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3}]$. Entonces, como g_{n+2} es el doble de g_{n+1} ,

$$g_{n+2}(x) = \frac{1}{3}g_{n+1}(3x) + \frac{2}{3},$$

con $3x \in [\frac{1}{3^n}, 1]$. Por la hipótesis de inducción, $g_{n+1}(3x) = g_n(3x)$.

Por lo tanto, utilizando que la función g_{n+1} es el doble de g_n , se sigue que si $x \in [\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3}]$,

$$g_{n+2}(x) = \frac{1}{3}g_n(3x) + \frac{2}{3} = g_{n+1}(x).$$

Si $x \in [\frac{1}{3}, 1]$, la afirmación se sigue del inciso anterior.

(iii) Para las funciones $g_0 : I \rightarrow I$ y $g_1 : I \rightarrow I$ la afirmación es evidente.

La suponemos válida para $k = n$, es decir, suponemos que la función $g_n : I \rightarrow I$ tiene una única órbita atractora de periodo 2^n contenida en C_n y que se da la contención $g_n(C_n) \subseteq C_n$.

Por las proposiciones 4.7 y 4.8, capítulo 4, si $g_n : I \rightarrow I$ tiene una única órbita atractora de periodo 2^n , entonces $g_{n+1} : I \rightarrow I$ tiene una única órbita periódica atractora de periodo 2^{n+1} .

Vamos a ver ahora que $g_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq C_{n+1}$.

Sea $x \in C_{n+1} \cap [0, \frac{1}{3}]$. Por el ejercicio 6.9 del capítulo 6, el punto $3x$ está en C_n . Y, por la hipótesis de inducción, $g_n(3x) \in C_n$.

Usando nuevamente el ejercicio 6.9 concluimos que

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{3}g_n(3x) + \frac{2}{3}$$

es un elemento del conjunto

$$\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3} = \left\{ x \in [0, 1] : x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}, \quad y \in C_n \right\},$$

y

$$\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3} \subset C_{n+1} + \frac{2}{3} \subset C_{n+1}.$$

Por otra parte, si $x \in C_{n+1} \cap [\frac{2}{3}, 1]$, por el mismo ejercicio,

$$g_{n+1}(x) = x - \frac{2}{3} \text{ pertenece al conjunto } C_{n+1} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

En conclusión, $g_{n+1}(C_{n+1}) \subseteq C_{n+1}$.

Por último, si $x_0 \in C_n$ es un punto periódico atractor de g_n , entonces

$$\frac{x_0}{3} \in \frac{1}{3}C_n \subseteq C_{n+1}$$

es un punto periódico atractor de g_{n+1} .

Como C_{n+1} es invariante bajo g_{n+1} , se sigue que toda la órbita periódica atractor $o(\frac{x_0}{3}, g_{n+1})$ está en C_{n+1} .

(iv) Nuevamente procedemos por inducción.

Un cálculo directo comprueba la afirmación para $k = 1$.

Por la hipótesis de inducción, todos los puntos periódicos repulsivos (de periodo 2^j , $1 \leq j \leq n - 1$) de la función $g_n : I \rightarrow I$ están en el intervalo $[\frac{1}{3^n}, 1]$ dado que

$$(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \subset \left[\frac{1}{3^n}, 1 \right].$$

Como g_{n+1} coincide con g_n en el intervalo $[\frac{1}{3^n}, 1]$, entonces la función g_{n+1} automáticamente hereda todos estos puntos periódicos repulsivos.

Asimismo, a las órbitas que bajo g_n eventualmente escapan del conjunto

$$(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$$

para ir a dar a C_n , les ocurre exactamente lo mismo bajo $g_{n+1} : I \rightarrow I$.

Sea x_0 el único punto periódico repulsor de periodo 2^{n-1} de g_n en el intervalo $(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}) \subset A_{n-1}$. Entonces $\frac{x_0}{3}$ es el único punto periódico repulsor de periodo 2^n de g_{n+1} en el intervalo $(\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}) \subset A_n$.

Ahora bien, los 2^n puntos de la órbita de $\frac{x_0}{3}$ están contenidos en igual número de intervalos ajenos. Vamos a demostrar que estos intervalos son precisamente los que constituyen a A_n , es decir, las componentes de A_n .

Sea $y_0 = \frac{x_0}{3}$ y denotemos por y_j , $1 \leq j \leq 2^j - 1$, al resto de los puntos de la órbita bajo g_{n+1} de y_0 .

Por otra parte, sea

$$K = \left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n} \right) \subset A_{n-1}.$$

Por la definición de g_{n+1} y el ejercicio 6.9 del capítulo 6, tenemos que

$$y_1 = g_{n+1} \left(\frac{x_0}{3} \right) = \frac{1}{3}g_n(x_0) + \frac{2}{3} \in \frac{1}{3}K + \frac{2}{3} \subset A_n \cap \left[\frac{2}{3}, 1 \right].$$

190 13.1. LA FUNCIÓN $G : I \rightarrow I$ Y SUS PUNTOS PERIÓDICOS

Es decir, y_1 está en otro de los intervalos que constituyen a A_n (de hecho, en el que está en $A_n \cap [\frac{2}{3}, 1]$ más próximo al punto 1).

Asimismo, llamando K^* al intervalo de A_{n-1} que contiene a $g_n(x_0)$,

$$y_2 = g_{n+1}(y_1) = \frac{1}{3}g_n(x_0) \in \frac{1}{3}K^* \subset A_n \cap \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

Claramente el conjunto $\frac{1}{3}K^*$ es un intervalo distinto de $(\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}})$ dado que $y_2 \neq y_0$.

Continuando de esta manera se concluye que las iteraciones pares de y_0 quedan contenidas en los 2^{n-1} intervalos de $A_n \cap [0, \frac{1}{3}]$ y las impares en los 2^{n-1} correspondientes a $A_n \cap [\frac{2}{3}, 1]$.

Nótese que la manera en la que g_{n+1} permuta cíclicamente a los intervalos de A_n está determinada por la manera en la que la función g_n hace lo propio con los de A_{n-1} (volveremos a esto más adelante).

La demostración del inciso (v) utiliza argumentos análogos y se deja al lector (ejercicio 13.6). \square

Una consecuencia del inciso (ii) de la proposición 13.1 es que la función $G : I \rightarrow I$ está bien definida para todo punto $x \in I$.

En efecto, sea $x > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} \leq x \leq 1$.

Entonces, como por el inciso (ii) tenemos que $g_{N+k}(x) = g_N(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_N(x) = g_N(x),$$

por lo que $G(x) = g_N(x)$.

Y si $x = 0$, como

$$g_n(0) = 1 - \frac{2}{3^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3^{n+1}}\right) = 1.$$

Por lo que $G(0) = 1$.

Mas aún, la convergencia de la sucesión de funciones $\{g_n : I \rightarrow I\}$ a $G : I \rightarrow I$ es claramente uniforme en el intervalo $I = [0, 1]$, por lo que G necesariamente es continua en $[0, 1]$. Véase también el ejercicio 13.7.

Como señalamos, la función $G : I \rightarrow I$ nos permite dar otra demostración de la parte (iii) del Teorema de Sharkovskii. Esto es consecuencia de lo siguiente.

Proposición 13.2. *Sea $p \in [0, 1]$. Entonces p es un punto periódico de la función $G : I \rightarrow I$ si y sólo si p es un punto periódico repulsor de la función $g_n : I \rightarrow I$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $p \in I$ un punto periódico repulsor, de la función g_n , de periodo 2^j para algún $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Entonces p es elemento de alguna componente de la unión

$$(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}).$$

Todas estas componentes están contenidas en el intervalo $[\frac{1}{3^n}, 1]$.

Como G coincide con g_n en el intervalo $[\frac{1}{3^n}, 1]$, p es un punto periódico repulsor de G .

Demostramos ahora la implicación recíproca.

Sea $p \in I$ un punto periódico de la función $G : I \rightarrow I$. Supongamos que p es de periodo $k \geq 1$.

Renombrando si es necesario, podemos suponer que p es el mínimo de su órbita, $o(p, G)$, es decir,

$$p = \text{mín} \{p, G(p), G^2(p), \dots, G^{k-1}(p)\}.$$

Como $x_0 = 0$ no es punto periódico de $G : I \rightarrow I$ (ejercicio 13.3) se sigue que $0 < p$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} < p$. Como $G : I \rightarrow I$ es idéntica a $g_N : I \rightarrow I$ en el intervalo $[\frac{1}{3^N}, 1]$, p es un punto periódico de g_N contenido en ese intervalo y, por ser el mínimo de la órbita de p , toda la órbita de p , $o(p, g_N)$, está contenida en el intervalo $[\frac{1}{3^N}, 1]$.

En consecuencia, p es un punto periódico de periodo $k = 2^j$ para algún $j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ y es repulsor, tanto de g_N como de G . \square

De esta proposición se sigue que la función $G : I \rightarrow I$ tiene una única órbita periódica repulsora de periodo 2^n para cada $n \in \mathbb{N}$ y no tiene otras órbitas periódicas.

En consecuencia, la existencia de esta función $G : I \rightarrow I$ demuestra el inciso (iii) del Teorema de Sharkovskii.

13.2. La dinámica de $G : I \rightarrow I$

Sean $J \subset [0, 1]$, $J \neq \emptyset$, y $x_0 \in [0, 1]$. Definimos la *distancia* del punto x_0 al conjunto J así:

$$d(x_0, J) = \inf \{|x_0 - x| : x \in J\}.$$

Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Decimos que la órbita $o(x_0, f)$ *converge al conjunto* J si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x_0), J) = 0.$$

La noción de convergencia a un conjunto nos permitirá comprender, en un nuevo nivel, la dinámica generada por la función $G : I \rightarrow I$. Veamos.

Como cada función $g_n : I \rightarrow I$ va expulsando del conjunto

$$(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$$

a las órbitas no periódicas, cabe esperar que bajo $G : I \rightarrow I$ se generalice este fenómeno. Es decir, que las órbitas no periódicas contenidas en esta unión converjan, de alguna manera, al conjunto de Cantor C .

Al respecto tenemos el siguiente resultado.

Proposición 13.3. *Sean C el conjunto de Cantor, $G : I \rightarrow I$ la función definida por (13.1) y, para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n el conjunto que obtenemos en el paso n en la construcción de C . Entonces:*

i) *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $G(C_n) = C_n$.*

ii) *$G(C) = C$.*

iii) *Sea $x \in I$. Si $x \notin C$ y x no es un punto periódico de $G : I \rightarrow I$, entonces la órbita de x bajo G tiende a C o eventualmente cae en C .*

Demostración. (i) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $g_n(C_n) \subset C_n$. De hecho la contención es propia. Es claro que la función $g_n : I \rightarrow I$ es suprayectiva cuando la restringimos del conjunto $C_n \setminus [0, \frac{1}{3^n}]$ al conjunto $C_n \setminus [1 - \frac{1}{3^n}, 1]$. Por lo tanto g_n transforma a todas las componentes de C_n menos la primera, la que está más a la izquierda, en todas las componentes de C_n menos la última, la que está más a la derecha. Además,

$$g_n \left(\left[0, \frac{1}{3^n} \right] \right) = \left\{ 1 - \frac{2}{3^{n+1}} \right\} \subset \left[1 - \frac{1}{3^n}, 1 \right].$$

Así, la razón por la cual la contención es propia es porque g_n no es suprayectiva del intervalo $[0, \frac{1}{3^n}]$ en el intervalo $[1 - \frac{1}{3^n}, 1]$.

Como $G : I \rightarrow I$ coincide con $g_n : I \rightarrow I$ en el intervalo $[\frac{1}{3^n}, 1]$, a la función G le ocurre exactamente lo mismo en dicho intervalo, es decir, es suprayectiva de

$$C_n \setminus \left[0, \frac{1}{3^n}\right] \quad \text{en} \quad C_n \setminus \left[1 - \frac{1}{3^n}, 1\right].$$

Sin embargo, es claro que

$$G\left(\left[0, \frac{1}{3^n}\right]\right) = \left[1 - \frac{1}{3^n}, 1\right],$$

con lo que $G(C_n) = C_n$.

(ii) Como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n,$$

del inciso anterior se sigue que $G(C) \subset C$.

Para ver que $C \subset G(C)$, sea $y \in C$.

Si $y = 1$, entonces, como $G(0) = 1$ y $0 \in C$, se tiene que $y \in G(C)$.

Consideremos ahora el caso $0 \leq y < 1$.

Del inciso anterior se tiene que para $n \geq 1$, existe $x_n \in C_n$ tal que $G(x_n) = y$. Restringiéndonos a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\{x_n\}$ es convergente a $x \in I$. Por continuidad, $G(x) = y$.

Ahora bien, la sucesión $\{x_n\}$ es un conjunto de preimágenes de y bajo G . Como cada punto tiene un número finito de preimágenes bajo G , dicha sucesión es finita y como es convergente, una infinidad de términos asumen el valor x ; es decir, $x_n = x$ para un conjunto infinito de índices n . Por lo tanto, $x \in C_n$ para un conjunto infinito de índices n , por lo que $x \in C$.

(iii) Si $x \notin C$ y no es un punto periódico de $G : I \rightarrow I$, entonces

$$x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

y, en particular, está en alguna componente de A_N para algún $N \in \mathbb{N}$.

En dicha componente hay un punto periódico repulsor de g_N que obliga a la órbita de x a abandonar la componente en cuestión, e ingresar, en algún

momento, en C_N (inciso (v) de la proposición 13.1). Es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G^k(x) \in C_N$.

Ahora hay dos posibilidades: Una es que $G^k(x)$ sea elemento de C . Como C es invariante bajo G , $G^m(x) \in C$ para toda $m \geq k$. O sea, la órbita de x , $o(x, G)$, ingresó en C y permanece en C .

La otra posibilidad es que al caer en C_N , $G^k(x)$ hubiese caído en alguna componente de A_{N+1} , y en general, que para $j \in \mathbb{N}$, $G^{k+j}(x)$ esté en alguna componente de A_{N+j} . Esto implica que la distancia entre la órbita de x y el conjunto C tiende a cero, y la afirmación queda demostrada. \square

La proposición 13.3 nos revela que, bajo la función $G : I \rightarrow I$, el conjunto de Cantor C es un *conjunto atractor*; o sea, es invariante y *atrae*, en el sentido que establece el inciso (iii) de dicha proposición, a todas las órbitas de los puntos que no son periódicos. Ello habla de la importancia dinámica –bajo la función G – del conjunto de Cantor C .

¿Y cómo es la dinámica de G restringida a C ?

Para resolver este problema recurrimos –como dijimos al principio del capítulo– a un nuevo modelo de dinámica simbólica.

13.3. Otra mirada a la dinámica simbólica

Como en el capítulo 10, definimos (Σ_2, d) como el espacio de sucesiones infinitas de 0's y 1's; es decir,

$$\Sigma_2 = \{ \mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_n \in \{0, 1\}, n \geq 0 \},$$

con la métrica

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}.$$

En dicho capítulo demostramos que (Σ_2, d) es homeomorfo al conjunto de Cantor C . Es, por lo tanto, un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente desconexo.

Ahora vamos a definir una función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ completamente distinta a la función corrimiento $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ (ver página 148).

Sea

$$\mathbf{1} = (10000\dots) = (1\bar{0}) \in \Sigma_2.$$

Es decir, el símbolo $\mathbf{1}$ representa al punto de Σ_2 cuya primera coordenada es un 1 y todas las demás coordenadas son 0.

Para $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, se define la suma

$$\mathbf{s} + \mathbf{1} = (\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots)$$

como sigue:

- Si $s_0 = 0$, entonces $\alpha_0 = s_0 + 1 = 1$ y, para todo $n \geq 1$, $\alpha_n = s_n$.
- Si $s_0 = 1$ y $s_1 = 0$, entonces $\alpha_0 = 0$, y *llevamos* 1 a la siguiente coordenada y sumamos. Es decir,

$$\alpha_1 = s_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

y, para todo $n \geq 2$, $\alpha_n = s_n$.

- Si $s_0 = s_1 = \dots = s_k = 1$, para algún $k \in \mathbb{N}$, y $s_{k+1} = 0$, entonces $\alpha_0 = 0$, y *llevamos* 1 a la siguiente coordenada y sumamos. Obtenemos así

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0, \quad \text{y} \quad \alpha_{k+1} = s_{k+1} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Además, para todo $n \geq k + 2$, $\alpha_n = s_n$.

- Si para toda $n \geq 0$ se tiene que $s_n = 1$, entonces para toda $n \geq 0$, $\alpha_n = 1$.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} + \mathbf{1} &= (000\dots) + \mathbf{1} = (100\dots) = \mathbf{1}, \\ (10s_2s_3\dots) + \mathbf{1} &= (01s_2s_3\dots), \\ (1110s_4s_5\dots) + \mathbf{1} &= (0001s_4s_5), \\ (1111\dots) + \mathbf{1} &= (0000\dots) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Definición 13.4. La función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definida por $\tau(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + \mathbf{1}$ se llama la *sumadora* o *máquina de sumar* en el espacio Σ_2 .

Obviamente la suma $\mathbf{s} + \mathbf{1}$ que se ha definido en Σ_2 es asociativa en el sentido de que

$$(\mathbf{s} + \mathbf{1}) + \mathbf{1} = \mathbf{s} + (\mathbf{1} + \mathbf{1})$$

para todo $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ (ver ejercicio 13.8).

Ello nos permite, en particular, para $n \in \mathbb{N}$, definir $n \cdot \mathbf{1}$ de modo natural como la suma de $\mathbf{1}$ consigo mismo n veces.

Así,

$$2 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1}, \quad \text{y} \quad 3 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} = 2 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1}.$$

Y, en general,

$$(n + 1) \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1} = n \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1}.$$

Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tau^n(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + n \cdot \mathbf{1}$. Así la órbita de un punto $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ consiste de todos los puntos en Σ_2 que obtenemos al irle sumando los múltiplos de $\mathbf{1}$ a \mathbf{s} .

En particular, la órbita de $\mathbf{0}$ es el conjunto de todos los múltiplos de $\mathbf{1}$.

La órbita de $\mathbf{0}$, $o(\mathbf{0}, \tau)$, tiene una propiedad que nos será de gran utilidad: es un conjunto denso en Σ_2 .

Proposición 13.5. *La órbita de $\mathbf{0}$, o sea el conjunto de múltiplos de $\mathbf{1}$,*

$$o(\mathbf{0}, \tau) = \{n \cdot \mathbf{1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{0}\},$$

es denso en el espacio Σ_2 .

Esta proposición es muy clara si hacemos una lista como la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= (\underline{1}000\dots), & 3 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{11}000\dots), & 7 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{111}000\dots), \\ 2 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{01}00\dots), & 4 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{001}00\dots), & 8 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{0001}00\dots), \\ & & 5 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{101}00\dots), & 9 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{1001}00\dots), \\ & & 6 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{011}00\dots), & 10 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{0101}00\dots), \\ & & & & 11 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{1101}00\dots), \\ & & & & 12 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{0011}00\dots), \\ & & & & 13 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{1011}00\dots), \\ & & & & 14 \cdot \mathbf{1} &= (\underline{0111}00\dots). \end{aligned}$$

Al principio, en $\mathbf{1}$ y $2 \cdot \mathbf{1}$, aparecen, respectivamente, 1 y 0 en la primera coordenada.

En los siguientes cuatro múltiplos, aparecen todos los bloques de 0's y 1's de longitud 2 en las primeras dos coordenadas; luego, en los siguientes ocho múltiplos, aparecen todos los bloques posibles de 0's y 1's de longitud 3 en las primeras 3 coordenadas, y así sucesivamente (estos bloques están subrayados).

Está claro que, eventualmente, cualquier bloque de 0's y 1's de longitud n va a aparecer en las primeras n coordenadas de algún múltiplo de $\mathbf{1}$.

Demostración. Sean

$$\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} \dots) \in \Sigma_2$$

y $\varepsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Queremos exhibir un múltiplo de $\mathbf{1}$ en la bola de \mathbf{s} de radio ε . Para ello basta con que las primeras $n + 1$ coordenadas de dicho múltiplo coincidan con las primeras $n + 1$ coordenadas de \mathbf{s} .

Teniendo en cuenta la lista anterior, podemos concluir que los bloques de 0's y 1's de tamaño $n + 1$ aparecen a partir del lugar

$$N = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2.$$

Es decir, a partir del múltiplo $N \cdot \mathbf{1}$.

Por lo tanto, entre

$$N \cdot \mathbf{1} \quad \text{y} \quad (N + 2^{n+1}) \cdot \mathbf{1}$$

hay un múltiplo de $\mathbf{1}$, digamos $m \cdot \mathbf{1}$, con la primeras $n + 1$ coordenadas deseadas.

Entonces,

$$d(\mathbf{s}, m \cdot \mathbf{1}) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Con lo cual queda demostrada la proposición. □

Otro resultado que nos será sumamente útil es el siguiente.

Lema 13.6. *Sea $k \geq 0$. Sean $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$. Si los puntos \mathbf{s} y \mathbf{t} tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales, entonces los puntos $\mathbf{s} + \mathbf{1}$ y $\mathbf{t} + \mathbf{1}$ también tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales.*

Demostración. Supongamos que \mathbf{s} y \mathbf{t} tienen las primeras $k+1$ coordenadas iguales, es decir son de la forma

$$\mathbf{s} = (a_0 \dots a_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) \quad \text{y} \quad \mathbf{t} = (a_0 \dots a_k t_{k+1} t_{k+2} \dots).$$

La demostración se basa simplemente en comprobar el resultado para las tres posibilidades que tienen las coordenadas de $\mathbf{s} + \mathbf{1}$ y $\mathbf{t} + \mathbf{1}$.

Supongamos primero que $a_0 = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} + \mathbf{1} &= (1a_1 \dots a_k s_{k+1} s_{k+2} \dots), \\ \mathbf{t} + \mathbf{1} &= (1a_1 \dots a_k t_{k+1} t_{k+2} \dots), \end{aligned}$$

y ya acabamos.

Supongamos ahora que para algún l , $1 \leq l \leq k$, se tiene que $a_l = 0$ y $a_j = 1$ para cada $0 \leq j \leq l-1$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{s} + \mathbf{1} &= (00 \dots 01a_{l+1} \dots a_k s_{k+1} s_{k+2} \dots), \quad \text{y} \\ \mathbf{t} + \mathbf{1} &= (00 \dots 01a_{l+1} \dots a_k t_{k+1} t_{k+2} \dots). \end{aligned}$$

Por último, si $s_i = 1 = t_i$ para $0 \leq i \leq k$, entonces para cada $0 \leq i \leq k$ la i coordenada del punto $\mathbf{s} + \mathbf{1}$ y la i coordenada del punto $\mathbf{t} + \mathbf{1}$ son, ambas, iguales a 0. \square

Hay dos consecuencias importantes del lema anterior:

Una es que si \mathbf{s} y \mathbf{t} tienen las primeras $k+1$ coordenadas iguales, entonces, por inducción, para todo $n \in \mathbb{N}$, los puntos $\tau^n(\mathbf{s})$ y $\tau^n(\mathbf{t})$ tienen las primeras $k+1$ coordenadas iguales.

La segunda es que, con la métrica d , la función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, en cierto sentido, *preserva las distancias*, aunque no es una isometría.

En términos precisos nos referimos a lo siguiente: Sean $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$. Supongamos que, para algún $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \frac{1}{2^k}.$$

Entonces, \mathbf{s} y \mathbf{t} tienen las primeras $k+1$ coordenadas iguales. Por lo tanto,

$$d(\tau(\mathbf{s}), \tau(\mathbf{t})) \leq \frac{1}{2^k}.$$

De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que los puntos $\tau^n(\mathbf{s})$ y $\tau^n(\mathbf{t})$ tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales. Por lo tanto,

$$d(\tau^n(\mathbf{s}), \tau^n(\mathbf{t})) \leq \frac{1}{2^k}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Usaremos estos hechos en lo que sigue pero recomendamos al lector comprobar que, en efecto, $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ no es una isometría bajo d . Aunque se puede definir una nueva métrica en Σ_2 con la cual resulta que τ sí es una isometría (ver ejercicios 13.9 y 13.10).

Proposición 13.7. *La función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es biyectiva.*

Demostración. Sean $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$. Para ver que τ es inyectiva, supongamos $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$ y sea $k \geq 0$ tal que la coordenada k -ésima es la primera en la que difieren \mathbf{s} y \mathbf{t} ; es decir, $s_k \neq t_k$ y si $k > 0$, $s_j = t_j$ para $0 \leq j \leq k - 1$.

Necesariamente alguna de estas dos coordenadas, s_k y t_k , es 0 y la otra es 1.

Supongamos $s_k = 0$ y $t_k = 1$. O sea,

$$\mathbf{s} = (s_0 \cdots s_{k-1} 0 s_{k+1} s_{k+2} \cdots) \quad \text{y} \quad \mathbf{t} = (s_0 \cdots s_{k-1} 1 t_{k+1} t_{k+2} \cdots).$$

Entonces $\tau(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + \mathbf{1}$ y $\tau(\mathbf{t}) = \mathbf{t} + \mathbf{1}$ difieren también en la k -ésima coordenada por lo que $\tau(\mathbf{s}) \neq \tau(\mathbf{t})$.

La demostración de que τ es suprayectiva se deja al lector. □

Proposición 13.8. *La función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Veamos primero que $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es continua.

Sean $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$.

Tomemos cualquier $\mathbf{t} \in \Sigma_2$ tal que

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \frac{1}{2^k}.$$

Entonces \mathbf{s} y \mathbf{t} tienen las primeras $k + 1$ coordenadas iguales, por lo que los puntos $\tau(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + \mathbf{1}$ y $\tau(\mathbf{t}) = \mathbf{t} + \mathbf{1}$ también.

En consecuencia,

$$d(\tau(\mathbf{s}), \tau(\mathbf{t})) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es continua.

Por la proposición 13.7, existe la función inversa $\tau^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

Como Σ_2 es un espacio compacto, dicha inversa es continua. □

Teorema 13.9. *Bajo la función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, la órbita de todo punto $s \in \Sigma_2$ forma un conjunto denso en Σ_2 .*

Demostración. Sean \mathbf{s} y \mathbf{t} elementos de Σ_2 y sea $\varepsilon > 0$.

Vamos a demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(\tau^N(\mathbf{s}), \mathbf{t}) < \varepsilon$.

Como la órbita de $\mathbf{0}$, $o(\mathbf{0}, \tau)$, es densa en Σ_2 , existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\tau^l(\mathbf{0}), \mathbf{s}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Existe también un número natural $M > l$ tal que

$$d(\tau^M(\mathbf{0}), \mathbf{t}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por las observaciones hechas después del lema 13.6, de la primera desigualdad se sigue que

$$d(\tau^{l+(M-l)}(\mathbf{0}), \tau^{(M-l)}(\mathbf{s})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} d(\tau^{M-l}(\mathbf{s}), \mathbf{t}) &\leq \\ d(\tau^{(M-l)}(\mathbf{s}), \tau^{l+(M-l)}(\mathbf{0})) + d(\tau^{l+(M-l)}(\mathbf{0}), \mathbf{t}) &< \\ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

De este teorema obtenemos tres corolarios importantes.

Corolario 13.10. *La función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es transitiva en Σ_2 .*

Demostración. Sean U y V dos conjuntos abiertos no vacíos en Σ_2 . Sea $\mathbf{s} \in U$.

Como la órbita de \mathbf{s} , $o(\mathbf{s}, \tau)$, forma un conjunto denso en Σ_2 , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^m(\mathbf{s}) \in V$. Así $\tau^m(U) \cap V \neq \emptyset$. □

Corolario 13.11. *La función $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ no tiene órbitas periódicas ni preperiódicas.*

Demostración. Como todas las órbitas abjo la función τ son densas, ningún punto en el espacio Σ_2 tiene órbita finita. \square

Corolario 13.12. *Si $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, entonces el omega conjunto límite de \mathbf{s} bajo τ es todo el conjunto Σ_2 . Es decir, para todo $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ se cumple que $\omega(\mathbf{s}, \tau) = \Sigma_2$.*

Demostración. Sea $\mathbf{s} \in \Sigma_2$. Claramente $\omega(\mathbf{s}, \tau) \subset \Sigma_2$. Para ver que en realidad se cumple la igualdad, sea \mathbf{u} cualquier elemento de Σ_2 .

Como la órbita de \mathbf{s} es densa, para cualquier vecindad V de \mathbf{u} existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^m(\mathbf{s}) \in V$. Existe, entonces, una subsucesión de la órbita de \mathbf{s} convergente a \mathbf{u} . Por lo tanto, $\mathbf{u} \in \omega(\mathbf{s}, \tau)$. \square

Este último corolario convierte a la sumadora en un *sistema dinámico minimal*. Para una breve discusión de este concepto recomendamos al lector asomarse a la sección de *Comentarios* al final del capítulo.

13.4. El homeomorfismo que conjuga a G con τ

Ahora construiremos un homeomorfismo, distinto al dado en el capítulo 10, entre los conjuntos C y Σ_2 .

Primero, inductivamente le asignamos una notación a las componentes del conjunto C_n , $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, I_1 e I_0 denotarán, respectivamente, las componentes izquierda y derecha de C_1 , es decir

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \text{e} \quad I_0 = \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Obsérvese que esta asignación es distinta a la que hemos utilizado en capítulos previos.

Para $n \geq 2$, denotaremos cada componente de C_n con n índices,

$$I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}},$$

de acuerdo a la siguiente regla:

- $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \subset I_{s_0 s_1 \dots s_{n-2}} \subset C_{n-1}$.
- Si $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ está a la izquierda de $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-2}}$, entonces a los índices $s_0 s_1 \dots s_{n-2}$ les agregamos un 1; es decir, $s_{n-1} = 1$.

202 13.4. EL HOMEOMORFISMO QUE CONJUGA A G CON τ

- Si $I_{s_0s_1\dots s_{n-1}}$ está a la derecha de $I_{s_0s_1\dots s_{n-2}}$, a los índices $s_0s_1\dots s_{n-2}$ les agregamos un 0; es decir, $s_{n-1} = 0$.

Por ejemplo, para $n = 2$, I_{11} e I_{10} denotan, respectivamente, las componentes izquierda y derecha de C_2 contenidas en I_1 ; a su vez, I_{01} e I_{00} denotan las correspondientes componentes (izquierda y derecha) contenidas en I_0 . Para $n = 3$, las dos componentes de C_3 contenidas en I_{jk} del paso anterior son: I_{jk1} , a la izquierda, e I_{jk0} a la derecha. Y así sucesivamente.

Para cada $x \in C$ existe una única sucesión de componentes de los respectivos C_n , $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\{x\} = I_{s_0} \cap I_{s_0s_1} \cap I_{s_0s_1s_2} \cap \dots = \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0s_1\dots s_{n-1}}. \quad (13.2)$$

Por lo tanto, para cada $x \in C$ existe un único punto

$$\mathbf{s} = (s_0s_1s_2\dots s_n\dots)$$

en Σ_2 tal que sus coordenadas cumplen la igualdad (13.2).

Definición 13.13. Definimos $\varphi : C \rightarrow \Sigma_2$ asociándole a cada punto $x \in C$ el único elemento \mathbf{s} de Σ_2 que cumple (13.2).

Obviamente la función φ está bien definida. Algunos ejemplos de valores de esta función son:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= (111\dots) = (\bar{1}), & \varphi\left(\frac{1}{3}\right) &= (1100\dots) = (11\bar{0}), \\ \varphi(1) &= (000\dots) = (\bar{0}), & \varphi\left(\frac{2}{3}\right) &= (1011\dots) = (10\bar{1}), \\ \varphi\left(\frac{1}{3}\right) &= (100\dots) = (1\bar{0}), & \varphi\left(\frac{1}{6}\right) &= (0100\dots) = (01\bar{0}), \\ \varphi\left(\frac{2}{3}\right) &= (011\dots) = (0\bar{1}), & \varphi\left(\frac{5}{6}\right) &= (0011\dots) = (00\bar{1}). \end{aligned}$$

Proposición 13.14. La función $\varphi : C \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos primero que φ es biyectiva.

Es inmediato de la definición que φ es suprayectiva.

Mostrar que φ es inyectiva también es sencillo. Sean $x, y \in C$ con $\varphi(x) = \mathbf{s}$ y $\varphi(y) = \mathbf{t}$ donde $\mathbf{s} = (s_0s_1s_2\dots)$ y $\mathbf{t} = (t_0t_1t_2\dots)$.

Supongamos $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$. Como $s_i = t_i$ para todo $i \geq 0$, ello significa que para cada $n \in \mathbb{N}$, x y y están en la misma componente de C_{n+1} ,

$$I_{s_0s_1\dots s_n} = I_{t_0t_1\dots t_n}.$$

Como la intersección infinita

$$I_{s_0} \cap I_{s_0 s_1} \cap I_{s_0 s_1 s_2} \cap \cdots \cap I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} \cap \cdots$$

es sólo un punto, tenemos que $x = y$.

De la biyectividad se desprende que existe la función inversa

$$\varphi^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow C.$$

Ahora demostraremos que $\varphi : C \rightarrow \Sigma_2$ es continua.

Sean $x_0 \in C$ y $\varepsilon > 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$. Sea $y \in C$ tal que $|y - x_0| < \frac{1}{3^k}$.

Esto significa que y y x_0 están en la misma componente de C_{k+1} , digamos en $I_{s_0 s_1 \dots s_k}$. Entonces,

$$\varphi(y) = (s_0 s_1 \dots s_k a_1 a_2 \dots) \quad \text{y} \quad \varphi(x_0) = (s_0 s_1 \dots s_k b_1 b_2 \dots).$$

Por lo que

$$d(\varphi(y), \varphi(x_0)) \leq \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, φ es continua en x_0 .

Como C es compacto se sigue que $\varphi^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow C$ es continua, con lo que $\varphi : C \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo. \square

13.5. G restringida al conjunto de Cantor C

Como una manera de aproximarnos a la dinámica de G restringida al conjunto de Cantor C vamos a empezar por introducir cierta dinámica simbólica para explicar la dinámica de $g_n : I \rightarrow I$ restringida al conjunto C_n .

Sea $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo con el inciso (v) de la proposición 13.1, bajo g_n las órbitas de los puntos en la unión

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}$$

que no son periódicos, eventualmente abandonan este conjunto y caen en C_n para converger a la órbita atractora de periodo 2^n .

En consecuencia, basta con codificar la manera en la que g_n permuta cíclicamente a las componentes de C_n .

204 13.5. G RESTRINGIDA AL CONJUNTO DE CANTOR C

Con la notación introducida en (13.2), a

$$x \in I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \subset C_n,$$

le asignamos la n -ada: $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ (o sea, a todos los puntos en una misma componente se les asigna la misma n -ada). El problema es ¿qué n -ada le queda asignada a $g_n(x)$?

La manera en la que $g_n : I \rightarrow I$ permuta cíclicamente a las componentes de C_n está determinada por la manera en la que $g_{n-1} : I \rightarrow I$ hace lo propio con las del conjunto C_{n-1} .

Para darnos una idea de cómo ocurre esto empecemos desde el primer paso, es decir, con la función $g_1 : I \rightarrow I$.

Esta función simplemente permuta a las componentes izquierda y derecha de C_1 : I_1 por I_0 y viceversa.

En consecuencia, bajo g_2 cada componente de C_2 contenida en I_1 se permuta con una componente de C_2 contenida en I_0 y viceversa.

Como la gráfica de $g_2 : I \rightarrow I$ en I_0 es la recta $y = x - \frac{2}{3}$ (monótona creciente, paralela a la identidad), bajo g_2 las componentes de $C_2 \cap I_0$ preservan su orden; es decir, como I_{01} está a la izquierda de I_{00} , la imagen de I_{01} debe estar a la izquierda de la imagen de I_{00} . Por lo tanto,

$$g_2(I_{01}) = I_{11} \quad \text{y} \quad g_2(I_{00}) = I_{10}.$$

Viendo la gráfica de g_2 resulta evidente que la que está más a la izquierda de todas las componentes de C_2 , I_{11} , al aplicarle la función g_2 va a caer en la que está más a la derecha, que es I_{00} . Es decir, $g_2(I_{11}) = I_{00}$. Finalmente, $g_2(I_{10}) = I_{01}$.

Para los puntos de C_2 podemos resumir esquemáticamente esta dinámica de g_2 de la siguiente manera:

$$11 \rightarrow 00 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 11$$

Razonando en forma análoga, dejamos al lector comprobar que la dinámica de $g_3 : I \rightarrow I$ en el conjunto C_3 la podemos describir esquemáticamente como sigue (ver ejercicio 13.11):

$$111 \rightarrow 000 \rightarrow 100 \rightarrow 010 \rightarrow 110 \rightarrow 001 \rightarrow 101 \rightarrow 011 \rightarrow 111$$

Quizá el lector ya se dió cuenta que, en general, para $n \geq 3$, es válido lo siguiente:

- Bajo la función $g_n : I \rightarrow I$, cada componente de $C_n \cap I_0$ va a dar a una componente de $C_n \cap I_1$ y viceversa.
- La gráfica de g_n en I_0 es la recta $y = x - \frac{2}{3}$ (monótona creciente, paralela a la identidad) por lo que bajo g_n las componentes de $C_n \cap I_0$ se mueven hacia la izquierda y preservan su orden. Es decir, si una de tales componentes, J , está a la izquierda de otra, K , entonces $g_n(J)$ está a la izquierda de $g_n(K)$.

De aquí se deduce inmediatamente que si

$$I_{0s_1\dots s_{n-1}} \subset C_n \cap I_0,$$

entonces

$$g_n(I_{0s_1\dots s_{n-1}}) = I_{1s_1\dots s_{n-1}}.$$

Es decir, excepto por el primer índice, s_0 , que cambia de 0 a 1, el resto de los índices de la componente no se alteran. Esto resuelve por completo cuál es la dinámica de g_n restringida a $C_n \cap I_0$.

- La que está más a la izquierda de todas las componentes de C_n ,

$$I_{11\dots 1}, \quad \text{todos los índices son 1,}$$

bajo la acción de g_n va a caer en la que está más a la derecha, que es

$$I_{00\dots 0}, \quad \text{todos los índices son 0.}$$

- En todas las componentes de $C_n \cap I_1$, excepto en la primera, $I_{11\dots 1}$, la gráfica de la función g_n es una recta paralela a la recta identidad.
- Sólo falta establecer exactamente la dinámica de g_n restringida a las componentes de

$$(C_n \cap I_1) \setminus I_{11\dots 1}.$$

Para una de estas componentes es trivial, para la segunda:

$$I_{11\dots 10}, \quad s_{n-1} = 0, \text{ y todos los demás índices son 1.}$$

De la gráfica de g_n se comprueba que ésta va a dar a la penúltima:

$$I_{00\dots 01}, \quad s_{n-1} = 1, \text{ y todos los demás índices son 0.}$$

206 13.5. G RESTRINGIDA AL CONJUNTO DE CANTOR C

Esquemáticamente,

$$11 \dots 10 \rightarrow 00 \dots 01.$$

La característica, en este caso, de cambiar los sucesivos 1's iniciales por 0's y el último 0 por 1, nos da una cierta pauta: Si $n \geq 3$, las componentes en $C_n \cap I_{10}$,

$$I_{10s_2 \dots s_{n-1}},$$

van a componentes en $C_n \cap I_{01}$,

$$I_{01t_2 \dots t_{n-1}},$$

y, utilizando el inciso anterior, lo hacen preservando el orden en el sentido que se indicó antes; es decir, si una de esas componentes, J , está a la izquierda de otra, K , entonces $g_n(J)$ está a la izquierda de $g_n(K)$. En consecuencia, los índices

$$s_2, \dots, s_{n-1}$$

ya no se alteran al aplicar g_n . Es decir, $t_i = s_i$ si $2 \leq i \leq n-1$.

En resumen:

$$g_n(I_{10s_2 \dots s_{n-1}}) = I_{01s_2 \dots s_{n-1}}.$$

Esquemáticamente:

$$10s_2 \dots s_{n-1} \rightarrow 01s_2 \dots s_{n-1}.$$

Estas observaciones nos serán útiles en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 13.15. *La función $G : C \rightarrow C$ es conjugada con la función sumadora $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ mediante el homeomorfismo $\varphi : C \rightarrow \Sigma_2$.*

Es decir, para cada $x \in C$ se cumple que

$$\varphi(G(x)) = \tau(\varphi(x)).$$

Demostración. Sea $x \in C$ y consideremos la condición dada por (13.2).

Caso 1. Supongamos $x \in I_0 \cap C$.

Entonces $s_0 = 0$ y $\varphi(x) = (0s_1s_2\dots)$. Por lo tanto,

$$\tau(\varphi(x)) = (1s_1s_2\dots).$$

Por otro lado, la gráfica de G en I_0 es la recta $y = x - \frac{2}{3}$ (monótona creciente, paralela a la identidad) por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$, las componentes de $C_n \cap I_0$ preservan su orden bajo G . De aquí se deduce inmediatamente que si x está dada por (13.2), entonces

$$\{G(x)\} = \bigcap_{n \geq 0} I_{1s_1\dots s_{n-1}}.$$

Es decir, excepto por el primer índice, s_0 , que cambia de 0 a 1, el resto de los índices de las componentes no se alteran. Por lo tanto,

$$\varphi(G(x)) = (1s_1s_2\dots)$$

y obtenemos el resultado deseado.

Caso 2. Supongamos ahora que $x \in I_1 \cap C$.

Si $x = 0$ un simple cálculo comprueba el resultado.

Tomemos $x \in I_1 \cap C$ con $0 < x$. Entonces,

$$\varphi(x) = (s_0s_1s_2\dots)$$

con $s_0 = 1$.

Supongamos que n es el menor número natural tal que $s_{n-1} = 0$. Esto significa que $x \in I_{s_0s_1\dots s_{n-2}0} \cap C$, donde $s_i = 1$ para cada $0 \leq i \leq n-2$.

En consecuencia,

$$\varphi(x) = (11\dots 10s_ns_{n+1}\dots)$$

y

$$\tau(\varphi(x)) = (00\dots 01s_ns_{n+1}\dots).$$

Como $x \in I_{s_0s_1\dots s_{n-2}0} \cap C$ tenemos que $x \notin I_{s_0s_1\dots s_{n-2}1}$, con $s_i = 1$ para $0 \leq i \leq n-2$. O sea que $x \in [\frac{1}{3^n}, 1]$.

Dado que la función $G : I \rightarrow I$ coincide con $g_n : I \rightarrow I$ en el intervalo cerrado $[\frac{1}{3^n}, 1]$, tenemos que $G(x) = g_n(x)$.

Por las observaciones previas,

$$g_n(I_{s_0 s_1 \dots s_{n-2} 0}) = I_{t_0 t_1 \dots t_{n-2} 1},$$

donde $t_i = 0$ para $0 \leq i \leq n - 2$.

De ello se deduce que

$$\{G(x)\} = \bigcap_{k \geq n} I_{00 \dots 01 s_n \dots s_k},$$

por lo que

$$\varphi(G(x)) = (00 \dots 01 s_n s_{n+1} \dots).$$

□

En virtud de la conjugación dada en la proposición 13.15, la función G restringida al conjunto de Cantor C actúa como la sumadora τ en el espacio de dos símbolos Σ_2 . Así las propiedades dinámicas de ambas son idénticas.

En particular, por los corolarios 13.10, 13.11 y 13.12, la función $G : I \rightarrow I$ restringida a C es transitiva, no tiene puntos periódicos y $\omega(x, G) = C$ para todo $x \in C$.

Ejercicios

EJERCICIO 13.1. Demostrar el inciso (iii) de la proposición 13.3.

EJERCICIO 13.2. Úse la colección de funciones $\{g_n : I \rightarrow I\}$ para dar otra demostración de la parte (ii) del Teorema de Sharkovskii para los periodos 2^k del último renglón de la tabla TS (capítulo 3).

EJERCICIO 13.3. Demostrar que el punto $x_0 = 0$ no es punto periódico de la función $G : I \rightarrow I$.

EJERCICIO 13.4. Sea $I = [0, 1]$ y, para $k \geq 0$, sea $J_k = [1 - \frac{1}{3^k}, 1 - \frac{2}{3^{k+1}}]$. Sea $f_k : J_k \rightarrow J_k$ una función continua. Definimos $f : I \rightarrow I$ haciendo $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, $f(x) = f_k(x)$ si $x \in J_k$, y linealmente en lo demás. Demostrar que f tiene una órbita periódica de período $n > 1$ si y sólo si alguna f_k tiene una tal órbita. Construir ahora una $f : I \rightarrow I$ que sólo tenga puntos periódicos de período 2^j para todo $j \in \mathbb{N}$. Demostrar que, en este caso, $Per(f)$ es un conjunto cerrado.

EJERCICIO 13.5. Demostrar la segunda afirmación del inciso (ii) de la proposición 13.1: si $\frac{1}{3^n} \leq x \leq 1$, entonces $g_{n+k}(x) = g_n(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

EJERCICIO 13.6. Demostrar el inciso (v) de la proposición 13.1.

EJERCICIO 13.7. Probar que la función $G : I \rightarrow I$ es continua directamente de su definición.

EJERCICIO 13.8. Sea $\mathbf{s} \in \Sigma_2$. Comprobar que $(\mathbf{s} + \mathbf{1}) + \mathbf{1} = \mathbf{s} + (\mathbf{1} + \mathbf{1})$.

EJERCICIO 13.9. Sean $X = (X, d)$ un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función. Decimos que f es una *isometría* si para todo par de puntos $x, y \in X$ se tiene que

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Demostrar que con la métrica d dada en el texto al conjunto Σ_2 la función sumadora $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ no es una isometría.

EJERCICIO 13.10. Definimos otra métrica en el espacio Σ_2 como sigue.

Sean $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$,

- Si $\mathbf{s} = \mathbf{t}$, entonces $\rho(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = 0$.
- Si $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que \mathbf{s} y \mathbf{t} tienen las primeras k coordenadas iguales pero difieren en la coordenada $k + 1$. Es decir, $s_j = t_j$ para $0 \leq j \leq k - 1$ y $s_k \neq t_k$. En este caso,

$$\rho(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \frac{1}{2^k}.$$

(i) Demostrar que, en efecto, ρ es una métrica en Σ_2 .

(ii) Demostrar que con esta métrica la función sumadora $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ sí es una isometría.

EJERCICIO 13.11. Comprobar que la dinámica de la función g_3 en el conjunto C_3 se codifica como se indica en el texto.

EJERCICIO 13.12. ¿Cuál es el subconjunto de C que bajo la función $\varphi : C \rightarrow \Sigma_2$ va a dar a $B = \{n \cdot \mathbf{1} : n \in \mathbb{N}\}$? Es decir, ¿Cuál es $\varphi^{-1}(B)$?

EJERCICIO 13.13. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una isometría. Sea $x_0 \in X$. Demostrar que si la órbita de x_0 , $o(x_0, f)$, es un conjunto denso en X , entonces para todo punto $x \in X$ se tiene que $o(x, f)$ también forma un conjunto denso en X .

Comentarios

Esta es una muy breve nota sobre un importante concepto en dinámica discreta: el de *conjunto minimal*.

En un sistema dinámico $f : X \rightarrow X$, donde X es un espacio métrico y compacto y f es una función continua en X , un conjunto $A \subset X$ es *minimal* (bajo f) si A es no vacío, cerrado, invariante y tal que ningún subconjunto propio de A , no vacío y cerrado, es invariante bajo f .

Es decir, en A no hay otro conjunto cerrado *más pequeño* que también sea invariante.

En este caso también se dice que el sistema dinámico

$$f|_A : A \rightarrow A$$

es minimal.

Por ejemplo una órbita periódica es minimal. Y, más aún, un conjunto finito es minimal si y sólo si es una órbita periódica (ejercicio 13.14 (i)).

Los conjuntos minimales tienen una serie de características dinámicas de gran importancia; una de ellas es la siguiente:

Un conjunto $A \subset X$ es minimal si y sólo si $\omega(x, f) = A$ para todo punto $x \in A$. Ver ejercicio 13.14 (ii).

En estos términos el corolario 13.12 nos dice que la función sumadora, $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, es un sistema dinámico minimal. Como $G : I \rightarrow I$ restringida al conjunto de Cantor C es conjugada con la sumadora, dicho conjunto es minimal bajo G (ver ejercicio 13.15).

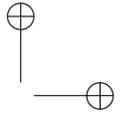
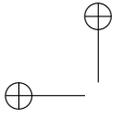
De hecho, en relación con la función G todavía podemos agregar un resultado más, cuya demostración dejamos también al lector interesado.

Proposición 13.16. *Sea $x \in I$. Si x no es un punto periódico ni preperiódico de la función $G : I \rightarrow I$ y*

$$x \in \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j,$$

entonces su omega conjunto límite, $\omega(x, G)$, es el conjunto de Cantor C .

Para mayor información sobre este tema recomendamos consultar el libro de Block L. S. y Coppel W. A., *Dynamics in One Dimension*, [8].



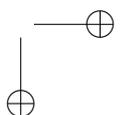
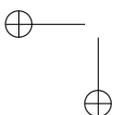
CAPÍTULO 13. UNA SUMADORA

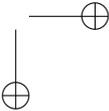
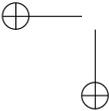
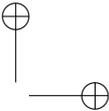
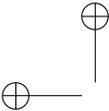
211

EJERCICIO 13.14. Sean $X = (X, d)$ un espacio métrico compacto, $f : X \rightarrow X$ una función continua y $A \subset X$ un conjunto, $A \neq \emptyset$. Demostrar:

- (i) A es minimal y finito si y sólo si A es una órbita periódica.
- (ii) A es minimal si y sólo si $A = \omega(x, f)$ para todo $x \in A$.

EJERCICIO 13.15. Demostrar que la propiedad de ser minimal se preserva bajo conjugaciones. Sean X y Y espacios métricos compactos. Sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ funciones continuas. Sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Sea Si $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ son conjugadas y $h : X \rightarrow Y$ es el homeomofismo que hace la conjugación, entonces A es minimal en X si y sólo si $h(A)$ es minimal en Y .





CAPÍTULO 14

Duplicación de periodo en la familia logística

Supongamos que tenemos una familia de funciones, $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que dependen continuamente de un parámetro λ , que varía en algún subconjunto de \mathbb{R} . En esta situación, el problema más importante que se presenta es el de descubrir los cambios cualitativos que se producen en la dinámica de las funciones conforme varía el parámetro; en particular, los cambios en la naturaleza del conjunto de puntos periódicos. En términos generales, cada uno de estos cambios cualitativos se llama una *bifurcación*.

Dada la diversidad de familias de funciones y de bifurcaciones, de lo que se trata es de detectar y caracterizar cuáles son, bajo condiciones específicas que surgen de modo natural, los principales tipos de bifurcaciones que se pueden producir, o por lo menos, los que en las familias más importantes son los más comunes.

El ejemplo paradigmático en funciones reales de variable real es la famosa *familia logística*,

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (14.1)$$

cuando el parámetro λ varía en el intervalo $[1, 4]$, o su no menos famosa hermana, la *familia cuadrática*,

$$g_c(x) = x^2 + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (14.2)$$

con c variando en el intervalo $[-2, \frac{1}{4}]$. Estas familias son conjugadas entre sí (ver ejercicio 14.2) por lo que referirse a una de ellas es referirse a ambas; nos concentraremos entonces en la primera, en la logística.

Se trata de un caso paradigmático por varias razones. Para empezar, cada una de las funciones $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio de grado 2, es decir su gráfica es una simple parábola, lo más sencillo después de una función lineal. Sin embargo, a pesar de su sencillez, conforme el parámetro crece en el intervalo mencionado, estas funciones alcanzan el más asombroso nivel de complejidad dinámica.

Para lograr este nivel de complejidad, primero tiene lugar una serie de bifurcaciones llamadas de *duplicación de periodo* que van haciendo que esta familia transite desde la dinámica más sencilla hasta el umbral de la dinámica más compleja. Ulteriormente, las funciones trascienden este umbral para adentrarse en el mundo del caos. Más aún, se ha demostrado que este tipo de *ruta* de bifurcaciones de duplicación de periodo es un recorrido obligatorio en lo esencial para una amplia variedad de familias que dependen de un parámetro y cuya dinámica evoluciona desde de lo simple a lo complejo.

Así, la familia logística es una especie de modelo, un instrumento para abrimos las puertas a la investigación del mundo de las bifurcaciones y de las dinámicas complicadas.

Cabe aclarar que las matemáticas que se requieren para demostrar algunos de los resultados con los que uno se topa en el estudio de la dinámica de la familia logística –y de las bifurcaciones en general– son muy sofisticadas y fuera del alcance de este texto.

Así que en realidad, el objetivo de este capítulo (y otros posteriores como son los capítulos 15 y 16) es, sobretodo, dar un panorama general, cualitativo, de los temas que se abordan. El lector puede concebirlo como *hacer un paseo o una caminata* con el fin de empezar a descubrir la dinámica de la familia logística y, también, de maravillarse de la misma.

Iniciaremos nuestro estudio con la descripción de la mencionada evolución de lo simple a lo complejo de la familia logística a través de bifurcaciones de duplicación de periodo.

Nos basaremos fuertemente en el análisis geométrico de las iteraciones de la función $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, en argumentaciones intuitivas y en conjeturas razonablemente fundadas. Para el lector interesado en profundizar recomendamos bibliografía adecuada.

Las gráficas de las funciones $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in [1, 4]$, son parábolas que abren hacia abajo y cruzan al eje X en los puntos $x = 0$ y $x = 1$. En consecuencia, su valor máximo lo alcanzan en su único punto crítico $x = \frac{1}{2}$.

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 215

Este valor es $f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4}$, y está entre $\frac{1}{4}$ y 1. Ver figura 14.1.

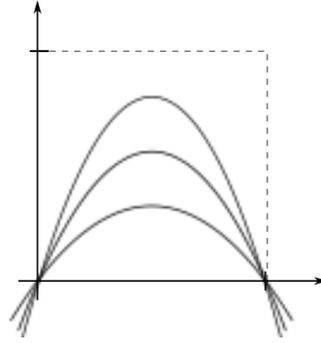


FIGURA 14.1: Elementos de la familia logística.

Para estos valores del parámetro se cumple que $f_\lambda([0, 1]) \subset [0, 1]$ (en particular, $f_\lambda([0, 1]) = [0, 1]$ sólo si $\lambda = 4$). Es decir, el intervalo $[0, 1]$ es invariante para todo $\lambda \in [1, 4]$ y, por lo tanto, las órbitas de todos los puntos $x \in [0, 1]$ permanecen en dicho intervalo.

Por otra parte es fácil comprobar que las órbitas de todos los puntos fuera de $[0, 1]$ tienden a menos infinito, por lo que la dinámica interesante habrá de concentrarse en el intervalo $[0, 1]$ (véase el ejercicio 14.5). Así que en lo que sigue nos centraremos sólo en examinar la dinámica de f_λ restringida al intervalo $[0, 1]$.

Resolviendo la ecuación $f_\lambda(x) = x$, obtenemos que los puntos fijos de la función $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ son

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x_\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

Si $\lambda = 1$, éstos se reducen a sólo uno: $x_\lambda = 0$. Si $1 < \lambda \leq 4$, entonces $0 < x_\lambda < 1$. Asimismo, como $f_\lambda(1) = 0$, el punto $x = 1$ es eventualmente fijo para todos los valores de λ .

Obsérvese que $f'_\lambda(0) = \lambda$ y por consiguiente, si $1 < \lambda \leq 4$, el origen es un punto fijo repulsor.

Si $\lambda = 1$ el origen es un punto fijo neutro, así que claramente ha habido un cambio cualitativo en la naturaleza de este punto fijo al pasar del valor $\lambda = 1$ a parámetros $\lambda > 1$.

216 14.1. LA PRIMERA BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERIODO

Este cambio cualitativo representa una bifurcación importante, pero no del tipo que nos interesa tratar por ahora, así que habremos de posponer el análisis de la misma hasta el capítulo 15.

14.1. La primera bifurcación de duplicación de periodo

Inspeccionando las gráficas es evidente que el punto fijo x_λ es atractor con $0 < f'_\lambda(x_\lambda) < 1$ para $\lambda > 1$ pero cercano a 1; que en $\lambda = 2$ este punto fijo coincide con el punto crítico de f_λ , $x_\lambda = \frac{1}{2}$, por lo que se vuelve superatractor; es decir, $f'_\lambda(x_\lambda) = 0$.

Y para λ ligeramente mayor que 2, x_λ se mantiene como atractor aunque su derivada es negativa, es decir, $-1 < f'_\lambda(x_\lambda) < 0$. (Ver figura 14.2).

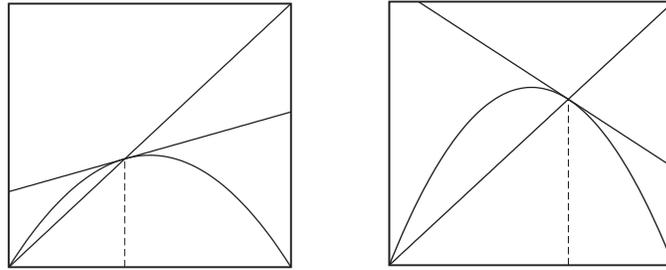


FIGURA 14.2: Punto fijo atractor cuando $1 < \lambda < 2$ y cuando $2 < \lambda < 3$.

O sea que para este rango de valores del parámetro el punto fijo se mantiene como atractor y lo único que cambia es la forma en que atrae a las órbitas de puntos cercanos (de hecho a todos los del intervalo $(0, 1)$). Para $\lambda \in (1, 2]$ la convergencia a x_λ es monótona, mientras que para λ ligeramente mayor que 2 la convergencia es en *espiral* (figura 14.3). Este cambio en la forma de la convergencia se produce justamente en $\lambda = 2$, cuando el punto fijo x_λ es el punto crítico de f_λ , $f'_\lambda(x_\lambda) = 0$.

Notemos también que si seguimos aumentando levemente el valor de λ , la derivada $f'_\lambda(x_\lambda)$ sigue decreciendo hasta ser menor que -1 . Consecuentemente, debe existir un cierto valor del parámetro, digamos λ_1 , para el

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 217

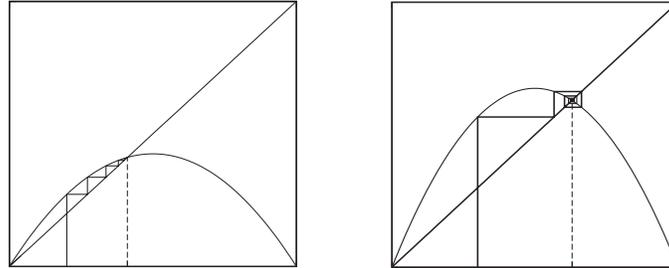


FIGURA 14.3: Dos tipos de convergencia a x_λ .

cual

$$f'_\lambda(x_\lambda) = -1, \quad \text{si } \lambda = \lambda_1, \quad \text{y } f'_\lambda(x_\lambda) < -1, \quad \text{si } \lambda_1 < \lambda.$$

Tentativamente, entonces, extraemos la siguiente conclusión inicial: Existe $\lambda_1 > 1$ de modo que x_λ es atractor si λ varía en el intervalo $(1, \lambda_1)$ y es repulsor si λ es mayor que λ_1 . Ha habido, pues, un cambio importante en la dinámica, una bifurcación, al cruzar el parámetro el valor λ_1 .

Afortunadamente, en este caso es muy fácil determinar exactamente el valor de λ_1 : Como $f'_\lambda(x_\lambda) = 2 - \lambda$, se sigue de inmediato que

$$|f'_\lambda(x_\lambda)| < 1 \quad \text{si y sólo si } 1 < \lambda < 3.$$

Por lo tanto, $\lambda_1 = 3$.

Del análisis gráfico se desprende que si $1 < \lambda < 3$, las órbitas de todos los puntos en el intervalo $[0, 1]$, a excepción de las de 0 y de 1, convergen al punto fijo atractor. Lo demostramos a continuación.

Proposición 14.1. *Para $1 < \lambda < 3$ el punto fijo x_λ es atractor. En este caso la cuenca de atracción de x_λ es todo el intervalo abierto $(0, 1)$. Para $\lambda > 3$ el punto fijo x_λ es repulsor.*

Demostración. La primera afirmación y la última las demostramos en el párrafo previo al enunciado. Para la segunda, dado que según el análisis gráfico la convergencia de las órbitas a x_λ es de una forma si $1 < \lambda \leq 2$, y de otra diferente si $2 < \lambda < 3$, analizamos estas dos situaciones por separado.

218 14.1. LA PRIMERA BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERIODO

Caso 1. Sea λ tal que $1 < \lambda \leq 2$.

En este caso se cumplen las siguientes condiciones:

- El punto fijo $x_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$ está en el intervalo $(0, \frac{1}{2}]$.
- Se tiene que $0 \leq f'_\lambda(x_\lambda) < 1$. Además $f'_\lambda(x_\lambda) = 0$ si $\lambda = 2$.
- La función f_λ es creciente en $[0, \frac{1}{2}]$. Como $f_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4} \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$f_\lambda \left(\left[0, \frac{1}{2} \right] \right) \subset \left[0, \frac{1}{2} \right].$$

- Para toda $x \in (0, \frac{1}{2}]$, la sucesión $o(x, f_\lambda)$ es monótona y acotada, por tanto convergente.
- Como f_λ sólo tiene dos puntos fijos, 0 y x_λ , y $f'_\lambda(0) = \lambda > 1$, entonces

$$\text{si } x \in (0, x_\lambda), \quad x < f_\lambda(x) < x_\lambda, \quad \text{y}$$

$$\text{si } x_\lambda < \frac{1}{2} \text{ y } x \in \left(x_\lambda, \frac{1}{2} \right], \quad x_\lambda < f_\lambda(x) < x.$$

Por lo tanto para toda $x \in (0, \frac{1}{2}]$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_\lambda)^n(x) = x_\lambda$.

- Si $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, $f_\lambda(x)$ está en $(0, \frac{1}{2})$, y su órbita converge también a x_λ .

Caso 2. Sea λ tal que $2 < \lambda < 3$.

Ahora se cumplen estas condiciones:

- El punto fijo $x_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$ está en el intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$.
- Se tiene que $-1 < f'_\lambda(x_\lambda) < 0$. Este hecho es el responsable de la forma en la cual, en el análisis gráfico, las órbitas convergen como en espiral al punto x_λ .
- Como la función f_λ es creciente en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y decreciente en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ y

$$f_\lambda \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{4} > f_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda,$$

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 219

entonces existe un único punto en $[0, \frac{1}{2}]$, que llamamos y_λ , tal que $f_\lambda(y_\lambda) = x_\lambda$. De hecho, $y_\lambda = \frac{1}{\lambda}$. Así tenemos que

$$y_\lambda < \frac{1}{2} < x_\lambda \quad \text{y} \quad f_\lambda(y_\lambda) = f_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda.$$

- Al aplicar la función f_λ obtenemos el siguiente *movimiento* de intervalos cerrados:

$$\left[\frac{1}{\lambda}, x_\lambda \right] \rightarrow \left[x_\lambda, \frac{\lambda}{4} \right] \rightarrow \left[f_\lambda \left(\frac{\lambda}{4} \right), x_\lambda \right].$$

- Sea $f_\lambda^2 = f_\lambda \circ f_\lambda$. Para el rango de los valores de λ que estamos considerando se tiene que

$$f_\lambda \left(\frac{\lambda}{4} \right) = \frac{\lambda^2}{16} (4 - \lambda) > \frac{1}{2}.$$

Ver ejercicio 14.1. De aquí se sigue que

$$f_\lambda^2([y_\lambda, x_\lambda]) \subset \left[\frac{1}{2}, x_\lambda \right].$$

Y, en particular, obtenemos que

$$f_\lambda^2 \left(\left[\frac{1}{2}, x_\lambda \right] \right) \subset \left[\frac{1}{2}, x_\lambda \right].$$

- Como f_λ^2 es creciente en el intervalo $[\frac{1}{2}, x_\lambda]$ y $\frac{1}{2} < f_\lambda^2(\frac{1}{2}) < x_\lambda$, entonces la órbita $o(\frac{1}{2}, f_\lambda^2)$ es monótona creciente. Sea x_0 el siguiente punto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_\lambda^2)^n \left(\frac{1}{2} \right) = x_0 \leq x_\lambda.$$

- Tres gráficas de la iteración f_λ^2 se presentan en la figura 14.4. La primera de ellas muestra el caso $2 < \lambda < 3$. Ahí se ve que en este rango de parámetros f_λ^2 sólo tiene dos puntos fijos. Éstos coinciden con los puntos fijos de f_λ . Ver también proposición 14.2. Como x_0 es un punto fijo de f_λ^2 , entonces $x_0 = x_\lambda$.

220 14.1. LA PRIMERA BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERIODO

- Como f_λ es continua, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_\lambda)^{2n+1} \left(\frac{1}{2} \right) = f_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda.$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_\lambda)^n \left(\frac{1}{2} \right) = x_\lambda$.

- Si $x \in [y_\lambda, x_\lambda]$, entonces $f_\lambda(x) \in [\frac{1}{2}, x_\lambda]$. Por lo tanto, $o(x, f_\lambda)$ converge también a x_λ .
- Para cada punto x en la unión $(0, y_\lambda) \cup (x_\lambda, 1)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(f_\lambda)^n(x) \in [\frac{1}{2}, x_\lambda]$. Todos estos puntos tiene órbitas convergentes al punto x_λ .

Así concluimos que, también en este caso, la cuenca de atracción de x_λ es todo el intervalo abierto $(0, 1)$. \square

Volvamos a la discusión de la bifurcación que se produce al cruzar el parámetro $\lambda = 3$.

Justo para $\lambda = 3$ se cumple que $f'_\lambda(x_\lambda) = -1$, por lo que x_λ es ahora un punto fijo neutro. Es factible comprobar que en este caso de todos modos las órbitas de todos los puntos en el abierto $(0, 1)$ convergen a x_λ .

Si $\lambda > 3$ se tiene que $f'_\lambda(x_\lambda) < -1$; es decir, el punto fijo x_λ se vuelve repulsor, tal como habíamos señalado.

Pero necesariamente hay más cambios porque, pensemos en lo siguiente: Para $\lambda > 3$ el origen es punto fijo repulsor y x_λ también lo es. En consecuencia, órbitas de puntos cercanos a 0 se alejan de éste y algo semejante ocurre con las órbitas de puntos cercanos a x_λ . Intuitivamente daría la impresión, entonces, que debe haber *algo* entre 0 y x_λ y también *algo* entre x_λ y 1, que atrae a las órbitas que salen repelidas de uno y otro lado.

En efecto, esto es así. La clave está en la segunda iteración de f_λ ,

$$f_\lambda^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f_\lambda^2 = f_\lambda \circ f_\lambda.$$

Como $f'_\lambda(x_\lambda) = -1$ para $\lambda = 3$, obtenemos que $(f_\lambda^2)'(x_\lambda) = 1$; es decir, para $\lambda = 3$ la gráfica de f_λ^2 se vuelve tangente a la recta identidad, $y = x$, en el punto fijo x_λ . Semejante situación es, por necesidad, inestable: cualquier pequeño cambio en el parámetro alrededor de $\lambda = 3$ destruye esta tangencia, así que es razonable imaginar que algo va a cambiar al mover el parámetro.

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 221

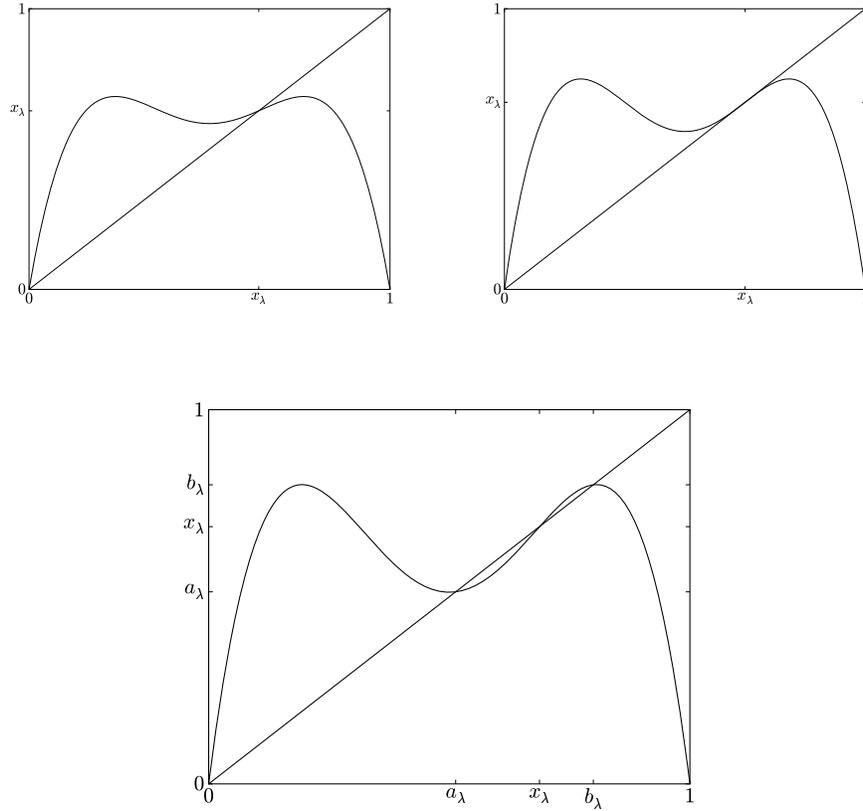


FIGURA 14.4: Gráficas de $f_\lambda^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ para $\lambda < 3$, $\lambda = 3$ y $\lambda > 3$.

En la figura 14.4 se muestran las gráficas de $f_\lambda^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ para $\lambda < 3$, $\lambda = 3$ y λ ligeramente mayor que 3.

Como puede apreciarse, para $\lambda < 3$, la gráfica de f_λ^2 cruza la recta identidad sólo en 0 y en x_λ . Es decir, f_λ^2 no tiene puntos fijos adicionales a los de f_λ , o lo que es lo mismo, no existen órbitas de periodo 2. Para $\lambda = 3$ esta situación se preserva, aunque la gráfica de f_λ^2 se vuelve tangente a la identidad en x_λ lo cual, como dijimos, es una situación inestable, o lo que es lo mismo, es el anuncio de un cambio inminente. Para λ ligeramente mayor que 3, aparecen dos nuevos puntos fijos de f_λ^2 : se trata de una órbita

222 14.1. LA PRIMERA BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERIODO

periódica de periodo 2 de f_λ que, claramente, es atractora.

En resumen, al cruzar el parámetro el valor $\lambda = 3$ se produce un cambio cualitativo en la dinámica, que contiene dos ingredientes:

- El punto fijo x_λ , que para $\lambda < 3$ era atractor, se vuelve repulsor para $\lambda > 3$ y, a su vez,
- nace una órbita de periodo 2 de f_λ que es atractora (al menos para valores del parámetro ligeramente mayores que 3).

Precisamente es esta nueva órbita atractora la que ahora atrae a las órbitas repelidas por los puntos fijos 0 y x_λ .

A este tipo de cambio cualitativo se le llama una *bifurcación de duplicación de periodo*.

Ya demostramos que, en efecto, esta bifurcación en $\lambda = 3$ tiene el primer ingrediente señalado. Demostraremos ahora que si $\lambda > 3$, nace una órbita de periodo 2. La demostración de que esta órbita es atractora la hacemos un poco más adelante.

Proposición 14.2. *Para $\lambda > 3$ nace una nueva órbita de periodo 2.*

Demostración. Los puntos de periodo 2 son raíces de la ecuación polinomial de grado 4,

$$f_\lambda^2(x) - x = 0.$$

Tras unos pocos cálculos tenemos que

$$f_\lambda^2(x) - x = -\lambda^3 x^4 + 2\lambda^3 x^3 - (\lambda^3 + \lambda^2) x^2 + (\lambda^2 - 1) x.$$

El problema de resolver $f_\lambda^2(x) - x = 0$ se puede reducir tomando en cuenta que los puntos fijos de $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ también son raíces de esta ecuación y que, por lo tanto, $f_\lambda(x) - x$ divide a $f_\lambda^2(x) - x$.

Efectuando la división, obtenemos

$$f_\lambda^2(x) - x = (f_\lambda(x) - x) \phi(x),$$

donde $\phi(x)$ es el polinomio de grado 2

$$\phi(x) = \lambda^2 x^2 - (\lambda^2 + \lambda) x + \lambda + 1.$$

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 223

Los puntos buscados de periodo 2 son las raíces de $\phi(x)$.

Usando la fórmula de costumbre (y haciendo algunas simplificaciones), estas raíces son

$$\frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda} \quad (14.3)$$

Nótese que el discriminante de (14.3) es no negativo sólo si

$$\lambda \leq -1 \quad \text{ó} \quad \lambda \geq 3.$$

Por lo tanto, existen soluciones reales para el rango de parámetros que nos interesa sólo si $\lambda \geq 3$.

En consecuencia, si $1 \leq \lambda < 3$, no existen puntos de periodo 2. Si $\lambda = 3$ sólo hay una raíz de $\phi(x)$ que es precisamente el punto fijo $x_\lambda = \frac{2}{3}$, por lo que aún no hay periodo 2 para f_λ ; y si $\lambda > 3$, ha aparecido una nueva órbita periódica de periodo 2. \square

¿Qué más sucede si $\lambda > \lambda_1 = 3$?

Sea $\{a_\lambda, b_\lambda\}$, con $a_\lambda < x_\lambda < b_\lambda$,

$$a_\lambda = \frac{\lambda + 1 - \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda},$$

$$b_\lambda = \frac{\lambda + 1 + \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}}{2\lambda},$$

la nueva órbita de periodo 2.

Por la regla de la cadena la derivada de f_λ^2 en ambos puntos periódicos coincide. Llamemos d_λ a este valor común; es decir,

$$d_\lambda = (f_\lambda^2)'(a_\lambda) = (f_\lambda^2)'(b_\lambda) = (f'_\lambda(a_\lambda))(f'_\lambda(b_\lambda)).$$

La naturaleza de $\{a_\lambda, b_\lambda\}$, como atractora, repulsora o neutra, depende de la evolución de d_λ al ir cambiando el parámetro. Geométricamente es clara esta evolución, como se muestra en las figuras 14.5 y 14.6.

A la izquierda en la figura 14.5, vemos la gráfica de la iteración f_λ^2 con λ un poco mayor que 3. En este caso d_λ es positivo y menor que 1. En la parte derecha de la figura 14.5 consideramos λ un poco mayor aún, y obtenemos $d_\lambda = 0$. En este momento $a_\lambda = \frac{1}{2}$.

Posteriormente, en la figura 14.6, d_λ es negativa, pero con valor absoluto menor que 1. O sea que para este rango de parámetros la órbita $\{a_\lambda, b_\lambda\}$

224 14.1. LA PRIMERA BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERIODO

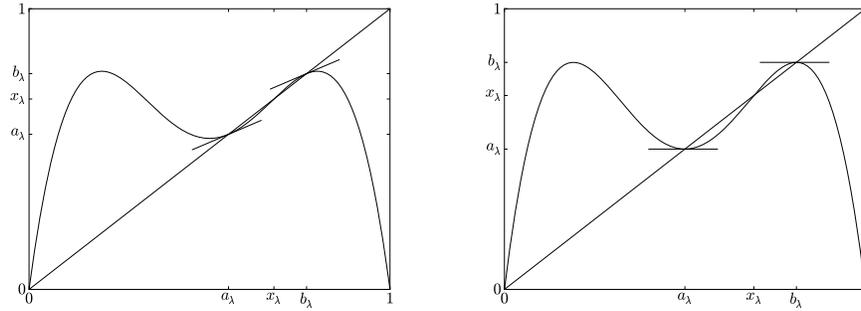


FIGURA 14.5: Variación del valor d_λ .

es atractora. Lo que cambia, al pasar de la figura 14.5 a la figura 14.6, es la forma de la convergencia a la nueva órbita atractora. De nuevo, este cambio se produce justo cuando $d_\lambda = 0$, es decir, cuando a_λ y b_λ son puntos críticos de $f_\lambda^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Es fácil comprobar que $d_\lambda = 0$ cuando

$$\lambda = \lambda_2^* = 1 + \sqrt{5} = 3.236 \dots$$

Ver ejercicio 14.7.

Ahora bien, en la figura 14.7 se tiene $d_\lambda < -1$ para cierto valor de λ , lo cual significa que la órbita $\{a_\lambda, b_\lambda\}$ es repulsora. Entonces, debe haber un parámetro λ_2 , $\lambda_1 < \lambda_2 < 4$, para el cual $d_{\lambda_2} = -1$ y $d_\lambda < -1$ para $\lambda > \lambda_2$.

De este hecho sacamos dos importantes conclusiones:

- Hay un intervalo de parámetros, (λ_1, λ_2) , en el cual, si $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, la órbita $\{a_\lambda, b_\lambda\}$ de periodo 2 es atractora.
- En el valor λ_2 se produce una nueva bifurcación según la cual, para empezar, $\{a_\lambda, b_\lambda\}$ cambia de atractora a repulsora.

Pues bien, ¡se trata de nuevo de una bifurcación de duplicación de periodo!

Intuitivamente podemos convencernos de ello de la manera siguiente.

Obsérvese, para empezar, que los puntos a_λ y b_λ nacen a uno y otro lado de x_λ ($a_\lambda < x_\lambda < b_\lambda$). Consecuentemente, cuando $\{a_\lambda, b_\lambda\}$ se vuelve

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 225

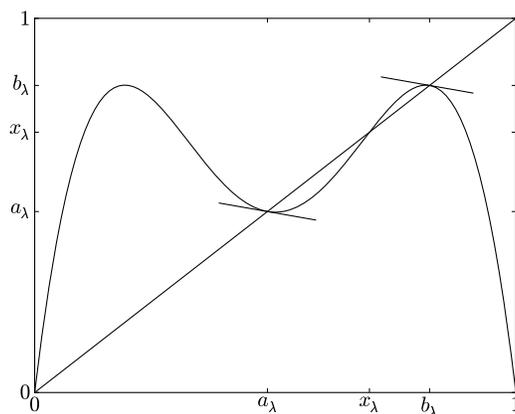


FIGURA 14.6: Aquí $-1 < d_\lambda < 0$.

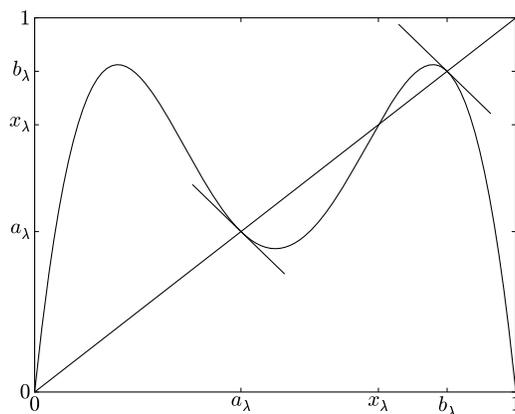


FIGURA 14.7: $d_\lambda < -1$.

repulsora para $\lambda > \lambda_2$, $a_\lambda < \frac{1}{2}$ y las órbitas de los puntos a la izquierda y a la derecha de cada uno de estos tres puntos periódicos de f_λ , x_λ , a_λ y b_λ , se ven repelidos en sentidos opuestos.

Ya hemos visto una situación parecida cuando el punto fijo de f_λ , x_λ , se volvió repulsor para $\lambda > 3$.

226 14.1. LA PRIMERA BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERIODO

Es bastante razonable conjeturar, entonces, que debe haber alguna órbita periódica atractora nueva, evidentemente de periodo 4, que atrae a las órbitas repelidas.

Recurramos a las gráficas de $f_\lambda^4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Veamos primero las figuras 14.8 y 14.9.

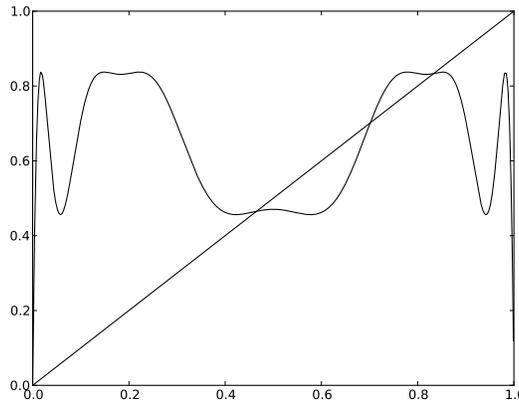


FIGURA 14.8: $f_\lambda^4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\lambda < \lambda_2$, no existe periodo 4.

Para $\lambda \leq \lambda_2$, la gráfica de f_λ^4 cruza la identidad sólo en los puntos fijos y en los de periodo 2; no existen órbitas de periodo 4 para f_λ .

Para $\lambda = \lambda_2$, el hecho $d_{\lambda_2} = -1$ implica que

$$(f_\lambda^4)'(a_{\lambda_2}) = (f_\lambda^4)'(b_{\lambda_2}) = 1,$$

lo cual significa que la gráfica de la cuarta iteración, $f_{\lambda_2}^4$, se vuelve tangente a la identidad en dos puntos, en a_{λ_2} y b_{λ_2} .

Para $\lambda = \lambda_2$ tampoco existe una órbita de periodo 4 de f_λ , pero existe una situación inestable. En consecuencia, para λ ligeramente mayor que λ_2 , a la vez que la órbita $\{a_\lambda, b_\lambda\}$ se vuelve repulsora, aparecen cuatro nuevos puntos fijos de f_λ^4 , dos de ellos alrededor de a_λ y los otros dos alrededor del punto b_λ . Se trata, desde luego, de una órbita de periodo 4 de f_λ que, claramente, es atractora. Ver figura 14.10.

La nueva órbita atractora de periodo 4 atrae a las órbitas repelidas por los puntos fijos y los puntos de periodo 2.

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 227

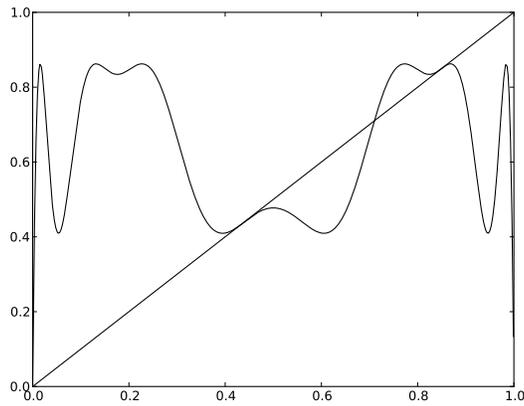


FIGURA 14.9: $f_\lambda^4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\lambda = \lambda_2$, situación inestable.

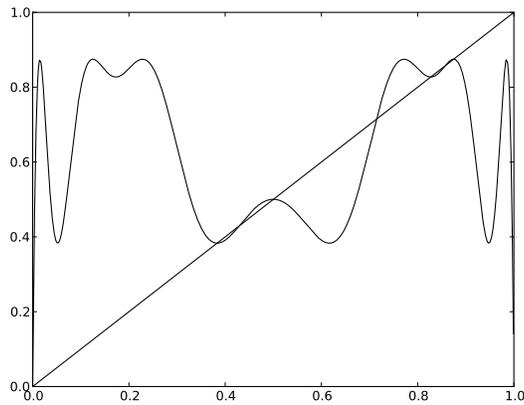


FIGURA 14.10: f_λ^4 , $\lambda > \lambda_2$, órbita atractora de periodo 4 de f_λ .

En suma, en λ_2 en efecto ha habido una nueva bifurcación de duplicación de periodo. ¡La historia se ha repetido!

Para futuras referencias conviene en este momento establecer una definición general de bifurcación de duplicación de periodo.

228 14.1. LA PRIMERA BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERIODO

Definición 14.3. La familia $\{f_\lambda\}$ tiene una bifurcación de duplicación de periodo en el parámetro $\lambda = \lambda^*$ si ocurre lo siguiente: Existen $\varepsilon > 0$ y una órbita periódica de f_λ , $o(c_\lambda, f_\lambda)$, digamos de periodo $k \geq 1$, tales que:

- Si $\lambda^* - \varepsilon < \lambda < \lambda^*$, entonces la órbita $o(c_\lambda, f_\lambda)$ es atractora.
- Si $\lambda = \lambda^*$, la órbita $o(c_\lambda, f_\lambda)$ es neutra con el valor de su *multiplicador* igual a -1 . Es decir, si $x \in o(c_\lambda, f_\lambda)$, entonces $(f_\lambda^k)'(x) = -1$. Esto significa que en los puntos de dicha órbita, la gráfica de f_λ^{2k} es tangente a la identidad.
- Para $\lambda^* < \lambda < \lambda^* + \varepsilon$, la órbita $o(c_\lambda, f_\lambda)$ es repulsora y existe una órbita nueva atractora de periodo $2k$ para f_λ .

Remarcamos que esta definición no establece condiciones suficientes para que tenga lugar una bifurcación de duplicación de periodo, puesto que no es un teorema. Sin embargo, sí se señala una condición necesaria: que en el parámetro $\lambda = \lambda^*$ el multiplicador de la órbita de periodo k sea -1 .

Para un teorema que implique la existencia de una bifurcación de duplicación de periodo consúltese [14].

Es evidente también que esta definición es aplicable en general a cualquier familia de funciones que dependa continuamente de un parámetro y no sólo a la logística.

Concluimos esta sección con la demostración faltante de que la órbita $\{a_\lambda, b_\lambda\}$ de periodo 2 de f_λ es atractora en el intervalo abierto (λ_1, λ_2) y la determinación explícita del valor del parámetro λ_2 .

Proposición 14.4. La órbita $\{a_\lambda, b_\lambda\}$ de periodo 2 es atractora en el intervalo abierto (λ_1, λ_2) y repulsora si $\lambda > \lambda_2$, donde

$$\lambda_1 = 3 \quad y \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.4495 \dots$$

Demostración. Nótese que

$$(f_\lambda)'(a_\lambda) = \lambda(1 - 2a_\lambda) = -1 + \sqrt{(\lambda - 1)(\lambda - 3)}$$

y, análogamente,

$$(f_\lambda)'(b_\lambda) = -1 - \sqrt{(\lambda - 1)(\lambda - 3)}.$$

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 229

Multiplicando estos dos números obtenemos el valor de d_λ ,

$$d_\lambda = 1 - (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Como función del parámetro λ , d_λ es una parábola que cruza al eje X en los puntos $1 \pm \sqrt{5}$, es positiva en el intervalo entre estos dos puntos y negativa fuera de éste.

Nos interesa el intervalo en el que $\{a_\lambda, b_\lambda\}$ es atractora (o neutra), es decir, en el que $|d_\lambda| \leq 1$.

Nótese que $d_\lambda = 1$ para $\lambda = 3$. Esto corresponde al hecho señalado previamente de que para $\lambda = 3$ no existen aún órbitas de periodo 2 y la gráfica de f_λ^2 es tangente a la recta identidad en x_λ .

Como en particular d_λ decrece para $\lambda \geq 3$, para resolver $|d_\lambda| \leq 1$ basta con determinar el parámetro positivo λ para el cual $d_\lambda = -1$; éste es el parámetro buscado $\lambda = \lambda_2$.

Resolviendo $d_\lambda = -1$, tenemos que

$$\lambda_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.4495 \dots$$

En consecuencia, $(3, 1 + \sqrt{6})$ es el intervalo en el que $|d_\lambda| < 1$ o, equivalentemente, en el que la órbita de periodo 2, $\{a_\lambda, b_\lambda\}$, es atractora.

Y si λ es mayor que λ_2 , dicha órbita es repulsora. □

14.2. Primera cascada infinita de duplicaciones de periodo

Al producirse la duplicación de periodo 2 a periodo 4, dijimos que la historia se había repetido. ¿A qué se debe esta *repetición de la historia*?

Evidentemente se debe a que, por así decirlo, actúa *el mismo mecanismo esencial* en ambos casos: en la duplicación de periodo 1 a 2 y en la de periodo 2 a periodo 4.

¡El lector ya habrá advertido las semejanzas tan fuertes que existen entre uno y otro caso!

Y el hecho es que la historia se repite y se repite, una y otra vez, infinitamente.

Es decir, si ahora seguimos la evolución de la cuarta iteración para $\lambda > \lambda_2$, aparece un parámetro $\lambda_3 > \lambda_2$ para el cual el multiplicador correspondiente a la órbita atractora de periodo 4 toma el valor -1 . Con ello,

230 14.2. PRIMERA CASCADA INFINITA DE DUPLICACIONES DE PERIODO

la octava iteración de f_λ se vuelve tangente a la identidad en los cuatro puntos de dicha órbita de periodo 4 y, cruzando λ_3 , esta órbita de periodo 4 se vuelve repulsora y aparece una nueva órbita atractora de periodo 8.

O sea que en λ_3 se produce, de nuevo, una bifurcación de duplicación de periodo, ahora cambiando de periodo 4 a periodo 8 (ver el ejercicio 14.6).

Con base en exactamente el mismo mecanismo, posteriormente se duplica de nuevo el periodo, volviéndose repulsora la órbita de periodo 8 y apareciendo una de periodo 16 atractora. Luego aparece periodo 32 atractor, luego 64, y así sucesivamente de manera infinita.

Se produce de este modo, lo que se llama *una cascada infinita de bifurcaciones de duplicación de periodo*.

Concretamente, se puede demostrar lo siguiente.

Teorema 14.5. *Existe una sucesión monótona creciente de parámetros $\{\lambda_j\}$, contenida en el intervalo $[1, 4]$, con*

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 3 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 3 + \sqrt{6},$$

que cumple lo siguiente:

- Para cada $j \geq 0$, si $\lambda \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$, entonces $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una órbita periódica atractora de periodo 2^j .
- En $\lambda = \lambda_{j+1}$ la derivada de la iteración $(f_\lambda)^{2^j} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ en los puntos de dicha órbita es -1 .
- Para $\lambda \in (\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2})$, la órbita antes atractora se convierte en repulsora y nace una nueva órbita atractora de periodo 2^{j+1} . Es decir, de acuerdo con la definición 14.3, en cada parámetro λ_j , $j \in \mathbb{N}$, se produce una bifurcación de duplicación de periodo.
- Si $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda_\infty$, entonces $\lambda_\infty < 4$.

La existencia de esta cascada infinita resuelve el problema de entender la dinámica de la familia logística para todos los parámetros λ en el intervalo $[1, \lambda_\infty)$. Aunque gradualmente se va complicando, la dinámica es relativamente sencilla: siempre existe un número finito de órbitas periódicas, cada una de ellas de periodo 2^j –con $0 \leq j \leq k$ para algún entero k –, y sólo una de ellas, la de periodo 2^k , es atractora.

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 231

Las demás órbitas, las de periodo 2^j , con $0 \leq j \leq k - 1$, son repulsoras.

Exceptuando las imágenes inversas de todos los órdenes de estas órbitas repulsoras, las órbitas de todos los puntos de $I = [0, 1]$ convergen a la órbita atractora de periodo 2^k .

O sea, la órbita de casi todos los puntos del intervalo I , es decir, todos excepto por un conjunto de medida (de Lebesgue) cero, converge a la órbita atractora de periodo 2^k .

Pero también, la existencia de esta cascada infinita plantea la cuestión de qué es lo que pasa cuando $\lambda = \lambda_\infty$, o sea, ¿cuál es la dinámica de la función f_{λ_∞} que constituye, digamos, la culminación de dicha cascada infinita?

Y naturalmente, ¿Qué es lo que pasa si $\lambda_\infty < \lambda < 4$?

Al menos para esta última pregunta –que en realidad resulta muy difícil de responder– tenemos una *pista* inmediata: ya sabemos que para $\lambda = 4$ la dinámica de $f_\lambda : I \rightarrow I$ es caótica en todo el intervalo $I = [0, 1]$. Resulta razonable, entonces, conjeturar que de alguna manera la dinámica de f_λ se va complicando para $\lambda_\infty < \lambda < 4$ hasta terminar siendo completamente caótica en $\lambda = 4$.

Por otra parte, como para $\lambda < \lambda_\infty$ la dinámica de $f_\lambda : I \rightarrow I$ es relativamente *simple*, también es razonable conjeturar que $f_{\lambda_\infty} : I \rightarrow I$ sea, de un modo bastante natural, una especie de frontera entre *dinámicas simples* y *dinámicas complejas*.

En la sección siguiente nos dedicaremos a buscar comprender, al menos en un terreno intuitivo, la dinámica de $f_{\lambda_\infty} : I \rightarrow I$.

El complicado problema de saber cuál es la dinámica de f_λ para λ en el intervalo $(\lambda_\infty, 4)$ lo tratamos (parcialmente) en el capítulo 16.

14.3. Una mirada mínima a la dinámica de f_{λ_∞}

Para empezar, $f_{\lambda_\infty} : I \rightarrow I$, $I = [0, 1]$, debe tener puntos periódicos de periodo 2^k para todo entero $k \geq 0$ y todos deben ser repulsores.

En efecto, recuérdese que al pasar el parámetro λ de un intervalo abierto $(\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2})$ al siguiente, las funciones f_λ heredan todas las órbitas repulsoras previas. Por lo que para f_{λ_∞} el resultado es que tiene todas las órbitas de periodo 2^k y todas ellas son repulsoras. De hecho se puede demostrar que conforme el parámetro aumenta, la familia logística va adquiriendo paulatinamente nuevos puntos periódicos y, una vez que los adquiere, ya no

desaparecen, ver [16].

Se puede probar también que éstos son todos los puntos periódicos de $f_{\lambda_\infty} : I \rightarrow I$. Es decir, la función f_{λ_∞} es otro ejemplo que sirve para demostrar la parte (iii) del Teorema de Sharkovskii.

Entonces, si todas las órbitas periódicas son repulsoras bajo f_{λ_∞} ¿a dónde van a dar las órbitas del resto de los puntos del intervalo?

La respuesta la proporciona el siguiente resultado.

Teorema 14.6. *Para $\lambda = \lambda_\infty$, existe un conjunto de Cantor contenido en el intervalo $I = [0, 1]$, llamémoslo A_∞ , que es invariante bajo $f_{\lambda_\infty} : I \rightarrow I$, no contiene puntos periódicos y todos los puntos no preperiódicos que están en su complemento, $I \setminus A_\infty$, convergen a A_∞ o eventualmente caen en este conjunto.*

Esbozaremos, de un modo breve, un esquema de lo que está ocurriendo dinámicamente con esta función, y que es la idea básica de la demostración de este teorema.

Como hemos dicho, el problema esencial es descubrir a dónde van a dar, bajo la función $f_{\lambda_\infty} : I \rightarrow I$, las órbitas no periódicas. Excluimos, de entrada, las órbitas preperiódicas, que son imágenes inversas de todos los órdenes de todas las órbitas periódicas (repulsoras de periodo 2^k , $k \in \mathbb{N}$).

La idea central es seguirle la pista al comportamiento de las órbitas bajo la iteración

$$(f_{\lambda_k})^{2^k} : I \rightarrow I$$

cuando λ_k tiende a λ_∞ .

Remontémonos al primer paso, es decir, a los parámetros para los que existe periodo 2 atractor. Las mencionadas órbitas bajo f_λ de todos los puntos que no son preperiódicos (de las órbitas periódicas de periodo 1), finalmente van a caer en dos intervalos, uno alrededor de cada atractor periódico de periodo 2; se trata de la cuenca inmediata de atracción de la órbita atractora.

Para los parámetros en los que existe periodo 4 atractor, las órbitas no preperiódicas (de las órbitas periódicas de periodos 1 y 2) van a caer a 4 intervalos que conforman la correspondiente cuenca inmediata de atracción. Simultáneamente, el punto fijo y la órbita de periodo 2, que ahora son repulsores, apoyan este tránsito hacia la cuenca inmediata de atracción expulsando las órbitas de todos los puntos de alrededor suyo.

CAPÍTULO 14. DUPLICACIÓN DE PERIODO EN LA FAMILIA LOGÍSTICA 233

Conforme el parámetro λ va creciendo y surge periodo 2^k atractor, las órbitas no preperiódicas (de todos los periodos $2^j < 2^k$), impulsadas por los puntos periódicos repulsivos, van a dar a 2^k intervalos abiertos, uno alrededor de cada punto de la órbita periódica atractor, cuya unión constituye la cuenca inmediata de atracción de esta órbita atractor.

En cada paso, dichas cuencas inmediatas de atracción excluyen a las órbitas periódicas repulsoras y a todas sus preimágenes, a la vez que va decreciendo la longitud de los intervalos que conforman a las mismas.

Se va prefigurando así, un proceso Cantoriano, que efectivamente desemboca, cuando $\lambda = \lambda_\infty$, en un conjunto de Cantor, $A_\infty \subset [0, 1]$, compuesto únicamente de puntos aperiódicos, que atrae al resto de las órbitas que no son preperiódicas y que excluye a todas las órbitas periódicas (repulsoras) y a las eventualmente periódicas.

Ya conocemos un ejemplo de un fenómeno semejante: la función $G : I \rightarrow I$ estudiada en el capítulo 13. Ahí demostramos que el conjunto de Cantor C es atractor bajo G , en el mismo sentido que A_∞ lo es bajo f_{λ_∞} . Demostramos también que restringida a C , G es conjugada con la sumadora en el espacio de dos símbolos, $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

¡Pues lo mismo ocurre con $f_{\lambda_\infty} : A_\infty \rightarrow A_\infty$!

Teorema 14.7. *Restringida al conjunto de Cantor A_∞ , la función f_{λ_∞} es conjugada con la sumadora $\tau : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.*

La demostración de este teorema requiere, en particular, de introducir dinámica simbólica de una manera semejante a como lo hicimos en el capítulo 13, aunque ahora hay que *codificar* la dinámica de un modo un poco distinto.

Ejercicios

EJERCICIO 14.1. La proposición 14.1 contiene varias afirmaciones. Ofrecer los detalles faltantes en las argumentaciones presentadas en el texto.

EJERCICIO 14.2. Demostrar que cada función en la familia logística (14.1), para $\lambda \in [1, 4]$, es afínmente conjugada con una única función en la familia cuadrática (14.2), con $c \in [-2, \frac{1}{4}]$. Determinar para cuales parámetros c aparecen las tres primeras bifurcaciones de duplicación de periodo en la familia (14.2).

234 14.3. UNA MIRADA MÍNIMA A LA DINÁMICA DE f_{λ_∞}

EJERCICIO 14.3. Describir la dinámica de la familia logística para $\lambda \in (0, 1)$. Describir también las bifurcaciones que tienen lugar, respectivamente, en $\lambda = 0$ y en $\lambda = 1$.

EJERCICIO 14.4. Analizar la dinámica de la familia logística para $\lambda < 0$. Hacer un breve ensayo con sus conclusiones.

EJERCICIO 14.5. Comprobar, utilizando análisis gráfico, que las órbitas bajo f_λ , con $1 \leq \lambda \leq 4$, de todos los puntos fuera de el intervalo $[0, 1]$ tienden a $-\infty$.

EJERCICIO 14.6. Explorando las gráfica de

$$(f_\lambda)^4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{y de} \quad (f_\lambda)^8 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

con ayuda de una computadora, verificar la duplicación de periodo 4 a periodo 8. Asimismo, determinar numéricamente en forma aproximada el parámetro λ_3 en el que ocurre esta bifurcación.

EJERCICIO 14.7. Comprobar que $d_\lambda = 0$ cuando $\lambda = \lambda_2^* = 1 + \sqrt{5} = 3,236\dots$

EJERCICIO 14.8. Considerar la familia

$$g_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_\lambda(x) = \lambda \arctan(x).$$

Analizar la dinámica de g_λ al variar el parámetro $\lambda \geq 0$.

CAPÍTULO 15

Nota sobre la bifurcación tangente

Otro tipo de bifurcación, distinta de la de duplicación de periodo, muy común en numerosas familias de funciones, incluida la logística, es la llamada *bifurcación tangente*. En este breve espacio nos dedicaremos a ilustrarla a través de unos sencillos pero importantes ejemplos.

15.1. Dinámica de la familia exponencial

La familia exponencial está dada por

$$E_\lambda(x) = \lambda e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \lambda > 0. \quad (15.1)$$

Para empezar, notemos que $E_\lambda(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como

$$E_\lambda(x) = \lambda e^x = e^x e^{\log(\lambda)} = e^{x+\log(\lambda)},$$

la gráfica de $E_\lambda(x)$ es la gráfica de la función exponencial, $f(x) = e^x$, recorrida hacia la derecha si $0 < \lambda < 1$, y recorrida hacia la izquierda si $1 < \lambda$.

De las gráficas correspondientes concluimos de inmediato lo siguiente: Para cierto rango de parámetros positivos (grandes), no hay puntos fijos. Uno de éstos parámetros es, obviamente, $\lambda = 1$.

Conforme λ decrece, existe un valor $\lambda = \lambda_0 > 0$ para el cual la gráfica de $E_\lambda(x)$ es tangente a la recta identidad en un único punto fijo neutro que denotamos por x_0 . Ver figura 15.1.

Para los valores

$$0 < \lambda < \lambda_0$$

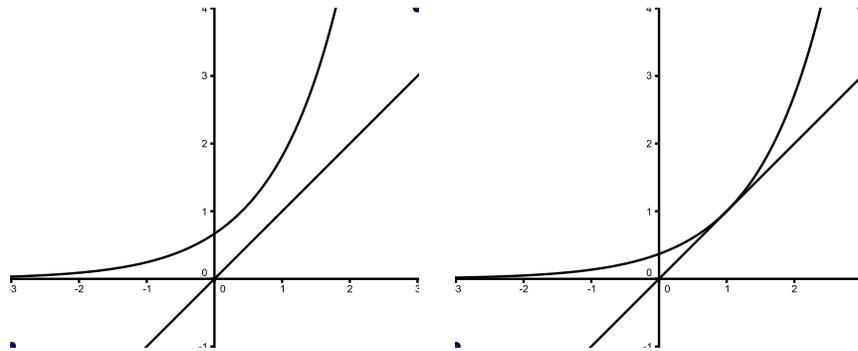


FIGURA 15.1: No existen puntos fijos, $\lambda > \frac{1}{e}$. Nace un punto fijo neutro, $\lambda = \frac{1}{e}$.

la gráfica de $E_\lambda(x)$ cruza dos veces la recta identidad: ahora hay dos puntos fijos, que llamaremos ξ_λ y x_λ ,

$$0 < \xi_\lambda < x_\lambda,$$

siendo ξ_λ atractor y x_λ repulsor. Ver figura 15.2

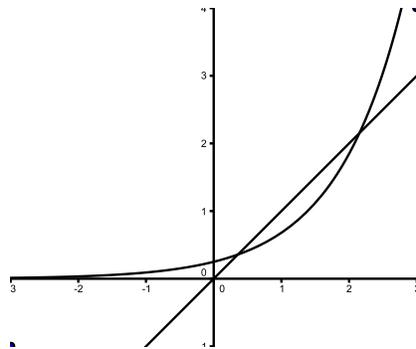


FIGURA 15.2: Un atractor y un repulsor, $0 < \lambda < \frac{1}{e}$.

En resumen, primero no existen puntos fijos; posteriormente, al cruzar el parámetro por un cierto valor $\lambda = \lambda_0$, nace un punto fijo neutro, que de inmediato, para $\lambda > \lambda_0$ se desdobra en dos nuevos puntos fijos, uno atractor y otro repulsor. A este tipo de bifurcación se le llama *bifurcación tangente*.

Tenemos la siguiente definición general.

Definición 15.1. Sean $A \subset \mathbb{R}$, un intervalo, y $k \in \mathbb{N}$.

Una familia de funciones continuas $\{g_\lambda : A \rightarrow A\}$, $\lambda \in B$, tiene una bifurcación tangente (de periodo k) en el parámetro $\lambda = \lambda^*$ si ocurre lo siguiente: existen $\varepsilon > 0$ y una órbita periódica de g_λ de periodo k , tales que:

- Si $\lambda^* - \varepsilon < \lambda < \lambda^*$, dicha órbita periódica no existe.
- Si $\lambda = \lambda^*$, la órbita de periodo k es neutra con el valor de su multiplicador igual a 1. Esto significa que en los puntos de dicha órbita, la gráfica de la iteración f_λ^k es tangente a la identidad.
- Para $\lambda^* < \lambda < \lambda^* + \varepsilon$, la anterior órbita neutra se ha desdoblado en dos, dando lugar a la existencia de dos órbitas periódicas de f_λ del mismo periodo k , una de ellas atractora y la otra repulsora.

A este tipo de bifurcación también se la conoce como *bifurcación sillanodo*, aunque este nombre resulta más claro en el contexto de dinámica de funciones de varias variables (ver, por ejemplo, [14]).

En el caso de la familia exponencial, analíticamente es fácil determinar el valor λ_0 y el del correspondiente punto fijo neutro x_0 : debe cumplirse que

$$E_{\lambda_0}(x_0) = \lambda_0 e^{x_0} = x_0 \quad \text{y} \quad E'_{\lambda_0}(x_0) = \lambda_0 e^{x_0} = 1.$$

De donde $x_0 = 1$ y $\lambda_0 = \frac{1}{e}$.

Obsérvese que este punto fijo neutro x_0 es atractor por la izquierda y repulsor por la derecha, atrayendo las órbitas de todo $x < x_0$ y haciendo tender a ∞ las de todo punto $x > x_0$. Ver ejercicio 15.1.

Por otra parte, para $\lambda > \lambda_0$ la cuenca de atracción del punto fijo atractor ξ_λ es el intervalo $(-\infty, x_\lambda)$, y si $x \in (x_\lambda, \infty)$ su órbita diverge a ∞ . Ver ejercicio 15.2.

15.2. La Familia cuadrática

Otra familia en la que ocurre una bifurcación tangente es en la cuadrática

$$g_c(x) = x^2 + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para $c > \frac{1}{4}$ no existen puntos fijos. Para $c = \frac{1}{4}$ la gráfica es tangente a la recta identidad, naciendo así un punto fijo. Para $c < \frac{1}{4}$, pero c cercano a

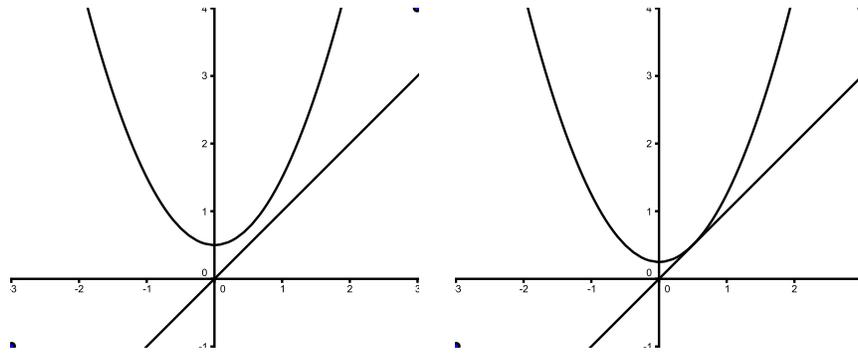


FIGURA 15.3: No hay puntos fijos, $c > \frac{1}{4}$. Un punto fijo neutro, $c = \frac{1}{4}$.

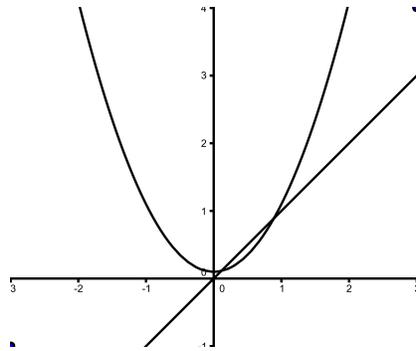


FIGURA 15.4: Dos puntos fijos, $c < \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4}$, aparecen dos puntos fijos, uno atractor y otro repulsor. Ver figuras 15.3 y 15.4, y el ejercicio 15.6.

Una diferencia entre las dos familias, exponencial y cuadrática, es que la dinámica de la primera es muy sencilla y la hemos determinado completamente para todo $\lambda > 0$: Sólo sufre una bifurcación tangente en $\lambda_0 = \frac{1}{e}$. En cambio la segunda, tras la bifurcación tangente en $c = \frac{1}{4}$, al continuar decreciendo el parámetro, su historia, por así decirlo, apenas comienza (véase el ejercicio ???.2 del capítulo ??).

Ejercicios

EJERCICIO 15.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \frac{1}{e}e^x$.

Demostrar lo siguiente:

- Para todo $x < 1$ se tiene que $x < f(x) < 1$. Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 1$.
- Para todo $x > 1$ se tiene que $x < f(x)$. Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty$.

EJERCICIO 15.2. Sean $0 < \lambda < 1$, $E_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $E_\lambda(x) = \lambda e^x$. Sean ξ_λ y x_λ los puntos fijos de E_λ descritos en el texto. Demostrar lo siguiente:

- $E_\lambda(1) < 1$. Concluir que $0 < \xi_\lambda < 1 < x_\lambda$.
- Para todo $\xi_\lambda < x < x_\lambda$ se tiene que $\xi_\lambda < E_\lambda(x) < x < x_\lambda$. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_\lambda)^n(x) = \xi_\lambda.$$

- Para todo $x < \xi_\lambda$ se tiene que $x < E_\lambda(x) < \xi_\lambda$. Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_\lambda)^n(x) = \xi_\lambda.$$

- Para todo $x > x_\lambda$ se tiene que $x < E_\lambda(x)$: Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_\lambda)^n(x) = \infty.$$

EJERCICIO 15.3. Considérese la familia exponencial dada por (15.1) pero ahora con $\lambda < 0$. Analizar qué tipo de bifurcación ocurre en $\lambda = -e$. *Sugerencia:* Hacer las correspondientes gráficas de $E_\lambda(x)$ y de la segunda iteración $(E_\lambda)^2(x)$.

EJERCICIO 15.4. Describir la bifurcación que tiene lugar en cada una de las siguientes familias en el parámetro indicado. Ilustrar con las gráficas correspondientes.

- $F_\lambda(x) = e^x + \lambda$, $\lambda = -1$.
- $G_\lambda(x) = 1 - \lambda x^2$, $\lambda = \frac{3}{4}$.
- $H_\lambda(x) = \lambda x^2 \sin(\pi x)$, $x \in [0, 1]$, λ aproximadamente igual a 1,7263.

EJERCICIO 15.5. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2 + \frac{1}{4}$. Demostrar lo siguiente:

- g tiene un solo punto fijo, $x_0 = \frac{1}{2}$.

- Para todo $\frac{1}{2} < x$ se tiene que $x < g(x)$. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = \infty.$$

- Para todo $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ se tiene que $x < g(x) < \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = \frac{1}{2}.$$

- Si $x < -\frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{2} < g(x)$.

EJERCICIO 15.6. Sea $g_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_c(x) = x^2 + c$.

Demostrar lo siguiente:

- Si $c < \frac{1}{4}$, g_c tiene exactamente dos puntos fijos, u_c y v_c , $u_c < v_c$.
- Para todo $c < \frac{1}{4}$, v_c es repulsor.
- Existe $c_0 < \frac{1}{4}$ tal que si $c_0 < c < \frac{1}{4}$, u_c es atractor; si $c < c_0$, u_c es repulsor.
- Dibujar las curvas

$$\alpha(c) = (c, u_c) \quad \text{y} \quad \beta(c) = (c, v_c), \quad c \leq \frac{1}{4}.$$

EJERCICIO 15.7. Considerar la familia de funciones

$$F_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\lambda(x) = \lambda + x + \cos(x).$$

- Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, F_λ es un homeomorfismo creciente.
- Demostrar que existen exactamente dos parámetros, λ_1 y λ_2 , $\lambda_1 < \lambda_2$, en los cuales esta familia pasa por una bifurcación tangente, en una vecindad del punto $x_0 = 0$.
- Describir la dinámica de F_λ en cada uno de los siguientes casos:

$$\lambda < \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_1, \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \quad \lambda = \lambda_2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 < \lambda.$$

EJERCICIO 15.8. Describir la bifurcación que tiene lugar en cada una de las siguientes familias de funciones en los parámetros indicados e ilustrar con las gráficas correspondientes.

- $\lambda x - x^3$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$.
- $\lambda \operatorname{sen}(x)$, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$.

CAPÍTULO 15. NOTA SOBRE LA BIFURCACIÓN TANGENTE 241

- $\lambda(e^x - 1)$, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$.

EJERCICIO 15.9. Con ayuda de una computadora compruebe, recurriendo a las gráficas correspondientes, que la tercera iteración de la familia logística,

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x),$$

sufre una bifurcación tangente al cruzar el parámetro el valor

$$\lambda = \omega_3 = 1 + \sqrt{8}.$$

Ver también la discusión de este ejemplo en la sección 16.3, página 254.

EJERCICIO 15.10.

- Describir la dinámica de la familia logística,

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x), \quad x \in \mathbb{R},$$

para $\lambda \in (0, 1)$.

- Describir la bifurcación que tiene lugar en $\lambda = 1$, al pasar de $\lambda < 1$ a $1 < \lambda < 3$.

EJERCICIO 15.11. Consideremos la *familia arcotangente*,

$$A_\lambda(x) = \lambda \arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

Describir la bifurcación que tiene lugar en $\lambda = 1$, al pasar de $\lambda < 1$ a $\lambda > 1$.

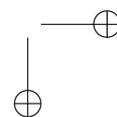
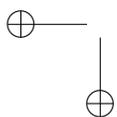
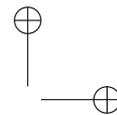
EJERCICIO 15.12. Note el lector que en los ejercicios 15.10 y 15.11, las respectivas bifurcaciones son distintas entre sí, y no corresponden a ninguna de las descritas en el texto. Es decir, no son de duplicación de periodo ni son tangentes.

La del ejercicio 15.10 se llama *bifurcación transcítica*.

La del ejercicio 15.11, *bifurcación del tenedor*, (pitchfork).

Instamos al lector a tratar de dar una definición general de cada una de ellas.

Aquí no abundamos en el tema dado que éstas, aunque importantes, no son tan *comunes* como las de duplicación de periodo o las tangentes, que aparecen frecuentemente en muy diversas familias.



CAPÍTULO 16

Diagrama de bifurcaciones familia logística

En este capítulo nos basaremos principalmente en trabajo experimental con la computadora; será una primera mirada a la zona de parámetros donde aparece la mayor complejidad de la familia logística,

$$f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x),$$

a veces llamada la *zona caótica*. Presentaremos también –sin demostración, proporcionando bibliografía adecuada– resultados relevantes sobre el comportamiento dinámico de elementos de la familia para parámetros en esta zona. Se sugiere fuertemente al lector acceda él mismo a una computadora con el software apropiado para desarrollar sus propios experimentos (en la bibliografía se sugieren algunos de éstos, ver [46]).

Utilizaremos libremente los resultados que hemos visto en los capítulos 14 y 15 en relación con dicha familia. También usaremos la misma notación.

Ya hemos reunido suficiente evidencia sobre la existencia de una secuencia infinita de bifurcaciones de duplicación de periodo en la familia logística conforme el parámetro λ aumenta su valor de 1 a $\lambda_\infty = 3,5699456\dots$

¿Cuál es la dinámica de la función $f_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ si continuamos aumentando el parámetro después de λ_∞ ?

Este capítulo está dedicado a hacer una breve investigación sobre este problema.

Ello lo haremos a través del *diagrama de bifurcaciones* de la familia logística (y veremos de paso que este tipo de diagramas se pueden extender al estudio de otras familias).

16.1. Obteniendo el diagrama

Este diagrama es un dibujo (hecho con computadora) en el cual se pueden observar ciertas características de la familia –por ejemplo, la existencia de órbitas periódicas atractoras– y que permite, en general, conjeturar razonablemente diversos comportamientos dinámicos de la misma.

Aunque aquí obtendremos el diagrama de bifurcaciones específicamente para la familia logística, el lector podrá apreciar que con el mismo procedimiento se puede obtener este tipo de diagramas para cualquier familia de funciones que depende de un parámetro (ver ejercicio 16.7).

Procedemos de la siguiente manera.

En el plano colocamos al intervalo de parámetros $[1, 4]$ en el *eje X*. La letra I representa el intervalo cerrado $[0, 1]$. Para cada $\lambda \in [1, 4]$ seleccionamos un valor inicial $x_0 \in I$ y, sobre la raya vertical

$$\{\lambda\} \times I = \{(\lambda, x) : x \in I\},$$

dibujamos los primeros N puntos de la órbita de este punto bajo la función $f_\lambda : I \rightarrow I$, donde N es algún entero que fijamos de antemano (por ejemplo, $N = 300$).

Como sólo nos interesa ver a dónde tiende la órbita del valor inicial escogido, podemos suprimir, digamos, las primeras m iteraciones, para algún número $m < N$, y dibujar sólo las restantes $N - m$. Por ejemplo, suprimimos las primeras 200 y dibujamos sólo las últimas 100.

Si escogemos $\lambda \in (1, 3)$, sabemos que para cualquier valor inicial que tomemos su órbita tenderá al punto fijo atractor

$$x_\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

y, en consecuencia, las iteraciones se acumularán en torno a éste. Entonces, lo que veremos en la computadora sobre el segmento $\{\lambda\} \times I$ será el punto $P_\lambda = (\lambda, x_\lambda)$. O sea, en esencia veremos al atractor.

Si repetimos nuestro experimento para algún $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6})$ lo que veremos en el segmento vertical correspondiente, serán dos puntos en torno a los cuales se acumula la órbita del valor inicial escogido, que en este caso corresponden a la órbita de periodo 2 atractora.

En la figura 16.1, en un primer experimento mostramos los lugares donde se acumulan las iteraciones de 6 valores iniciales distintos de λ . Los tres

CAPÍTULO 16. DIAGRAMA DE BIFURCACIONES, FAMILIA LOGÍSTICA 245

primeros (de izquierda a derecha) se acumulan en torno al punto fijo atractor $P_\lambda = (\lambda, x_\lambda)$ sobre $\{\lambda\} \times I$, y los dos siguientes en torno a la órbita de periodo 2 atractor (sobre las líneas verticales correspondientes).

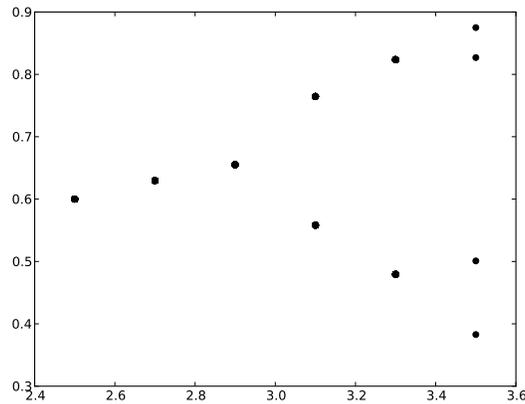


FIGURA 16.1: Acumulación de iteraciones en torno a $P_\lambda = (\lambda, x_\lambda)$ sobre $\{\lambda\} \times I$ para algunos $\lambda \in (1, 3)$, y en torno a la órbita de periodo 2 atractor para algunos $\lambda \in (3, 3 + \sqrt{6})$ (i.e. diagrama sólo con puntos aislados).

Lo más conveniente al dibujar la órbita $o(x_0, f_\lambda)$ para cualquier valor del parámetro λ es usar al punto crítico $x_0 = \frac{1}{2}$ como condición inicial. Esto es así en virtud de un importante teorema que nos asegura que si una función cumple ciertas condiciones, entonces, en la cuenca inmediata de atracción de toda órbita periódica atractor debe existir un punto crítico (véase el capítulo 1.11 en [14], o el capítulo 12 en [15]).

O sea que, en tales funciones, los puntos críticos *persiguen* a los atractores, y por lo mismo, dichos puntos detectan, por así decirlo, si existen o no órbitas periódicas atractoras. Los miembros de la familia logística reúnen las condiciones del teorema referido.

Una consecuencia muy interesante del resultado en cuestión es que el número de posibles órbitas atractoras está determinado por el número de puntos críticos que tenga la función: si ésta tiene dos puntos críticos, a lo más puede tener dos órbitas periódicas atractoras. En las funciones de familias como la logística, que sólo tienen un punto crítico, a lo más puede

haber una órbita periódica atractora para cada función $f_\lambda : I \rightarrow I$.

Continuemos. Seleccionando suficientes parámetros λ en el intervalo abierto $(1, 1 + \sqrt{6})$ y repitiendo el experimento para cada uno de ellos, obtenemos un primer diagrama como el que se muestra en la figura 16.2.

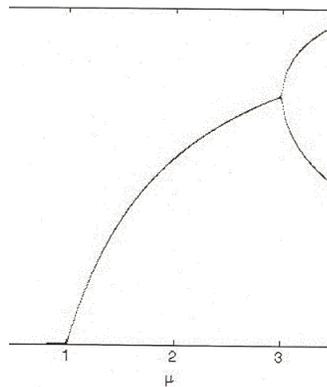


FIGURA 16.2: Diagrama inicial de bifurcaciones para $\lambda \in (1, 1 + \sqrt{6})$.

Ahí se observa claramente la existencia de la primera bifurcación de duplicación de periodo.

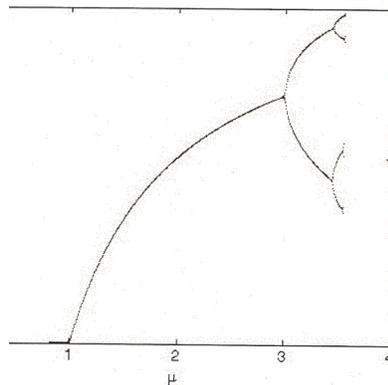


FIGURA 16.3: Diagrama después de dos bifurcaciones.

En la figura 16.3 extendemos este diagrama un poco más allá del valor $1 + \sqrt{6}$ para apreciar la segunda de estas bifurcaciones. Tras cada una de

CAPÍTULO 16. DIAGRAMA DE BIFURCACIONES, FAMILIA LOGÍSTICA 247

estas dos bifurcaciones la órbita de periodo 2^j , $j = 0, 1$, que previamente era atractora, sigue existiendo, sólo que ahora es repulsora y en consecuencia, se vuelve invisible para la computadora.

Si ahora seleccionamos parámetros en todo el intervalo $[1, 4]$, el diagrama completo de bifurcaciones aparece en la figura 16.4.

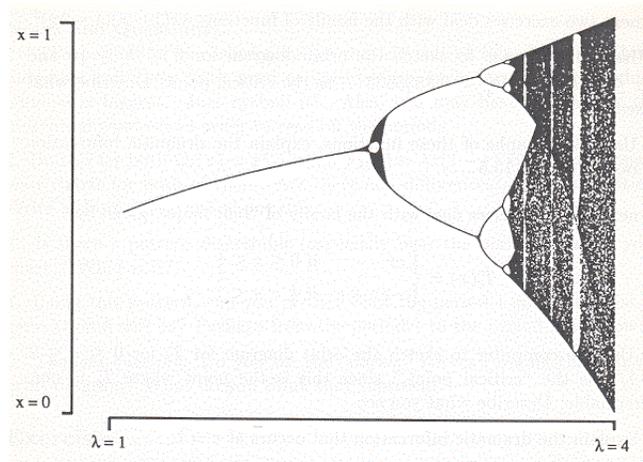


FIGURA 16.4: Primer diagrama de bifurcación completo.

He aquí el *retrato familiar*. Este diagrama encierra los secretos de la familia logística.

En la figura 16.5 hemos acortado el intervalo de parámetros con el fin de amplificar la imagen de la parte más interesante y mejorar nuestra apreciación del diagrama.

Sin duda esta figura es una de las más emblemáticas y populares del área de sistemas dinámicos discretos. Ha sido objeto de numerosas investigaciones alrededor del mundo. Su estudio es fascinante y sumamente instructivo. En lo que resta del capítulo nos dedicaremos a explorar este diagrama, a descubrir algunas de sus principales características.

Recomendamos al lector se tome su tiempo apreciando las figuras.

El régimen de bifurcaciones de duplicación de periodo discutido en el capítulo 14 se distingue al inicio del diagrama, especialmente en la figura 16.5. Las imágenes contenidas en la figura 16.6 destacan el impresionan-

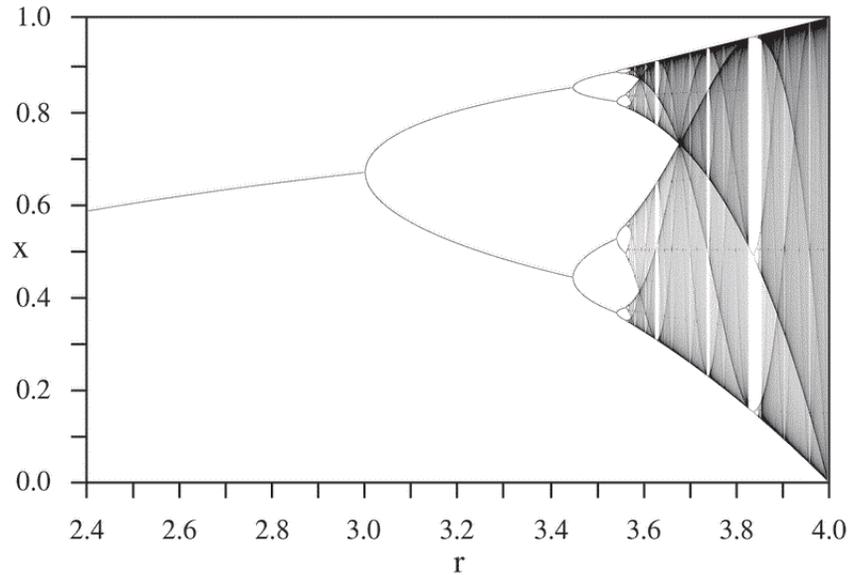


FIGURA 16.5: Diagrama cuando $\lambda \in [2.4, 4]$.

te fenómeno de autosemejanza que tiene el diagrama; obsérvese cómo, a diferentes escalas, parece reproducirse todo de nuevo.

En particular, esta autosemejanza parece indicar que el régimen de duplicaciones de periodo vuelve a producirse, a muchas otras escalas, en relación con otros parámetros. Más abajo veremos que en efecto esto es así.

En particular, esta autosemejanza parece indicar que el régimen de duplicaciones de periodo vuelve a producirse, a muchas otras escalas, en relación con otros parámetros. Más adelante veremos que en efecto esto es así.

A *grosso modo*, en el diagrama de bifurcaciones destacan dos grandes zonas: la primera, a la izquierda de λ_∞ , incluye, como dijimos, la (primera) cascada infinita de duplicaciones de periodo. Para los parámetros en esta zona conocemos la dinámica de las funciones correspondientes, regida por órbitas atractoras de periodo creciente de la forma 2^j .

La segunda gran zona, a la derecha de λ_∞ , corresponde a un régimen en el que la dinámica de los miembros de la familia es bastante compleja.

CAPÍTULO 16. DIAGRAMA DE BIFURCACIONES, FAMILIA LOGÍSTICA 249

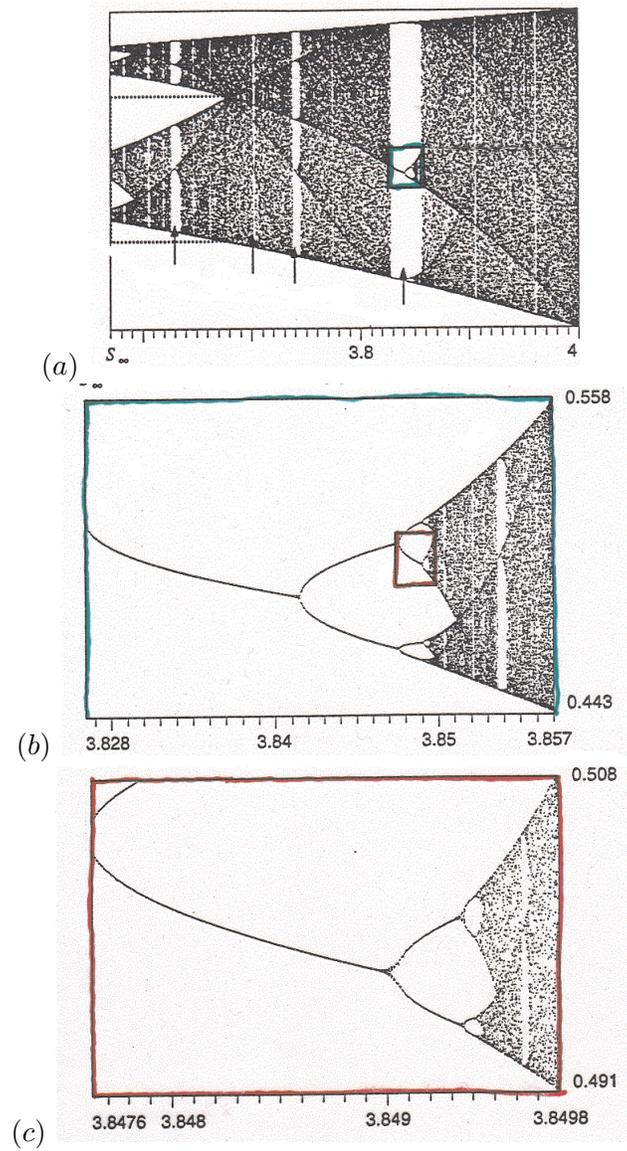


FIGURA 16.6: Diagrama ampliado y autosemejanza.

16.2. Una mirada a la zona caótica

Para $\lambda_\infty < \lambda < 4$ salta a la vista lo siguiente: la existencia de ciertos huecos, llamados *ventanas*, que interrumpen lo densamente poblado del diagrama.¹

Básicamente toda nuestra discusión en lo que resta del capítulo se centrará en intentar comprender qué son estas ventanas.

Se alcanzan a distinguir bastantes de estas ventanas, siendo la más visible la que está aproximadamente entre los valores 3,83 y 3,86 (figura 16.7).

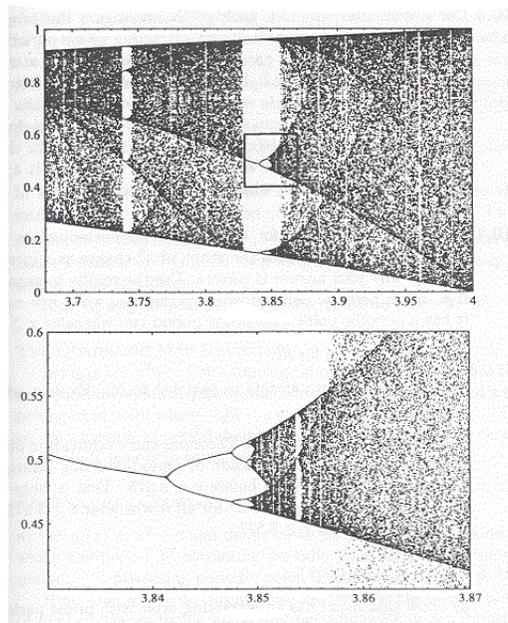


FIGURA 16.7: Ventana en la zona $3.83 \leq \lambda \leq 3.86$.

Para entender a qué corresponde este fenómeno, examinemos esta ven-

¹El término *ventana* fue introducido el siglo pasado en la década de los 70's por Robert M. May, uno de los más destacados pioneros del estudio de la familia logística. Su artículo *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, ver [29], es altamente recomendable.

CAPÍTULO 16. DIAGRAMA DE BIFURCACIONES, FAMILIA LOGÍSTICA 251

tana más visible.

Mirando con atención la primera imagen de la figura 16.7, se aprecia que no es un *hueco*, sino que existen tres líneas que van de un extremo a otro de esta ventana. Se trata de la existencia de una órbita atractora de periodo 3 para este rango de parámetros.

Nótese que además de la aparición de la órbita atractora de periodo 3, la *autosemejanza* del diagrama se nota fuertemente, es decir, hay tres lugares en esta zona –arriba, en medio y abajo– donde el diagrama parece reproducirse a escala de nuevo. Una de las ampliaciones en la figura 16.7 corresponde a uno de estos lugares.

¿Qué significa esta situación de autosemejanza?

Significa que tras la aparición de periodo 3 atractor, empieza una cascada de duplicaciones periodo: a partir de un cierto parámetro μ_1 , la órbita atractora de periodo 3 se vuelve repulsora (por lo que deja de verse en el diagrama) y aparece una órbita atractora de periodo $6 = 2 \cdot 3$; es decir, en μ_1 se produce una bifurcación de duplicación de periodo.

Luego, en cierto parámetro $\mu_2 > \mu_1$ se produce otra bifurcación del mismo tipo, resultado de lo cual aparece una órbita atractora de periodo $2^2 \cdot 3$. Y así, sucesivamente van apareciendo parámetros $\mu_k > \mu_{k-1}$ en los que se producen bifurcaciones de duplicación de periodo y por lo tanto, aparecen nuevas órbitas atractoras de periodo $2^k \cdot 3$.

Todo el intervalo (abierto) que comprende desde que aparece periodo 3 atractor hasta que *culmina* toda la secuencia infinita de bifurcaciones de duplicación, se llama *ventana de periodo 3*.

La existencia notoria de *huecos* parecidos a esta ventana en el diagrama, significa que hay muchas otras ventanas semejantes relacionadas con la aparición de órbitas atractoras de otros periodos.

Precisemos el término *ventana*.

Definición 16.1. Una ventana de periodo k es un intervalo $(\mu_0, \mu_\infty) \subset [1, 4]$ en el cual se produce una cascada infinita de bifurcaciones de duplicación de periodo a partir de una órbita periódica atractora de periodo k .

Es decir, en una ventana de periodo k , en el intervalo inicial, (μ_0, μ_1) , existe una órbita atractora de periodo k . A partir de aquí se desarrollan las subsecuentes bifurcaciones de duplicación de periodo en los correspondientes parámetros μ_j , $j \in \mathbb{N}$. Los parámetros $\{\mu_j\}$ son una sucesión monótona creciente contenida en (μ_0, μ_∞) .

El parámetro μ_∞ que representa la culminación de la cascada de duplicaciones, está dado por

$$\mu_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$$

y juega un papel semejante al de λ_∞ en la primera cascada.

En el capítulo 14 analizamos la primera cascada, que se produce –de acuerdo con la notación ahí introducida– en la sucesión de parámetros

$$\{\lambda_j\} \subset [1, \lambda_\infty], \quad \text{con } \lambda_1 = 3 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 3 + \sqrt{6}.$$

Regresemos a la ventana de periodo 3.

Se puede demostrar que una órbita de periodo 3 aparece por primera vez en la familia logística en el parámetro

$$\mu_0 = \alpha = 1 + \sqrt{8} = 3,82843\dots$$

Viniendo de izquierda a derecha con $\lambda > \lambda_\infty$, en el valor α empieza la primera zona de parámetros para la cual las correspondientes funciones $f_\lambda : I \rightarrow I$ poseen una órbita periódica de periodo 3. Inicia aquí la ventana de periodo 3 (volvemos sobre este punto más adelante).

Obtener el valor de α de manera directa implica resolver la ecuación polinomial de grado 8,

$$f_\lambda^3(x) = x,$$

lo cual puede ser poco viable. En B. Hassalblatt, A. Katok, *A first course in Dynamics*, secc. 11.2, ver [22], se menciona una manera alternativa de obtener el valor de α , recurriendo a la conjugación de la familia logística con la familia cuadrática.

Evidentemente, haciendo ampliaciones apropiadas del diagrama y acortando paulatinamente el intervalo en torno al cual *parece* que empieza a existir periodo 3, se puede obtener una aproximación numérica al valor de α (ver ejercicio 16.5).

Con α en nuestro poder, podemos comprobar experimentalmente la existencia de esta ventana de periodo 3 recurriendo a las gráficas de la tercera iteración de $f_\lambda : I \rightarrow I$, f_λ^3 . Para parámetros ligeramente mayores que α , es claro que existe una órbita atractora de periodo 3 (y una repulsora). En un determinado momento, el multiplicador de la órbita atractora de periodo 3

CAPÍTULO 16. DIAGRAMA DE BIFURCACIONES, FAMILIA LOGÍSTICA 253

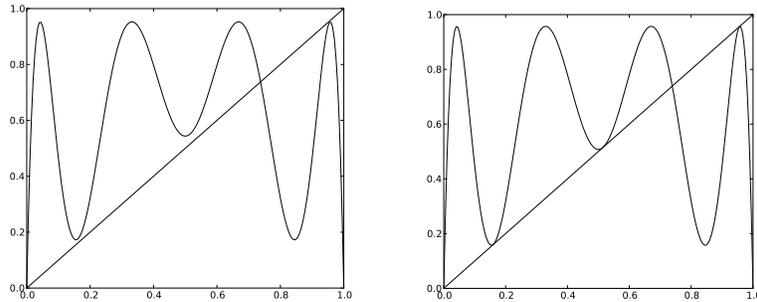


FIGURA 16.8: Gráficas de la tercera iteración f_λ^3 , para $\lambda \leq \alpha$.

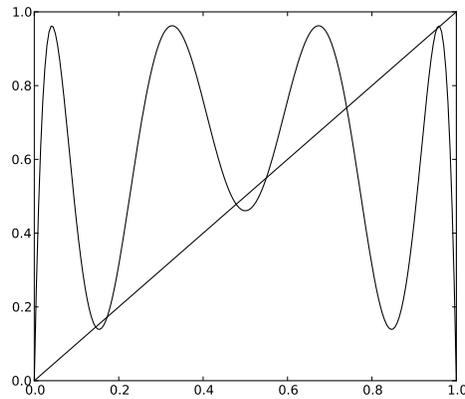


FIGURA 16.9: Aparecen dos órbitas de periodo 3.

se vuelve negativo y eventualmente adquiere el valor -1 , tras lo cual necesariamente aparece periodo $3 \cdot 2 = 6$ atractor. Compárense las figuras 16.8 y 16.9

Ya conocemos este fenómeno, se trata de una bifurcación de duplicación de periodo, sólo que ahora a partir del periodo original 3. Posteriormente el periodo 6 se desdobra y aparece periodo 12 y así sucesivamente.

Estos hechos se notan en el diagrama de bifurcaciones.

Nuevamente exhortamos al lector a explorar por sí mismo tanto las gráfi-

254 16.3. ¿CÓMO APARECIÓ LA VENTANA DE PERIODO 3?

cas de f_λ^3 como este diagrama, con ayuda de algún software apropiado.

Se observan otras ventanas a la izquierda y a la derecha de la de periodo 3; desde luego corresponden a un fenómeno totalmente análogo: aparece una órbita atractora de cierto periodo k y, eventualmente, la subsecuente cascada infinita de duplicaciones de periodo que produce órbitas atractoras de periodos $2^j \cdot k$, $j \in \mathbb{N}$.

En la figura 16.10, al final del capítulo, se pueden observar algunas de las ventanas más visibles, que corresponden, respectivamente (de izquierda a derecha), a la aparición de órbitas atractoras de periodos 6, 5 y 3 y sus subsecuentes cascadas de duplicaciones. Amplificando repetidamente porciones apropiadas del diagrama, es posible localizar unas cuantas ventanas más. Para la localización de algunas de éstas, véase el ejercicio 16.8.

16.3. ¿Cómo apareció la ventana de periodo 3?

Es natural preguntarnos cómo aparecieron las ventanas, qué las produjo. Nuevamente nos concentraremos en la ventana de periodo 3.

Proposición 16.2. *La aparición de una órbita de periodo 3 por primera vez en esta familia es producto de una bifurcación tangente.*

No haremos una demostración formal, pero nos podemos convencer de la justeza de esta proposición inspeccionando nuevamente las gráficas de la tercera iteración.

Para $\lambda < \alpha$ la gráfica de f_λ^3 cruza la recta $y = x$ sólo en el origen y en (x_λ, x_λ) que corresponde al punto fijo de f_λ ; por tal razón, aún no existe una órbita atractora de periodo 3 para f_λ , ver figura 16.8.

Para $\lambda = \alpha$ dicha gráfica es tangente a la identidad en tres puntos distintos a los puntos fijos mencionados. En otras palabras, para este valor del parámetro aparece por primera vez una órbita de periodo 3 para f_λ y ésta es neutra (el multiplicador de la órbita es +1).

Esta tangencia es *inestable*; desaparecerá.

Para valores de λ ligeramente mayores que α la órbita neutra se ha desdoblado y aparecen dos órbitas de periodo 3, una atractora y otra repulsora. Ver figura 16.9.

Conclusión: en $\lambda = \alpha$ se produjo una bifurcación tangente.

16.4. La abundancia de ventanas

También en forma natural, surge la pregunta de si existe una infinidad de ventanas, y si éstas están diseminadas por todas partes a lo largo de todo el intervalo de parámetros, o se concentran sólo en algunos lugares.

La pregunta probó ser muy difícil de contestar y rebasa, por mucho, las posibilidades de la experimentación numérica. Sin embargo, hacia mediados de la década de los 90's del siglo pasado se llegó al siguiente asombroso resultado, que presentamos sin demostración (ver [20]).

Teorema 16.3. *Existen una infinidad de ventanas. El conjunto formado por la unión de todas ellas es abierto y denso en el intervalo $[1, 4]$.*

La densidad de éstas significa que dado cualquier intervalo $J \subset (1, 4)$, por muy pequeño que sea, existe una ventana de algún periodo cuya intersección con J es distinta del vacío.

Que el conjunto de ventanas es abierto se sigue de que cada una de ellas, de acuerdo a la definición dada, es un intervalo abierto.

Lo verdaderamente asombroso, es la densidad de estas ventanas: ¡las hay por todas partes!

La primer ventana estudiada, la más visible y sin duda la que sirvió de modelo para comprender las demás es la de periodo 1, que abarca el intervalo $(1, \lambda_\infty)$. La infinidad restante está contenida en el intervalo $(\lambda_\infty, 4)$ por lo que las respectivas longitudes decrecen muy drásticamente a cero conforme el periodo aumenta, y se vuelve prácticamente imposible verlas.

O sea que sin duda alguna, la experimentación, la intuición, el argumento empírico, son indispensables para formarnos una idea razonable de lo que ocurre; en este capítulo nos estamos beneficiando de todo ello.

Pero llega un momento que se requiere de la demostración matemática, de la construcción teórica, para la comprensión cabal de un fenómeno cualquiera. El teorema 16.3 es un ejemplo de esto; es imposible de comprobar experimentando en el diagrama de bifurcaciones (aunque nos puede dar mucha certeza llevar a cabo tal experimentación) y sin embargo, nos arroja mucha luz sobre el diagrama y la majestuosidad dinámica de la familia logística.

16.5. La complejidad de la dinámica en las ventanas

Por otra parte, la densidad de estas ventanas en el intervalo $(\lambda_\infty, 4]$ pareciera hablar más bien del predominio de dinámicas simples, regidas por una órbita periódica atractora. La realidad es que para una infinidad de parámetros λ en estas ventanas, coexisten este tipo de dinámica simple con una dinámica caótica en algún subconjunto del intervalo, necesariamente ajeno a la cuenca de atracción de la órbita periódica atractora.

Veamos.

Sabemos que si λ está en la ventana de periodo 1, es decir, $\lambda \in (1, \lambda_\infty)$, entonces la función $f_\lambda : I \rightarrow I$ sólo tiene un número finito de órbitas periódicas, una de ellas atractora, y el complemento de la cuenca de atracción de la órbita atractora es un conjunto numerable (o finito, si $1 < \lambda < 2$), compuesto de las restantes órbitas periódicas y de las imágenes inversas de todos los órdenes de dichas órbitas periódicas, es decir, de las órbitas preperiódicas (excepto, claro, las preperiódicas que caen en el atractor).

Pero si $\lambda \in (\lambda_\infty, 4)$ la situación es completamente distinta.

Tomemos por ejemplo la existencia de la órbita atractora de periodo 3. Como señalamos, esto ocurre para f_λ con $\lambda \in (\alpha, \mu_1)$, siendo $\alpha = 1 + \sqrt{8}$ y μ_1 el parámetro donde aparece la primera duplicación de periodo.

De acuerdo con el Teorema de Sharkovskii, estas funciones $f_\lambda : I \rightarrow I$ tienen órbitas periódicas de todos los periodos.

¿En dónde está toda esta infinidad de órbitas periódicas?

Obviamente no pueden estar en la cuenca de atracción de la órbita atractora de periodo 3 (y en dicha cuenca tampoco pueden estar los puntos preperiódicos, excepto los que van a caer a la órbita atractora de periodo 3).

Por el momento llamemos B a esta cuenca de atracción.

Es un hecho que B es un conjunto abierto, pero se puede decir aún más: B es un conjunto denso en el intervalo I .

Entonces, el complemento de la cuenca de atracción, $I \setminus B$, contiene a todas esas órbitas periódicas y preperiódicas que no están en B , y a otro tipo de puntos.

Pues bien, al respecto se pueden demostrar dos cosas (véase el capítulo 1-13 de [14]):

- $I \setminus B$ es un conjunto de medida (de Lebesgue) cero.

CAPÍTULO 16. DIAGRAMA DE BIFURCACIONES, FAMILIA LOGÍSTICA 257

- Existe un conjunto de Cantor (compacto, totalmente desconexo) contenido en $I \setminus B$, restringida al cual la dinámica de f_λ es caótica.

Lo que ocurre en el caso específico de periodo 3 ocurre en general:

Ya mencionamos que en la familia logística, una vez que aparece una órbita periódica (para algún parámetro), ésta ya no desaparece (para parámetros mayores).² Entonces, si λ es mayor que λ_∞ , $f_\lambda : I \rightarrow I$ tiene órbitas de periodo 2^k para toda $k \in \mathbb{N}$. De hecho se puede demostrar que, en este caso ($\lambda > \lambda_\infty$), f_λ tiene por lo menos una órbita periódica de periodo $2^k \cdot q$ con q algún impar mayor que 1 y $k \geq 0$.

Por lo tanto, de acuerdo con Sharkovskii, f_λ tiene una infinidad de órbitas periódicas distintas si $\lambda > \lambda_\infty$, que incluye a todas las de periodos potencias de 2, pero no solamente a esas.

¿Y en dónde están estas órbitas?

Para el caso en el que $f_\lambda : I \rightarrow I$ posea una órbita periódica atractora, se tiene el siguiente teorema (ver [12] y sección 11.1 de [22]).

Teorema 16.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que λ es un parámetro en una ventana de periodo n para el cual $f_\lambda : I \rightarrow I$ tiene una órbita atractora de periodo $2^k \cdot n$ para algún $k \geq 0$. Entonces,*

- *La cuenca de atracción de esta órbita atractora es un conjunto B_λ , abierto y denso en el intervalo $I = [0, 1]$.*
- *Su complemento, $I \setminus B_\lambda$, es denso en ninguna parte y de medida (de Lebesgue) cero.*
- *La restricción de f_λ a $I \setminus B_\lambda$ contiene un conjunto de Cantor invariante en el que la dinámica de f_λ es caótica.*

En conclusión: bajo las hipótesis de este teorema, en $f_\lambda : I \rightarrow I$ conviven un conjunto abierto, denso, en el que la dinámica es regida por la existencia de una órbita periódica atractora, y un conjunto de Cantor en el que la dinámica es caótica.

Este resultado indudablemente aclara mucho la naturaleza de la dinámica de la familia logística en el intervalo $[\lambda_\infty, 4]$.

²Douady y Hubbard. Poner referencia

Pero obsérvese que no existen órbitas atractoras para todos los parámetros en dicho intervalo. Por ejemplo, para los parámetros de culminación de las cascadas de duplicaciones no existen tales órbitas.

Y hay aún otros comportamientos dinámicos distintos, parámetros que no son de *culminación* de cascadas de duplicaciones.

Piénsese, por ejemplo, en el parámetro $\lambda = 4$. la función $f_4 : I \rightarrow I$ es caótica en todo el intervalo I , y se puede probar que no hay ninguna ventana que *concluya* ahí. En particular, sabemos que $\lambda = 4$ es el único parámetro para el cual la imagen del intervalo I bajo f_λ es todo el intervalo I y ello se aprecia claramente en el diagrama.

Pues hay muchos otros parámetros semejantes, que no son de *culminación* de cascadas de duplicaciones, para los cuales $f_\lambda : I \rightarrow I$ no tiene órbitas atractoras y es caótica en un subconjunto del intervalo I .

Dos resultados al respecto son los siguientes.

Teorema 16.5. *El complemento del conjunto de ventanas periódicas es de medida (de Lebesgue) positiva en el intervalo $(\lambda_\infty, 4]$.*

Teorema 16.6. *El complemento del conjunto de ventanas periódicas contiene un conjunto de medida positiva en el cual la dinámica es caótica.*

Con este último recuento de resultados concluimos por ahora el análisis del diagrama de bifurcaciones de la familia logística.

Exhortamos al lector a consultar la bibliografía para profundizar en otros aspectos que no son tratados aquí.

Ejercicios

EJERCICIO 16.1. Obtener nuevamente el diagrama de bifurcaciones utilizando diferentes condiciones iniciales y compararlos. ¿qué observaciones puede hacer al respecto?

EJERCICIO 16.2. Utilizando el diagrama de bifurcaciones, calcular en forma aproximada los parámetros λ_i de bifurcación de duplicación de periodo para $i = 4, 5, 6$.

EJERCICIO 16.3. Describir la dinámica de la familia logística para valores de λ en el intervalo $(0, 1)$. Describir también las bifurcaciones que tienen lugar, respectivamente, en $\lambda = 0$ y en $\lambda = 1$.

CAPÍTULO 16. DIAGRAMA DE BIFURCACIONES, FAMILIA LOGÍSTICA 259

EJERCICIO 16.4. Analizar la dinámica de la familia logística para $\lambda < 0$. Hacer un breve ensayo con sus conclusiones.

EJERCICIO 16.5. Comprobar, utilizando la mejor aproximación que le sea posible a partir del diagrama, que la ventana de periodo 3 empieza en el parámetro

$$\alpha = 1 + \sqrt{8}.$$

EJERCICIO 16.6. Después de la de periodo 3, la siguiente mayor ventana es la de periodo 5. Ubicar en forma aproximada parámetros entre los cuales se encuentra. Recurriendo a las gráficas correspondientes, corroborar en este caso el fenómeno de duplicaciones de periodo.

EJERCICIO 16.7. Dibujar el diagrama de bifurcaciones de las siguientes familias:

- $\lambda \sin(\pi x)$, $\lambda \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$.
- $\lambda \cos(\pi x)$, $\lambda \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$.
- $x^2 + c$, $c \in [-2, \frac{1}{4}]$.
- La familia de las *Tiendas*. Sea $x \in [0, 1]$,

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \lambda(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

con $\lambda \in [0, 2]$.

- $\lambda x^3 + (1-x)x$, $\lambda \in [0, 4]$.

EJERCICIO 16.8. (Tomado de [15]) La idea en este ejercicio es determinar la colocación de algunas de las ventanas de periodos distintos en el diagrama de bifurcaciones.

Procederemos como sigue: una vez ubicados los periodos de dos ventanas distintas, se trata de encontrar el periodo de las siguientes mayores ventanas entre éstas. Lo haremos en orden, sólo unas cuantas veces, de la siguiente manera: En el Paso 1, anotamos los periodos de las dos mayores ventanas, obviamente la de periodo 1 y la de periodo 3. Amplificando la zona entre estas dos ventanas, es obvio que las siguientes dos ventanas mayores, son las de periodo 6 y 5. Lo anotamos así, en orden:

Paso 1:	1				3
Paso 2:	1	6	5		3

260 16.5. LA COMPLEJIDAD DE LA DINÁMICA EN LAS VENTANAS

Ahora, entre las ventanas de periodo 1 y 6, ubicamos las dos mayores de periodos respectivos A y B :

Paso 3: 1 A B 6 5 3

Continuando de esta manera, ubicamos los siguientes periodos:

Paso 4: 1 A B 6 C D 5 E 3

Por último, ubicamos todas las siguientes entre periodo 1 y periodo 6:

Paso 5: 1 α β A γ δ B ϵ 6

El problema consiste en determinar los valores de todas las letras empleadas para designar los periodos de las nuevas ventanas.

EJERCICIO 16.9.

- Analizando las gráficas de f_λ^k para $k = 3, 4, 5$ y 6 , aproximar el valor de los parámetros λ para los cuales una órbita de periodo k aparece por primera vez.
- Para dichos valores de k , ¿cuál es el máximo número de órbitas de periodo k que puede tener f_λ ? ¿Aparecen todas ellas al mismo tiempo?
- Nuevamente para estos valores de k , describir las bifurcaciones que producen:
 - (a) Una órbita de periodo k por primera vez.
 - (b) El resto de las órbitas de periodo k .

CAPÍTULO 16. DIAGRAMA DE BIFURCACIONES, FAMILIA LOGÍSTICA 261

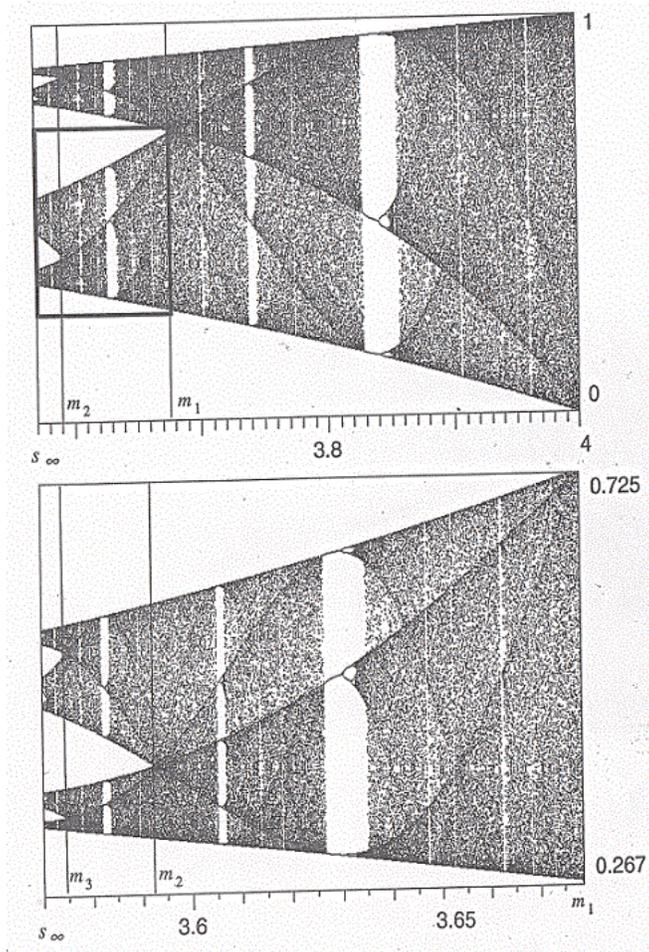
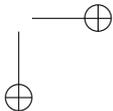
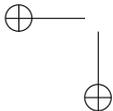
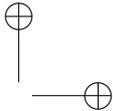
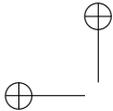


FIGURA 16.10: Acercamientos al diagrama de bifurcaciones.



CAPÍTULO 17

Introducción a la entropía

La entropía es un intento de asignarle un número mayor o igual a cero a la *complejidad* de una función continua, $f : X \rightarrow X$, cuando X es un espacio métrico compacto.

Una función sencilla, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, como la identidad, $f(x) = x$ para todo $x \in X$, tiene entropía igual a 0.

La función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, cuya dinámica caótica hemos estudiado a lo largo de varios capítulos, tiene entropía positiva.

En este capítulo haremos una breve introducción a este importante concepto. Mostraremos, además, algunas de las relaciones existentes entre las distintas propiedades dinámicas que hemos presentado con la posibilidad de que la entropía sea positiva.

Como comentamos antes, existen varias definiciones de *dinámica caótica*, además de la que nosotros presentamos en el capítulo 9. Algunos autores, como L. S. Block y W. A. Coppel, ver [8], definen a un sistema dinámico como caótico si su entropía es positiva. La meta en este capítulo es mostrar que, en ciertos casos, ambas aproximaciones al *caos* tienen una fuerte relación.

17.1. Propiedades de las cubiertas abiertas

Daremos la definición de entropía propuesta por Adler, Konheim y McAndrew en 1965 (ver [2]). Estos autores utilizan de manera esencial el concepto de cubierta abierta.

De aquí en adelante X y Y representan dos espacios métricos compactos. Las letras griegas α , β , γ y η representan cubiertas abiertas (ya sea de X o

de Y). Todas las funciones consideradas son continuas.

Sean α y β dos cubiertas abiertas de X . Definimos

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

Obsérvese que $\alpha \vee \beta$ es también una cubierta abierta de X .

En este capítulo el símbolo \vee es utilizado sólo en estos términos.

De la definición se sigue de manera inmediata lo siguiente:

- $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$.
- $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$. Denotaremos a esta cubierta así: $\alpha \vee \beta \vee \gamma$.

Decimos que β es un *refinamiento* de α , en símbolos $\alpha < \beta$, si para todo $B \in \beta$, existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$.

Las afirmaciones contenidas en la siguiente proposición no son difíciles de demostrar (ver ejercicio 17.1). Son las propiedades básicas de la operación $\alpha \vee \beta$. Todas ellas son necesarias para definir la entropía.

Proposición 17.1. *Sean α, β, γ y η cuatro cubiertas abiertas de X . Entonces*

- $\alpha < \alpha \vee \beta$, y $\beta < \alpha \vee \beta$.
- $\alpha < \alpha \vee \alpha$, y $\alpha \vee \alpha < \alpha$.
- Si $\alpha < \beta$, entonces $\alpha \vee \beta < \beta$.
- Si $\alpha < \beta$, y $\gamma < \eta$, entonces $(\alpha \vee \gamma) < (\beta \vee \eta)$.

Como X es compacto, entonces la cubierta abierta α tiene al menos una subcubierta finita. Si β es una subcubierta finita de α , $|\beta|$ denotará la cantidad de elementos de β . Al mínimo de estos números le llamaremos $N(\alpha)$, es decir,

$$N(\alpha) = \text{mín} \{|\beta| : \beta \text{ es subcubierta finita de } \alpha\}.$$

Obsérvese que para toda cubierta α de X , $N(\alpha) \geq 1$.

Dadas dos cubiertas abiertas, α y β , de X se cumplen las siguientes propiedades, ver ejercicios 17.3 y 17.4:

- Si $\alpha < \beta$, $N(\alpha) \leq N(\beta)$.
- Si $\alpha < \beta$, $N(\alpha \vee \beta) = N(\beta)$.
- $N(\alpha \vee \alpha) = N(\alpha)$.
- Si α y β son de cardinalidad finita, entonces

$$|\alpha \vee \beta| \leq |\alpha| |\beta|.$$

Proposición 17.2. Sean α y β dos cubiertas abiertas de X . Entonces

$$N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta).$$

Demostración. Sean γ y η subcubiertas de α y β , respectivamente, tales que

$$|\gamma| = N(\alpha) \quad \text{y} \quad |\eta| = N(\beta).$$

Entonces $\gamma \vee \eta$ es una cubierta abierta de X tal que

$$|\gamma \vee \eta| \leq |\gamma| |\eta| = N(\alpha)N(\beta).$$

Como $\gamma \vee \eta$ es una subcubierta de $\alpha \vee \beta$, tenemos que

$$N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta).$$

□

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua, y sea α una cubierta abierta de Y . Definimos

$$f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A) : A \in \alpha\}.$$

Obsérvese que $f^{-1}(\alpha)$ también es una cubierta abierta del espacio X .

Si α y β son dos cubiertas abiertas de Y tales que $\alpha < \beta$, entonces $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$.

También se cumple la siguiente igualdad, ver ejercicio 17.6:

$$f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta).$$

Proposición 17.3. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua, y α una cubierta abierta de Y . Entonces $N(f^{-1}(\alpha)) \leq N(\alpha)$. Si además f es suprayectiva, entonces

$$N(f^{-1}(\alpha)) = N(\alpha).$$

Demostración. Sea γ una subcubierta de α tal que $|\gamma| = N(\alpha)$,

$$\gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_{N(\alpha)}\}.$$

Entonces,

$$Y = \bigcup_{i=1}^{N(\alpha)} A_i.$$

Para cada punto x en X existe i , $1 \leq i \leq N(\alpha)$ tal que $f(x) \in A_i$. Por lo tanto,

$$X = \bigcup_{i=1}^{N(\alpha)} f^{-1}(A_i).$$

Como

$$f^{-1}(\gamma) = \{f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \dots, f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$$

es una subcubierta abierta de $f^{-1}(\alpha)$ con $N(\alpha)$ elementos, entonces

$$N(f^{-1}(\alpha)) \leq N(\alpha).$$

Supongamos ahora que $f : X \rightarrow Y$ es suprayectiva.

Sea η una subcubierta de $f^{-1}(\alpha)$ tal que $|\eta| = N(f^{-1}(\alpha))$.

Sean $A_i \in \alpha$, $1 \leq i \leq N(f^{-1}(\alpha))$, los elementos de α tales que

$$\eta = \{f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \dots, f^{-1}(A_{N(f^{-1}(\alpha))})\}.$$

Entonces, dado que f es suprayectiva,

$$Y = f(X) = \bigcup_{i=1}^{N(f^{-1}(\alpha))} A_i.$$

Así, $N(\alpha) \leq N(f^{-1}(\alpha))$. Por lo tanto $N(f^{-1}(\alpha)) = N(\alpha)$. □

Dados $n \in \mathbb{N}$, $f : X \rightarrow X$, y A un subconjunto de X , denotamos por $f^{-n}(A)$ a la imagen inversa de A bajo la función f^n , es decir,

$$f^{-n}(A) = (f^n)^{-1}(A) = \{x \in X : f^n(x) \in A\}.$$

Con respecto a imágenes inversas es bueno tener a la mano las propiedades contenidas en el siguiente lema. El lector es invitado en los ejercicios 17.5 y 17.6 a ofrecer los argumentos necesarios.

Lema 17.4. Sean $f : X \rightarrow X$ una función continua, α y β dos cubiertas abiertas de X y sea $A \subset X$. Entonces para toda pareja de números naturales n y m se tiene lo siguiente:

- $f^{-n}(f^{-m}(A)) = f^{-n-m}(A)$.
- $(f^m)^{-n}(A) = f^{-mn}(A)$.
- $f^{-n}(\alpha \vee \beta) = f^{-n}(\alpha) \vee f^{-n}(\beta)$.
- Si $\alpha < \beta$, entonces $f^{-n}(\alpha) < f^{-n}(\beta)$.

17.2. Definición de entropía

Sean $f : X \rightarrow X$ una función continua, y α una cubierta abierta de X . Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la cubierta abierta:

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\alpha).$$

A partir de la pareja: $f : X \rightarrow X$ y α , obtenemos una sucesión de cubiertas,

$$\alpha, \alpha \vee f^{-1}(\alpha), \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha), \dots, \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha), \dots$$

Observemos que cada una de ellas refina a la anterior, es decir

$$\alpha < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) < \dots < \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) < \dots$$

Así obtenemos la siguiente sucesión de números naturales:

$$\begin{aligned} N(\alpha) &\leq N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha)) \leq N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha)) \\ &\leq \dots \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right) \leq \dots \end{aligned}$$

Notemos que, una vez que fijamos la pareja f y α , el valor de

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)$$

sólo depende de n . La idea central es descubrir que tan simple o complicado es el sistema dinámico generado por $f : X \rightarrow X$ a través del estudio de la rapidez de crecimiento de esta sucesión:

$$\left\{ N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right) \right\}_{n=1}^{\infty}. \tag{17.1}$$

cuando n tiende a infinito.

Intuitivamente una función sencilla, $f : X \rightarrow X$, que mueve muy poco a los puntos de X , estaría relacionada con un crecimiento *lento* o polinomial (con respecto a n) del valor $N(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha))$. Una función con dinámica más complicada movería tanto los puntos de X que el crecimiento sería exponencial.

Para descubrir esta diferencia, entre crecimiento polinomial y crecimiento exponencial, calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) \right) \right). \quad (17.2)$$

Observemos que este límite es cero si el crecimiento de la sucesión (17.1) es polinomial en la variable n (o está acotado superiormente por un polinomio en n), y es positivo si éste es exponencial.

Demostraremos primero que el límite (17.2) sí existe. La siguiente proposición contiene el primer paso en esta dirección.

Proposición 17.5. *Sean $f : X \rightarrow X$ una función continua, α una cubierta abierta de X , $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\begin{aligned} & \log \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{(n+m)-1} f^{-i}(\alpha) \right) \right) \\ & \leq \log \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) \right) \right) + \log N \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}(\alpha) \right). \end{aligned}$$

Demostración. Sean n y m dos números en \mathbb{N} y sea α una cubierta abierta de X . Entonces

$$\begin{aligned} & \log \left(N \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-m-n+1}(\alpha) \right) \right) \\ & = \log \left(N \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-m+1}(\alpha) \vee f^{-m}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-m-n+1}(\alpha) \right) \right), \end{aligned}$$

por el lema 17.4,

$$= \log \left(N \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-m+1}(\alpha) \vee f^{-m} \left((\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha) \right) \right) \right),$$

y por la proposición 17.2,

$$\begin{aligned} & \leq \log \left(N \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-m+1}(\alpha) \right) N \left(f^{-m} \left((\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha) \right) \right) \right) \\ & = \log \left(N \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-m+1}(\alpha) \right) \right) \end{aligned}$$

$$+ \log (N (f^{-m} ((\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)))) .$$

Ahora, por la proposición 17.3 tenemos que esta última suma es menor o igual a

$$\log (N (\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-m+1}(\alpha))) + \log (N ((\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha))) ,$$

con lo cual terminamos nuestra demostración. \square

La proposición 17.5 y la afirmación contenida en el ejercicio 17.7 nos permiten concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{1}{n} \log (N (\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha))) \leq \log (N (\alpha)) .$$

Para dar el segundo paso necesitamos las definiciones de *límite superior* y *límite inferior* de una sucesión de números reales.

Definición 17.6. Dada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{R} definimos el $\limsup (a_n)$ y el $\liminf (a_n)$ de la siguiente forma:

- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente, entonces

$$\limsup (a_n) = \infty .$$

- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada inferiormente, entonces

$$\liminf (a_n) = -\infty .$$

- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, entonces

$$\limsup (a_n) = \max \left\{ y \in \mathbb{R} : \text{existe } \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} = y \right\} ,$$

y

$$\liminf (a_n) = \min \left\{ y \in \mathbb{R} : \text{existe } \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} = y \right\} .$$

De la definición 17.6 se sigue que

$$\liminf (a_n) \leq \limsup (a_n),$$

y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R},$$

si y sólo si

$$\limsup (a_n) = \liminf (a_n) = a_0.$$

Ver ejercicios 17.10 y 17.11.

Proposición 17.7. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{R} que cumple las siguientes dos condiciones:*

- *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, y*
- *para todo par de números $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ sí existe. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ un número fijo. Para cada $n > m$ podemos escribir

$$n = qm + r, \quad \text{donde } 1 \leq q \text{ y } 0 \leq r < m.$$

Entonces

$$a_n = a_{qm+r} \leq a_{qm} + a_r \leq qa_m + a_r.$$

Observemos que para todo $n > m$ tenemos que

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q}{n} a_m + \frac{a_r}{n}.$$

Como $n = qm + r$, entonces $\frac{n-r}{m} = q$, y $\frac{q}{n} = \frac{n-r}{nm}$. De aquí se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q}{n} = \frac{1}{m}.$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q}{n} a_m + \frac{a_r}{n} \right) = \frac{a_m}{m},$$

ya que a_r sólo toma una cantidad finita de valores: a_1, a_2, \dots, a_{m-1} .

Por lo tanto para cada m en \mathbb{N} se tiene que

$$\limsup \left(\frac{a_n}{n} \right) \leq \frac{a_m}{m}.$$

De aquí se sigue que

$$\limsup \left(\frac{a_n}{n} \right) \leq c = \inf \left\{ \frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Por otro lado, como para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $c \leq \frac{a_n}{n}$, entonces

$$c \leq \liminf \left(\frac{a_n}{n} \right).$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = c$. □

La demostración de la siguiente proposición es ahora inmediata.

Proposición 17.8. *El límite,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) \right) \right).$$

sí existe. Además,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) \right) \right) \leq \log(N(\alpha)).$$

Demostración. Se sigue de las proposiciones 17.5 y 17.7. □

Nos encontramos, finalmente, en excelente posición para definir la entropía de un sistema dinámico discreto.

Definición 17.9. Sean $f : X \rightarrow X$ una función continua, X un espacio métrico compacto y α una cubierta abierta de X .

La entropía de f con respecto a la cubierta α es:

$$\text{ent}(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) \right).$$

La entropía topológica de f está dada por:

$$\text{ent}(f) = \sup \{ \text{ent}(f, \alpha) : \alpha \text{ es una cubierta abierta de } X \}.$$

Es común referirnos a la entropía topológica de una función f diciendo sólo la *entropía de f* . Los tres posibles valores de $ent(f)$ son 0, un número positivo, e ∞ . Si $ent(f) \neq 0$, entonces diremos que la entropía de f es positiva.

Mencionamos al inicio de este capítulo que algunos autores, ver [8], consideran que el sistema dinámico discreto generado por $f : X \rightarrow X$ es caótico si $ent(f)$ es positiva.

Obsérvese que si $ent(f) > 0$, entonces existe al menos una cubierta abierta de X , digamos α , tal que $ent(f, \alpha) > 0$.

Ejemplo 17.10. Sea $f : X \rightarrow X$ la función identidad en X . Para cada cubierta abierta α y para cada $n \geq 2$ se tiene que

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) = \alpha \vee f^{-1}(\alpha).$$

De aquí se sigue que $ent(f, \alpha) = 0$. Por lo tanto $ent(f) = 0$.

Si bien, en este texto, sólo estudiaremos la definición de Adler *et al*, es bueno saber que existe una segunda definición que fue propuesta por Dinaburg y Bowen. En este segundo enfoque se utiliza fuertemente la métrica de X y el concepto de *conjunto generador*. Es un resultado conocido que en espacios métricos compactos ambas definiciones son equivalentes (ver capítulo 7 de [45]).

17.3. Propiedades de la entropía

Las propiedades de la entropía topológica contenidas en las proposiciones 17.11 y 17.13 y el teorema 17.14 nos permitirán estimar la entropía de más funciones.

Proposición 17.11. Sean $f : X \rightarrow X$ una función continua, X un espacio métrico compacto, y $k \in \mathbb{N}$. Entonces la entropía de f^k es k veces la entropía de f ,

$$ent(f^k) = k \cdot ent(f). \tag{17.3}$$

Demostración. Sean $f : X \rightarrow X$ y k según las hipótesis. Sea α una cubierta abierta de X , y sea β la cubierta abierta de X dada por

$$\beta = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-k+1}(\alpha).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{ent}(f^k, \beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\beta \vee (f^k)^{-1}(\beta) \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}(\beta) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\beta \vee f^{-k}(\beta) \vee \dots \vee f^{-nk+k}(\beta) \right) \right), \end{aligned}$$

sustituyendo β por $\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-k+1}(\alpha)$,

$$\begin{aligned} \text{ent}(f^k, \beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-k+1}(\alpha) \vee f^{-k}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-nk+1}(\alpha) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} k \frac{1}{nk} \log \left(N \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-nk+1}(\alpha) \right) \right) \\ &= k \cdot \text{ent}(f, \alpha). \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del hecho de que

$$\left\{ \frac{1}{nk} \log \left(N \left(\alpha \vee \dots \vee f^{-nk+1}(\alpha) \right) \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es una subsucesión de

$$\left\{ \frac{1}{n} \log \left(N \left(\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha) \right) \right) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Tenemos entonces que

$$\text{ent}(f^k) \geq \text{ent}(f^k, \beta) = k \cdot \text{ent}(f, \alpha)$$

para cada cubierta α de X .

Por lo tanto, si $\text{ent}(f) = \infty$, entonces $\text{ent}(f^k) = \infty$, y si $\text{ent}(f)$ es finita, entonces

$$\text{ent}(f^k) \geq k \cdot \text{ent}(f).$$

Por otro lado, como

$$\alpha \vee (f^k)^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}(\alpha) < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-nk+1}(\alpha),$$

entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{nk} \right) \log \left(N \left(\alpha \vee (f^k)^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}(\alpha) \right) \right) \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{nk} \right) \log \left(N \left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-nk+1}(\alpha) \right) \right). \end{aligned}$$

Y así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{nk} \right) \log \left(N \left(\alpha \vee (f^k)^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee (f^k)^{-n+1}(\alpha) \right) \right) \leq \text{ent}(f, \alpha).$$

Por lo tanto, para cada cubierta α se tiene que

$$\frac{1}{k} \cdot \text{ent}(f^k, \alpha) \leq \text{ent}(f, \alpha) \leq \text{ent}(f).$$

De aquí se sigue que $\text{ent}(f^k) \leq k \cdot \text{ent}(f)$.

Por lo tanto, $\text{ent}(f^k) = k \cdot \text{ent}(f)$. □

Ejemplo 17.12. Consideremos la circunferencia de radio 1,

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

y un número racional, $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$, $p, q \in \mathbb{N}$.

La *rotación de ángulo $\frac{p}{q}$* es la función, definida en \mathbb{S}^1 , dada por la regla de correspondencia:

$$f(z) = ze^{\frac{p}{q}2\pi i}.$$

Como $f^q(z) = z$ para toda z en \mathbb{S}^1 , $\text{ent}(f^q) = 0$, y así $\text{ent}(f) = 0$.

La demostración de la siguiente importante proposición se puede consultar en el capítulo 7 del libro de Peter Walters [45].

Proposición 17.13. Sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ dos funciones continuas definidas en espacios métricos compactos. Sea $h : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array},$$

entonces $\text{ent}(f) \geq \text{ent}(g)$.

A partir de la proposición 17.13 la demostración del siguiente importante resultado es inmediata.

Teorema 17.14. *Sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ dos funciones continuas definidas en espacios métricos compactos. Si f y g son topológicamente equivalentes a través del homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, entonces*

$$\text{ent}(f) = \text{ent}(g).$$

Demostración. Como f y g son conjugadas a través del homeomorfismo h , entonces g y f son conjugadas a través del homeomorfismo h^{-1} . De la proposición 17.13 se sigue que $\text{ent}(f) \geq \text{ent}(g)$ y que $\text{ent}(f) \leq \text{ent}(g)$.

Por lo tanto ambas funciones tienen la misma entropía. \square

17.4. La entropía de la *Tienda* es positiva

Para demostrar que la entropía de la función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, es positiva seguiremos el siguiente camino: Gracias a la proposición 17.11, es suficiente mostrar que alguna iteración de la *Tienda* tiene entropía positiva.

La función $T^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ transforma los intervalos ajenos $[0, \frac{1}{4}]$ y $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto,

$$\left(\left[0, \frac{1}{4} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \right) \subset \left(T^2 \left(\left[0, \frac{1}{4} \right] \right) \cap T^2 \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \right) \right). \quad (17.4)$$

Este sencillo hecho provoca que $\text{ent}(T^2)$ sea positiva. El lema 17.15 nos ayudará a convencer al lector de que esta afirmación es cierta.

La demostración que a continuación presentamos sigue, casi al pie de la letra, la argumentación de un resultado similar que aparece en el capítulo VIII de [8].

Lema 17.15. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua, X un espacio métrico compacto, y sea $k \in \mathbb{N}$. Si existen k subconjuntos cerrados de X , no vacíos, ajenos dos a dos, A_1, A_2, \dots, A_k , tales que*

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \subset (f(A_1) \cap \dots \cap f(A_k)),$$

entonces $\text{ent}(f) \geq \log k$.

Demostración. Sean O_1, O_2, \dots, O_k , k subconjuntos abiertos de X , ajenos por parejas, tales que $A_i \subset O_i$, $1 \leq i \leq k$. Sea $O = X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)$.

Entonces la colección $\alpha = \{O_1, O_2, \dots, O_k, O\}$ es una cubierta abierta de X . Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$$

tiene cardinalidad k^n .

Por cada elemento en Γ , digamos

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

consideramos el conjunto

$$E_{\mathbf{x}} = \{p \in X : p \in A_{x_1}, f(p) \in A_{x_2}, \dots, f^{n-1}(p) \in A_{x_n}\}.$$

Este conjunto es no vacío. Cada punto de $E_{\mathbf{x}}$ está contenido en un único elemento de la cubierta $\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\alpha)$, a saber

$$O_{x_1} \cap f^{-1}(O_{x_2}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(O_{x_n}).$$

De aquí se sigue que

$$N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\alpha)) \geq k^n.$$

Así $ent(f, \alpha) \geq \log k$ y, por lo tanto, $ent(f) \geq \log k$. □

Varias son las virtudes del lema 17.15. Llamamos la atención del lector a una de ellas. En la mayoría de los casos, la estimación de la entropía de una función $f : X \rightarrow X$, a partir de la definición, no es una tarea sencilla. El lema 17.15 tiende un puente que va del estudio de las distintas cubiertas abiertas de X a el estudio de una condición que involucra solamente a una cantidad finita de subconjuntos cerrados de X . En muchos casos este cambio facilita en gran medida los cálculos.

Proposición 17.16. *La función Tienda, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tiene entropía positiva.*

Demostración. De la relación expresada en (17.4), de la proposición 17.11 y del lema 17.15 se concluye que

$$2 \cdot \text{ent}(T) = \text{ent}(T^2) \geq \log 2.$$

Por lo tanto,

$$\text{ent}(T) \geq \frac{\log 2}{2} > 0.$$

□

Proposición 17.17. *La entropía de la función Logística, $L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $L(x) = 4x(1 - x)$, es positiva.*

Demostración. Las funciones $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ son topológicamente equivalentes (ver proposición 11.10, página 166).

Por lo tanto $\text{ent}(L) > 0$.

□

Sobre la estimación del valor de la entropía de la *Tienda*, resta un último comentario.

Sea $n \in \mathbb{N}$. La proposición 7.1, que vimos en el capítulo 7, nos dice que es posible encontrar 2^{n-1} intervalos cerrados, ajenos dos a dos, tales que T^n transforma, a cada uno de ellos, en el intervalo $[0, 1]$. Así,

$$\text{ent}(T^n) \geq \log(2^{n-1}).$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{ent}(T) \geq \frac{n-1}{n} \log 2.$$

Por lo tanto $\text{ent}(T) \geq \log 2$.

17.5. Entropía positiva y caos

Una vez que el concepto de entropía ha llegado a nuestras manos surgen, al menos, dos tareas: La primera es estimar la entropía de algunas de las funciones que hemos estudiado. La segunda es encontrar las posibles relaciones entre las propiedades dinámicas que describen lo que nosotros definimos como *dinámica caótica* y el hecho de que la entropía sea positiva.

Dedicamos esta sección a la segunda tarea. La realidad es que el tema es muy amplio. Sin embargo, si nos restringimos a funciones definidas en intervalos de la recta real, $f : A \rightarrow A$, entonces nos encontramos rápidamente con hechos muy interesantes.

El siguiente resultado muestra que existe una relación entre la presencia de órbitas periódicas de periodo 3 y la entropía de dicha función.

Proposición 17.18. *Sean A un intervalo compacto y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Si f tiene un punto periódico de periodo 3, entonces la entropía de f es positiva.*

Demostración. Sea $x_0 \in A$ un punto periódico de $f : A \rightarrow A$ de periodo 3. Sea a el elemento más pequeño de la órbita de x_0 .

El punto a es también de periodo 3 y su órbita se comporta de una de las siguientes dos formas:

- $a < f(a) < f^2(a)$.
- $a < f^2(a) < f(a)$.

Consideraremos sólo el primer caso ya que la demostración para el segundo es análoga.

Sean $b = f(a)$ y $c = f^2(a)$. Entonces $a < b < c$. Ver figura 17.1.

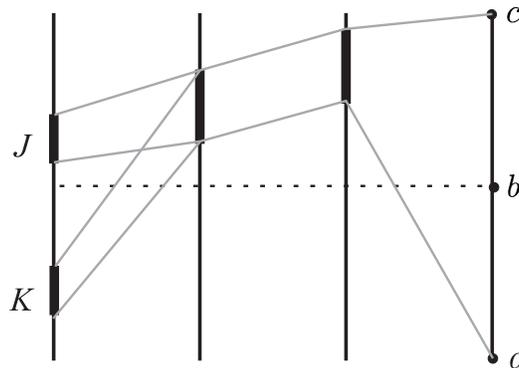


FIGURA 17.1

Como $f([b, c]) \supset [a, c]$, existe $[b_1, c_1] \subset [b, c]$ tal que

$$f([b_1, c_1]) = [a, c].$$

Como $f([b, c]) \supset [b_1, c_1]$, existe $[b_2, c_2] \subset [b, c]$ tal que

$$f([b_2, c_2]) = [b_1, c_1].$$

Obsérvese que a no está en $[b_1, c_1]$. Entonces c no está en $[b_2, c_2]$.

Como

$$f([b, c]) \supset [b_2, c_2] \quad \text{y} \quad f([a, b]) \supset [b_2, c_2],$$

existen dos intervalos cerrados,

$$J \subset [b, c] \quad \text{y} \quad K \subset [a, b]$$

tales que

$$f(J) = [b_2, c_2] \quad \text{y} \quad f(K) = [b_2, c_2].$$

Dado que c no está en $[b_2, c_2]$, entonces b no es elemento del intervalo J ni del intervalo K . Así los intervalos cerrados J y K son ajenos y están contenidos en el intervalo $[a, c]$.

Además estos conjuntos cumplen lo siguiente:

$$f^3(K) = [a, c], \quad \text{y} \quad f^3(J) = [a, c].$$

Por el lema 17.15, obtenemos que la entropía de la iteración f^3 es mayor o igual a $\log 2$.

Por lo tanto la entropía de la función f es positiva.

De hecho, tenemos que $ent(f) \geq \frac{\log 2}{3}$. □

La siguiente proposición contiene una afirmación más general que la referida en la proposición 17.18. La demostración no es difícil gracias al Teorema de Sharkovskii.

Proposición 17.19. *Sean A un intervalo compacto y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . Si f tiene un punto periódico de periodo m tal que m no es potencia de 2, entonces la entropía de f es positiva.*

Demostración. Sean $f : A \rightarrow A$ y $m \in \mathbb{N}$ según las hipótesis.

Como m no es potencia de 2, por el Teorema de Sharkovskii, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f tiene un punto periódico de periodo $2^k \cdot 3$.

Por lo tanto la iteración f^{2^k} tiene un punto periódico de periodo 3.

Por la proposición 17.18, $ent(f^{2^k}) > 0$.

Y, por la proposición 17.11, $ent(f) > 0$. □

El siguiente resultado muestra que para funciones definidas en intervalos compactos, la posibilidad de que la entropía sea positiva también está relacionada con la transitividad topológica.

Proposición 17.20. *Si la función continua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es transitiva en $[0, 1]$, entonces la entropía de f es positiva.*

Demostración. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función transitiva en $[0, 1]$.

Por el ejercicio 8.22 del capítulo 8, página 124, sabemos que existe un punto w_0 en el intervalo abierto $(0, 1)$ tal que $f(w_0) = w_0$.

En nuestra demostración consideraremos varios casos.

Caso 1. Existe $w_1 \in (0, 1)$, $w_1 \neq w_0$, tal que $f(w_1) = w_0$.

Subcaso 1a. $0 < w_1 < w_0$.

Como f es transitiva, existen x , $w_1 < x < w_0$, y $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(x) < w_1$. Sea $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (x - \delta, x + \delta)$ se tiene que $f^m(t) < w_1$.

Obsérvese que

$$f^m(x - \delta) \leq w_1 \quad \text{y} \quad f^m(x + \delta) \leq w_1.$$

Sean

$$B_1 = [w_1, x - \delta] \quad \text{y} \quad B_2 = [x + \delta, w_0].$$

Como $f^m(w_1) = w_0 = f^m(w_0)$ y $B_1 \cup B_2 \subset [w_1, w_0]$, se sigue que

$$B_1 \cup B_2 \subset f^m(B_1) \quad \text{y} \quad B_1 \cup B_2 \subset f^m(B_2).$$

Y por el lema 17.15, $ent(f^m) > 0$ (ya que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$).

Así $ent(f) > 0$.

Subcaso 1b. $w_0 < w_1 < 1$.

Como f es transitiva, existen x , $w_0 < x < w_1$, y $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(x) > w_1$.

Sea $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (x - \delta, x + \delta)$ se tiene que $f^m(t) > w_1$.

Así,

$$f^m(x - \delta) \geq w_1 \quad \text{y} \quad f^m(x + \delta) \geq w_1.$$

Sean, ahora,

$$B_1 = [w_0, x - \delta] \quad \text{y} \quad B_2 = [x + \delta, w_1].$$

Análogo al subcaso 1a. se tiene que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Como $B_1 \cup B_2 \subset [w_0, w_1]$ y

$$f^m(w_1) = w_0 = f^m(w_0),$$

se sigue que $B_1 \cup B_2$ es subconjunto de $f^m(B_1)$ y de $f^m(B_2)$.

Nuevamente por el lema 17.15, la entropía de f^m y la de f son positivas.

Caso 2. No existe $w \in (0, 1)$, $w \neq w_0$, tal que $f(w) = w_0$.

Sean

$$I_0 = [0, w_0] \quad \text{y} \quad I_1 = [w_0, 1].$$

Observemos que para cualquier par de puntos, s y t , en I_0 no puede suceder que

$$f(s) < w_0 < f(t)$$

ya que, por el Teorema del Valor Intermedio, esto nos llevaría a concluir la existencia de un punto w , en el intervalo $(0,1)$, tal que $f(w) = w_0$, con $w \neq w_0$, lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto

$$f(I_0) \subset I_0 \quad \text{ó} \quad f(I_0) \subset I_1.$$

Situación análoga se vive en el intervalo I_1 .

Como f es transitiva en $[0, 1]$ concluimos que

$$f(I_0) \subset I_1, \quad \text{y} \quad f(I_1) \subset I_0.$$

Entonces

$$f^2(I_0) \subset I_0 \quad \text{y} \quad f^2(I_1) \subset I_1$$

Observe el lector que para todo número par n se tiene que $f^n(I_0) \subset I_0$, y para todo número impar n se tiene que $f^n(I_0) \subset I_1$.

Sean

$$0 < a < b < w_0 \quad \text{y} \quad 0 < c < d < w_0.$$

Como f es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset.$$

Como $(c, d) \cap I_1 = \emptyset$, entonces n es par, digamos $n = 2m$. Por lo tanto

$$(f^2)^m(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset.$$

Esto implica que la función f^2 es transitiva en I_0 . Y utilizando nuevamente el ejercicio 8.22, concluimos que existe un punto w_1 en el intervalo abierto $(0, w_0)$ tal que $f^2(w_1) = w_1$.

Observemos que tanto w_0 como w_1 son ambos puntos fijos de la función $f^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Si

$$f^2([w_1, w_0]) \subset [w_1, w_0],$$

entonces f^2 no sería transitiva en $I_0 = [0, w_0]$.

Por lo tanto existe w_2 , $w_1 < w_2 < w_0$ tal que $f^2(w_2) = w_1$.

Y así arribamos a una situación análoga al *Subcaso 1b.*, ahora para la función $f^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Entonces existen un número natural N y dos intervalos cerrados en $[w_1, w_2]$, digamos J y K , tales que $J \cap K = \emptyset$ y

$$J \cup K \subset f^{2N}(J) \quad \text{y} \quad J \cup K \subset f^{2N}(K).$$

De donde se concluye que la entropía de f es positiva. □

De la proposición 17.20 se sigue el siguiente resultado.

Teorema 17.21. *Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua en $[0, 1]$. Si f es caótica en $[0, 1]$, según la definición dada por Devaney (definición 9.7, página 132), entonces la entropía de f es positiva.*

Demostración. Como f es caótica en el intervalo $[0, 1]$, entonces f es transitiva en $[0, 1]$. De la proposición 17.20 se sigue que $ent(f) > 0$. □

El siguiente teorema, cuya demostración se puede consultar en el libro *Dynamics in One Dimension*, [8], muestra con más detalle la relación que existe, para funciones continuas $f : A \rightarrow A$, definidas en un intervalo compacto A , entre entropía positiva y la presencia de una dinámica caótica.

Teorema 17.22. *Sean A un intervalo compacto y $f : A \rightarrow A$ una función continua en A . La entropía de f es positiva si y sólo si existe un conjunto cerrado B , contenido en A , invariante bajo f , tal que f restringida a B es caótica en B .*

Varios de los libros dedicados a los sistemas dinámicos discretos contienen una presentación de la entropía topológica. A los lectores interesados en continuar el estudio de este tema les recomendamos ampliamente los siguientes: *Dynamics in One Dimension*, escrito por L. S. Block y W. A. Coppel (ver [8]), *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, escrito por L. Alsedá, J. Llibre y M. Misiurewicz (ver [4]), y *An Introduction to Ergodic Theory*, escrito por P. Walters (ver [45]).

Recomendamos también el trabajo de tesis de licenciatura que presentó la estudiante Belén Espinosa Lucio en la Facultad de Ciencias de la UNAM, México. El título de esta tesis es *Introducción a la entropía topológica*, (ver [18]).

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas. La letra X representa un espacio métrico compacto.

EJERCICIO 17.1. Sean α , β , γ y η cuatro cubiertas abiertas de X . Entonces

- $\alpha < \alpha \vee \beta$, y $\beta < \alpha \vee \beta$.
- $\alpha < \alpha \vee \alpha$, y $\alpha \vee \alpha < \alpha$.
- Si $\alpha < \beta$, entonces $\alpha \vee \beta < \beta$.
- Si $\alpha < \beta$, y $\gamma < \eta$, entonces $\alpha \vee \gamma < \beta \vee \eta$.

EJERCICIO 17.2. Sea α una cubierta abierta de X . Verdadero o falso: $\alpha = \alpha \vee \alpha$.

EJERCICIO 17.3. Sean α y β dos cubiertas abiertas de X . Si $\alpha < \beta$, entonces

- $N(\alpha) \leq N(\beta)$,
- $N(\alpha \vee \beta) = N(\beta)$, y
- $N(\alpha \vee \alpha) = N(\alpha)$.

EJERCICIO 17.4. Sean α y β dos cubiertas de X de cardinalidad finita. Demostrar que $|\alpha \vee \beta| \leq |\alpha| |\beta|$

EJERCICIO 17.5. Sea $f : X \rightarrow X$, y sea $A \subset X$. Entonces para toda pareja de números naturales n y m se tiene lo siguiente:

- $f^{-n}(f^{-m}(A)) = f^{-n-m}(A)$, y

- $(f^m)^{-n}(A) = f^{-mn}(A)$.

EJERCICIO 17.6. Sea $f : X \rightarrow X$, y sean α y β dos cubiertas abiertas de X . Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

- $f^{-n}(\alpha \vee \beta) = f^{-n}(\alpha) \vee f^{-n}(\beta)$, y
- si $\alpha < \beta$, entonces $f^{-n}(\alpha) < f^{-n}(\beta)$.

EJERCICIO 17.7. Mantenemos la notación de la proposición 17.5. Sea

$$b_n = \log(N(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha))).$$

- Demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $b_k \leq b_{k+1}$.
- La proposición 17.5 nos dice que para cada pareja de números naturales n y m se tiene que $b_{n+m} \leq b_n + b_m$. Demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $b_k \leq kb_1$.

Concluir que el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\log(N(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha))))$$

siempre es finito.

EJERCICIO 17.8. Mostrar dos cubiertas abiertas, α y β , del intervalo $[0, 1]$ que sean finitas y tales que

$$N(\alpha \vee \beta) < N(\alpha) \cdot N(\beta).$$

EJERCICIO 17.9. Sean $I = [0, 1]$, $f : I \rightarrow I$, $f(x) = x^2$, y α la cubierta abierta de I dada por

$$\alpha = \left\{ \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}.$$

Calcule

$$N(\alpha), \quad N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha)) \quad \text{y} \quad N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha)).$$

EJERCICIO 17.10. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{R} . Demostrar que

$$\liminf(a_n) \leq \limsup(a_n).$$

EJERCICIO 17.11. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{R} y sea $a_0 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$$

si y sólo si $\limsup(a_n) = \liminf(a_n) = a_0$.

EJERCICIO 17.12. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{R} acotada. Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $\limsup(a_n) < b$. Entonces la cardinalidad del conjunto $\{a_n : a_n > b\}$ es finita.

EJERCICIO 17.13. Sean $x_0 \in X$ y $f : X \rightarrow X$ la función dada por $f(x) = x_0$ para todo x en X . Entonces $ent(f) = 0$.

EJERCICIO 17.14. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función dada por $f(x) = 1 - x$. Demostrar que $ent(f) = 0$.

EJERCICIO 17.15. Si la cardinalidad de X es finita, entonces para toda función $f : X \rightarrow X$ se tiene que $ent(f) = 0$.

EJERCICIO 17.16. Demostrar que la entropía de la función *corrimiento* $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ es mayor o igual a $\log 2$. *Sugerencia:* Considerar los siguientes dos subconjuntos de Σ_2 ,

$$A = \{\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) : t_0 = 0\}, \quad B = \{\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) : t_0 = 1\}.$$

Comentarios

En relación al ejercicio 17.15 es importante señalar el siguiente resultado: Si la cardinalidad del espacio X es infinita numerable, entonces para toda función $f : X \rightarrow X$ se tiene que $ent(f) = 0$, ver [13].

Así, desde el punto de vista de la entropía, sólo podemos encontrar funciones con comportamiento *caótico* si éstas están definidas en un espacio de cardinalidad infinita no numerable.

En contraste con lo anterior, en el ejercicio 8.16 del capítulo 8, página 123, mostramos un espacio métrico infinito numerable, X , y una función continua, $f : X \rightarrow X$, tales que f es caótica en X .

Mostramos, para finalizar el capítulo, que existen funciones que pueden tener entropía infinita.

Consideremos el Cubo de Hilbert,

$$Q = \prod_{n=0}^{\infty} I, \quad I = [0, 1].$$

y la función corrimiento definida en Q , $\sigma : Q \rightarrow Q$, dada por

$$\sigma(\mathbf{t}) = \sigma(t_0, t_1, t_2, \dots) = (t_1, t_2, t_3, \dots).$$

Proposición 17.23. *La entropía de $\sigma : Q \rightarrow Q$ es infinita.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Consideremos los siguientes k subconjuntos de Q , A_1, A_2, \dots, A_k , definidos de esta manera:

Para cada $1 \leq i \leq k$, sea

$$A_i = \left\{ \mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in Q : t_0 = \frac{i}{k} \right\}.$$

No es difícil ver que las siguientes condiciones son ciertas:

- Cada A_i es un subconjunto cerrado de Q .
- Si $i \neq j$, entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- Para cada i , se tiene que $\sigma(A_i) = Q$.

Entonces, por el lema 17.15, $ent(\sigma) \geq \log(k)$. Como esto sucede para cada $k \in \mathbb{N}$ que tomemos, la entropía de $\sigma : Q \rightarrow Q$ es infinita. \square

CAPÍTULO 18

Dinámica colectiva

Una función continua $f : X \rightarrow X$ no solamente mueve los puntos del espacio X , mueve también los subconjuntos de X . Si $A \subset X$, entonces la imagen de A bajo f , $f(A)$, es otro subconjunto de X . Esto nos permite aplicar nuevamente la función f y así, repitiendo esta acción muchas veces, obtener una sucesión de conjuntos.

$$\{A, f(A), f^2(A), f^3(A), \dots\}$$

De manera análoga al estudio de órbitas de puntos, ahora estudiaremos órbitas de conjuntos.

Si A es un conjunto compacto, entonces $f(A)$ también es compacto. Así $f : X \rightarrow X$ nos da una función definida en el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos de X ,

$$A \rightarrow f(A).$$

Una vez que nos damos cuenta de que f induce un sistema dinámico en el hiperespacio de los compactos, las preguntas inevitables son:

- ¿Si f tiene alguna propiedad (*i.e.*, el conjunto $Per(f)$ es denso en X , o f es transitiva en X), qué podemos concluir sobre la dinámica que induce f en el hiperespacio de los compactos?
- ¿Si la dinámica inducida por f en los compactos tiene alguna característica, de qué manera influye este hecho en la dinámica de f ?

A pesar de lo amplio y general que son estos cuestionamientos, ellos serán nuestra guía a lo largo de este capítulo. Las respuestas parciales y los comentarios que ofrecemos son, en esencia, una forma de hacer una introducción a este importante tema.

18.1. El hiperespacio de los compactos

Sea X un espacio métrico compacto. La colección de todos los subconjuntos de X es el *conjunto potencia* de X . Denotamos este conjunto así: $\mathcal{P}(X)$. Un *hiperespacio* de X es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ junto con una métrica. El hiperespacio que estudiamos en este capítulo es

$$2^X = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ es compacto y } A \neq \emptyset\}.$$

Definimos a continuación una función distancia en esta colección de conjuntos.

Sean $A, B \in 2^X$. Fijemos un punto $a \in A$. Entonces

$$d(a, B) = \text{mín} \{d(a, b) : b \in B\}.$$

Este mínimo sí se alcanza ya que B es un conjunto compacto.

Ahora definimos $d(A, B)$ así:

$$d(A, B) = \text{máx} \{d(a, B) : a \in A\}.$$

Este máximo también está bien definido.

Observemos que este número $d(A, B)$ no es una distancia. Imagine el lector la siguiente situación: Sean A y B elementos de 2^X tales que $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces tenemos que $d(A, B) = 0$ y A no es igual a B .

A continuación explicamos cómo superar este problema.

Dados A y B elementos de 2^X , definimos

$$h(A, B) = \text{máx} \{d(A, B), d(B, A)\}.$$

La proposición 18.1 nos dice que $h(A, B)$ es una métrica, es decir, es una forma de medir distancias en 2^X . La demostración de este hecho no es difícil, así que en el ejercicio 18.1 el lector es invitado a dar los argumentos necesarios.

A la función $h(A, B)$ se le conoce como la *métrica o distancia de Hausdorff*.

Proposición 18.1. *La función $\mathbf{h} : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica en 2^X . Es decir, dados A, B y D en 2^X , \mathbf{h} cumple las siguientes condiciones:*

- $\mathbf{h}(A, B) \geq 0$,
- $\mathbf{h}(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$,
- $\mathbf{h}(A, B) = \mathbf{h}(B, A)$, y
- $\mathbf{h}(A, D) \leq \mathbf{h}(A, B) + \mathbf{h}(B, D)$.

Describimos a continuación otra forma de calcular la distancia $\mathbf{h}(A, B)$. Dados $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la *nube de radio ε alrededor de A* ,

$$N(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = \{x \in X : \text{existe } a \in A, d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Dados A y B en 2^X , sea

$$\mathbf{j}(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N(A, \varepsilon)\}. \quad (18.1)$$

Proposición 18.2. *Sean A y B dos elementos de 2^X . Entonces*

$$\mathbf{h}(A, B) = \mathbf{j}(A, B).$$

Demostración. Dados A y B en 2^X , sea $\delta = \mathbf{h}(A, B)$.

Como

$$d(A, B) \leq \delta \quad \text{y} \quad d(B, A) \leq \delta,$$

entonces para todo $\varepsilon > \delta$ se tiene que

$$A \subset N(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset N(A, \varepsilon).$$

Por lo tanto, $\mathbf{j}(A, B) \leq \delta$.

Por otro lado, y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $d(A, B)$ es igual a δ . Entonces existe $a_0 \in A$ tal que $d(a_0, B) = \delta$. De aquí que para todo $b \in B$, $d(a_0, b) \geq \delta$.

Así, si $A \subset N(B, \varepsilon)$, entonces $\varepsilon > \delta$. Esto implica que $\delta \leq \mathbf{j}(A, B)$.

Por lo tanto, $\mathbf{j}(A, B) = \delta = \mathbf{h}(A, B)$. \square

Los cálculos necesarios que justifican las afirmaciones contenidas en el siguiente ejemplo, son sencillos. En el ejercicio 18.2 el lector es invitado a hacerlos.

Ejemplo 18.3. Sean $X = [0, 1]$, $A = \{0\}$, $B = [0, \frac{1}{2}]$, $D = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Entonces:

$$h(A, X) = 1, \quad h(A, B) = \frac{1}{2}, \quad h(B, X) = \frac{1}{2}, \quad h(B, D) = \frac{1}{3}.$$

Antes de terminar esta brevísimas presentación de la métrica de Hausdorff conviene llamar la atención del lector hacia el siguiente hecho: La expresión (18.1) puede aplicarse en todo par de subconjuntos, no vacíos, de X (aún en el caso de que éstos no sean compactos). Sin embargo, resulta que h , que sí es una métrica en el hiperespacio 2^X , no lo es, en general, en el hiperespacio

$$\Lambda = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

18.2. La función inducida

Una función continua $f : X \rightarrow X$ nos da de *manera natural* una función en el hiperespacio 2^X ,

$$2^f : 2^X \rightarrow 2^X.$$

Esta nueva función tiene la siguiente regla de correspondencia: Sea $A \in 2^X$, entonces

$$2^f(A) = f(A) = \{y \in X : \text{existe } a \in A, f(a) = y\}. \quad (18.2)$$

Como $f : X \rightarrow X$ es continua, entonces 2^f está bien definida, es decir, $2^f(A) = f(A)$ es un conjunto compacto y, por lo tanto, pertenece a 2^X .

La función 2^f es conocida como la *función inducida* por f .

Para cada n en \mathbb{N} y para cada A en 2^X se tiene que

$$(2^f)^n(A) = f^n(A). \quad (18.3)$$

La igualdad (18.3) nos lleva al siguiente comentario: Al aplicar f varias veces, los puntos de X se van moviendo a lo largo de sus respectivas órbitas. La función 2^f se aplica a puntos de 2^X que, a su vez, representan subconjuntos compactos de X . Podemos intuir que al aplicar 2^f varias veces lo que se va moviendo se puede interpretar desde dos perspectivas:

- Desde el punto de vista del espacio 2^X , la sucesión

$$A, 2^f(A), (2^f)^2(A), \dots$$

es una sucesión de puntos. Todos ellos formando la órbita del punto $A \in 2^X$ bajo la función 2^f .

- Desde el punto de vista del espacio X , la sucesión

$$A, 2^f(A), (2^f)^2(A), \dots$$

se ve como una sucesión de conjuntos compactos,

$$A, f(A), f^2(A), \dots$$

Una sucesión de *manchas* recorriendo el espacio X .

Invitamos al lector a intentar mantener este doble punto de vista. Puede ser de gran utilidad al recorrer las distintas afirmaciones que haremos en lo sucesivo.

Nuestra primera tarea es confirmar que $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es una función continua en 2^X . La proposición 18.4 cumple este objetivo.

Proposición 18.4. *La función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Demostremos que existe $\delta > 0$ tal que si A y B son dos elementos de 2^X tales que

$$h(A, B) < \delta, \quad \text{entonces} \quad h(2^f(A), 2^f(B)) < \varepsilon.$$

Como $f : X \rightarrow X$ es continua y X es un espacio métrico compacto, entonces f es uniformemente continua en X . Existe $\delta^* > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $d(x_1, x_2) < \delta^*$, entonces $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Sea $\delta = \delta^*$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que:

$$h(A, B) < \delta.$$

Para cada $z \in f(A)$ existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que

$$f(a) = z \quad \text{y} \quad d(a, b) < \delta.$$

Entonces $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$, y por tanto,

$$f(a) \in N(f(B), \varepsilon) \quad \text{y} \quad f(A) \subset N(f(B), \varepsilon).$$

De manera análoga, se obtiene que:

$$f(B) \subset N(f(A), \varepsilon).$$

Por lo tanto,

$$h(f(A), f(B)) < \varepsilon.$$

□

18.3. Función inducida, un ejemplo

Dada la relación tan estrecha que existe entre las reglas de correspondencia de f y 2^f , la pregunta obligada es: ¿Cuál es la relación entre las propiedades dinámicas de f y las propiedades dinámicas de 2^f ?

Debemos advertir al lector que la pregunta es muy amplia. De hecho, es claro, que esta pregunta es, en esencia, muchas preguntas.

Sucede, a veces, que el estudio de un ejemplo ayuda de manera significativa a organizar la exposición de un tema que está tomando tintes, tal vez, demasiado abstractos. Lo afortunado del caso es que sí tenemos al alcance de nuestras manos un sistema dinámico discreto que puede asumir en estos momentos el importante papel de guía. Dedicaremos esta sección al estudio de este ejemplo.

Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función *Tienda*, y sea

$$2^{[0,1]} = \{A \subset [0, 1] : A \neq \emptyset, \quad A \text{ es compacto}\}.$$

Dados A y B en $2^{[0,1]}$, $h(A, B)$ denota la distancia de Hausdorff entre A y B , construida a partir de la distancia usual en \mathbb{R} .

La función inducida por T en $2^{[0,1]}$ la denotamos por 2^T .

Para cada A en $2^{[0,1]}$,

$$2^T(A) = \{T(a) : a \in A\} = T(A).$$

Mostraremos a continuación algunas propiedades dinámicas de la función

$$2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}.$$

Nuestra meta es demostrar que 2^T es, a su vez, una función caótica en el hiperespacio $2^{[0,1]}$.

Proposición 18.5. *El conjunto de puntos periódicos de la función inducida, $Per(2^T)$, es denso en $2^{[0,1]}$.*

Demostración. Sean $A \in 2^{[0,1]}$ y $\varepsilon > 0$.

Demostraremos que existen

$$B \in 2^{[0,1]} \quad \text{y} \quad M \in \mathbb{N},$$

tales que

$$h(A, B) < \varepsilon \quad \text{y} \quad (2^T)^M(B) = B.$$

Como A es compacto, existen k puntos en A , a_1, a_2, \dots, a_k , tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Como el conjunto de puntos periódicos de T es denso en $[0, 1]$, para cada i , $1 \leq i \leq k$, existe $b_i \in Per(T)$ tal que $|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Obsérvese que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k B(b_i, \varepsilon) = N(\{b_1, b_2, \dots, b_k\}, \varepsilon) \quad \text{y} \quad \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subset N(A, \varepsilon).$$

Por lo tanto, $h(A, \{b_1, b_2, \dots, b_k\}) < \varepsilon$.

Para cada i , $1 \leq i \leq k$ sea m_i el periodo del punto b_i .

Sea M el mínimo común múltiplo de la colección $\{m_1, \dots, m_k\}$. Entonces $T^M(b_i) = b_i$ para cada i , $1 \leq i \leq k$.

Sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$.

Tenemos, en resumen, lo siguiente:

$$h(A, B) < \varepsilon, \quad B \in 2^{[0,1]} \quad \text{y} \quad (2^T)^M(B) = T^M(B) = B.$$

Por lo tanto, $Per(2^T)$ es denso en $2^{[0,1]}$. □

Los siguientes tres lemas contienen herramientas que nos ayudarán en la demostración de la transitividad de la función $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$.

Lema 18.6. Sean a_1, a_2, b_1, b_2 cuatro puntos en $[0, 1]$, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen dos puntos c_1 y c_2 en $[0, 1]$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que:

- $h(\{a_1, a_2\}, \{c_1, c_2\}) < \varepsilon$, y
- $h(\{b_1, b_2\}, \{T^N(c_1), T^N(c_2)\}) < \varepsilon$.

Demostración. Consideremos los siguientes dos conjuntos:

$$[0, 1] \cap (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) = U, \quad [0, 1] \cap (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) = V.$$

Por el corolario 7.2, existen n_1, n_2 en \mathbb{N} tales que:

$$T^{n_1}(U) = [0, 1] \quad \text{y} \quad T^{n_2}(V) = [0, 1].$$

Sea $N = \max\{n_1, n_2\}$.

Como $T^N(U) = [0, 1]$, existe $c_1 \in U$ tal que

$$T^N(c_1) \in (b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \cap [0, 1].$$

De manera análoga existe $c_2 \in V$, $c_2 \neq c_1$, tal que

$$T^N(c_2) \in (b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon) \cap [0, 1].$$

Los puntos c_1 y c_2 cumplen lo prometido. □

Lema 18.7. Sean $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\} = A$ y $\{b_1, \dots, b_{n_2}\} = B$ dos colecciones de puntos en $[0, 1]$ tales que $n_1 \geq n_2$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe una colección de n_1 puntos, $\{c_1, c_2, \dots, c_{n_1}\} = C$, y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$h(A, C) < \varepsilon \quad \text{y} \quad h(B, (2^T)^N(C)) < \varepsilon.$$

Demostración. De forma análoga a la demostración del lema anterior, podemos encontrar n_1 puntos, c_1, \dots, c_{n_1} , tales que

$$\begin{aligned} c_1 &\in (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \cap [0, 1], \\ c_2 &\in (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) \cap [0, 1], \\ &\vdots \\ c_{n_1} &\in (a_{n_1} - \varepsilon, a_{n_1} + \varepsilon) \cap [0, 1], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T^N(c_1) &\in (b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \cap [0, 1], \\ T^N(c_2) &\in (b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon) \cap [0, 1], \\ &\vdots \\ T^N(c_{n_2-1}) &\in (b_{n_2-1} - \varepsilon, b_{n_2-1} + \varepsilon) \cap [0, 1], \\ \{T^N(c_{n_2}), \dots, T^N(c_{n_1})\} &\subset (b_{n_2} - \varepsilon, b_{n_2} + \varepsilon) \cap [0, 1]. \end{aligned}$$

La colección $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_1}\}$ cumple la condición del lema. \square

La demostración del siguiente lema es análoga a la demostración del lema 18.7, ver ejercicio 18.4.

Lema 18.8. Sean $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\} = A$ y $\{b_1, \dots, b_{n_2}\} = B$ dos colecciones de puntos en $[0, 1]$ tales que $n_1 < n_2$. Sea $\varepsilon > 0$.

Entonces existe una colección de n_2 puntos, $\{c_1, c_2, \dots, c_{n_2}\} = C$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbf{h}(A, C) < \varepsilon$, y $\mathbf{h}(B, (2^T)^N(C)) < \varepsilon$.

Ahora sí ya estamos listos para demostrar la transitividad de la función inducida por la *Tienda*.

Proposición 18.9. La función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es transitiva en el hiperespacio $2^{[0,1]}$.

Demostración. Sean A, B dos elementos de $2^{[0,1]}$ y sea $\varepsilon > 0$.

Para convencernos de que 2^T es transitiva es suficiente demostrar que existe un conjunto compacto C , no vacío, y existe una $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mathbf{h}(A, C) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \mathbf{h}(B, (2^T)^N(C)) < \varepsilon.$$

Como A y B son conjuntos compactos, existen dos colecciones de puntos:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\} \subset A, \quad \text{y} \quad \{b_1, b_2, \dots, b_{n_2}\} \subset B,$$

tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B\left(a_i; \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{y} \quad B \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B\left(b_i; \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por los lemas 18.7 y 18.8, existe una colección de M puntos, digamos $\{c_1, c_2, \dots, c_M\}$, donde $M = \max\{n_1, n_2\}$, y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$h(\{a_1, \dots, a_{n_1}\}, \{c_1, \dots, c_M\}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

y

$$h(\{b_1, \dots, b_{n_2}\}, \{T^N(c_1), \dots, T^N(c_M)\}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $C = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$.

Observemos que

$$h(A, C) < \varepsilon \quad \text{y} \quad h(B, (2^T)^N(C)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto la función 2^T es transitiva en $2^{[0,1]}$. □

Ya comentamos, en el capítulo 9, que la densidad de puntos periódicos y la transitividad, en espacios métricos perfectos, implican la sensibilidad a las condiciones iniciales. No es difícil de demostrar que $2^{[0,1]}$ es perfecto (ver ejercicio 18.6). Por tanto la función $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es sensible a las condiciones iniciales.

Daremos a continuación otra demostración de la sensibilidad a las condiciones iniciales de la función $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$.

Proposición 18.10. *La función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es sensible a las condiciones iniciales en $2^{[0,1]}$.*

Demostración. Sabemos que la función T tiene dos puntos fijos: 0 y $\frac{2}{3}$.

Gracias al ejercicio 7.8, capítulo 7, podemos concluir que los siguientes dos conjuntos son densos en el intervalo $[0, 1]$:

$$\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(0) \quad \text{y} \quad \Theta = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}\left(\frac{2}{3}\right).$$

Sean $A \in 2^{[0,1]}$ y $\varepsilon > 0$.

Demostraremos que existen $F \in 2^{[0,1]}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$h(A, F) < \varepsilon \quad \text{y} \quad h\left((2^T)^N(A), (2^T)^N(F)\right) \geq \frac{1}{3}.$$

Como A es un conjunto compacto, existe una colección finita de puntos

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset A, \quad \text{tal que} \quad A \subset \bigcup_{i=1}^n B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Dado que los conjuntos Λ y Θ son densos en $[0, 1]$, existen dos colecciones de puntos en $[0, 1]$, $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, tales que:

- $D \subset \Lambda$ y $E \subset \Theta$, y
- para toda i , $1 \leq i \leq n$, $|d_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|e_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^N(\{d_1, \dots, d_n\}) = \{0\} \quad \text{y} \quad T^N(\{e_1, \dots, e_n\}) = \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

Así obtenemos lo siguiente: $\mathbf{h}(A, D) < \varepsilon$, $\mathbf{h}(A, E) < \varepsilon$, y

$$\mathbf{h}\left((2^T)^N(D), (2^T)^N(E)\right) = \mathbf{h}\left(\{0\}, \left\{\frac{2}{3}\right\}\right) = \frac{2}{3}.$$

Entonces,

$$\mathbf{h}\left(\left((2^T)^N(A)\right), (2^T)^N(D)\right) \geq \frac{1}{3}$$

o

$$\mathbf{h}\left((2^T)^N(A), (2^T)^N(E)\right) \geq \frac{1}{3}.$$

En el primer caso, tomamos $F = D$; en el segundo, $F = E$. □

En el siguiente teorema se resume lo hecho en esta sección.

Teorema 18.11. *La función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es caótica en el hiperespacio $2^{[0,1]}$.*

18.4. Un punto de vista más general

A continuación haremos algunos comentarios sobre las posibles generalizaciones de los resultados desarrollados en la sección 18.3.

Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X .

Sea $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ la función inducida por f en el hiperespacio 2^X .

Proposición 18.12. *Si $Per(f)$ es un conjunto denso en X , entonces $Per(2^f)$ es un conjunto denso en 2^X .*

Demostración. Los argumentos dados en la proposición 18.5 se pueden seguir aquí paso a paso. Invitamos al lector a hacer los ajustes necesarios. \square

El siguiente ejemplo muestra que si f es transitiva en X , esto no implica necesariamente que 2^f sea transitiva en el hiperespacio 2^X .

Sea $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función lineal por partes definida por $g(0) = \frac{1}{2}$, $g(\frac{1}{4}) = 1$, $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $g(1) = 0$, ver ejemplo 3.8.

Las gráficas de g y g^2 se pueden ver en la figura 18.1.

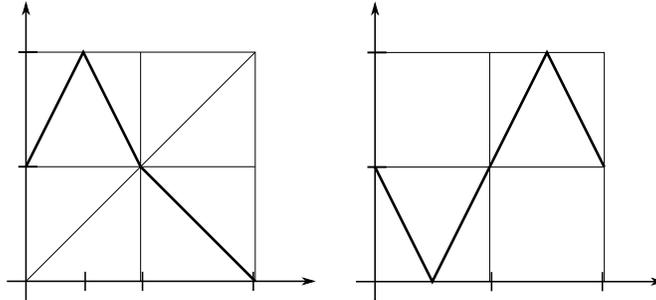


FIGURA 18.1: Gráficas de g y g^2 .

Como $g([0, \frac{1}{2}]) = [\frac{1}{2}, 1]$ y $g([\frac{1}{2}, 1]) = [0, \frac{1}{2}]$, se tiene que

$$g^2\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{y} \quad g^2\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

La dinámica de g^2 en $[\frac{1}{2}, 1]$ es, en esencia, la misma que la dinámica de T , la *Tienda*, en $[0, 1]$. Así, si un intervalo abierto (a, b) , $a < b$, está contenido en $[\frac{1}{2}, 1]$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(g^2)^N(a, b) = \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Esta información nos permitirá demostrar que g es transitiva en $[0, 1]$.

Sean U y V dos conjuntos abiertos, no vacíos, en $[0, 1]$.

Si $U \cap [\frac{1}{2}, 1] \neq \emptyset$, entonces existen a, b en $[\frac{1}{2}, 1]$, $a < b$, tal que $(a, b) \subset U$.

De aquí que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[\frac{1}{2}, 1] \subset g^{2n_0}(U)$.

Como

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset g^{2n_0}(U) \quad \text{y} \quad \left[0, \frac{1}{2}\right] \subset g^{2n_0+1}(U),$$

entonces una de estas dos opciones es válida:

$$g^{2n_0}(U) \cap V \neq \emptyset \quad \text{ó} \quad g^{2n_0+1}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

En cualquier caso, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g^N(U) \cap V \neq \emptyset$.

Si $U \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right] = \emptyset$, entonces U está contenido en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $g(U)$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Además $\text{int}(g(U)) \neq \emptyset$.

Por lo tanto existen a y b en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $a < b$, tales que

$$(a, b) \subset g(U) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Como existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(g^2)^{n_0}(a, b) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, se sigue que

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] = g^{2n_0+1}(U) \quad \text{y} \quad g^{2n_0+2}(U) = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Es decir, nuevamente existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$g^N(U) \cap V = \emptyset.$$

Por lo tanto g es transitiva en $[0, 1]$.

Ahora lo interesante es mostrar que $2^g : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ no es transitiva en $2^{[0,1]}$.

Observemos primero que si A es un conjunto compacto contenido en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, entonces $\mathbf{h}(A, [0, 1]) \geq \frac{1}{2}$ (ya que $d(1, A) \geq \frac{1}{2}$). De manera análoga, si A es un conjunto compacto tal que $A \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, entonces $\mathbf{h}(A, [0, 1]) \geq \frac{1}{2}$.

Consideremos ahora los siguientes conjuntos:

$$U = \left\{ A \in 2^{[0,1]} : \mathbf{h}(A, \{0\}) < \frac{1}{2} \right\},$$

$$V = \left\{ A \in 2^{[0,1]} : \mathbf{h}(A, [0, 1]) < \frac{1}{2} \right\}.$$

Es inmediato que U y V son conjuntos abiertos en $2^{[0,1]}$.

Observemos que si $A \in U$, entonces $A \subset [0, \frac{1}{2}]$, y para toda n par, se tiene que

$$g^n(A) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{y} \quad g^{n+1}(A) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Por tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$h(g^n(A), [0, 1]) \geq \frac{1}{2}.$$

Es decir, $f^n(A)$ nunca es elemento de V .

De aquí se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(2^g)^n(U) \cap V = \emptyset.$$

Por tanto $2^g : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ no es transitiva en $2^{[0,1]}$.

El ejemplo anterior también nos dice que la siguiente implicación no es cierta en general: Si $f : X \rightarrow X$ es caótica según Devaney, entonces la función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es caótica según Devaney.

La condición de sensibilidad a las condiciones iniciales es estudiada en [39]. Ahí se muestra el ejemplo de una función continua $f : X \rightarrow X$, X métrico y compacto, sensible en X tal que la función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ no es sensible en 2^X .

18.5. De lo colectivo a lo individual

Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua en X . Las siguientes proposiciones contienen resultados donde se estudia la influencia de la dinámica de $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ en la dinámica de f .

Proposición 18.13. *Si la función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es transitiva en 2^X , entonces $f : X \rightarrow X$ es transitiva en X .*

Demostración. Sean a y b dos puntos en X , y sea $\varepsilon > 0$.

Como 2^f es transitiva en 2^X , existen $A \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$h(\{a\}, A) < \varepsilon \quad \text{y} \quad h(\{b\}, (2^f)^N(A)) < \varepsilon.$$

Tomemos un punto $x \in A$.

Entonces $d(a, x) < \varepsilon$ y $d(b, f^N(x)) < \varepsilon$.

Por lo tanto f es transitiva en X . □

Proposición 18.14. *Si la función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ es sensible a las condiciones iniciales en 2^X , entonces $f : X \rightarrow X$ es sensible a las condiciones iniciales en X .*

Demostración. Sea $\varepsilon_0 > 0$ una constante de sensibilidad para 2^f .

Para todo $A \in 2^X$ y para todo $\delta > 0$, existen $B \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbf{h}(A, B) < \delta$ y

$$\mathbf{h}\left(\left(2^f\right)^N(A), \left(2^f\right)^N(B)\right) \geq \varepsilon_0.$$

Sean $a \in X$ y $\delta > 0$. Sean $B \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$, tales que

$$\mathbf{h}(\{a\}, B) < \delta \quad \text{y} \quad \mathbf{h}\left(\left(2^f\right)^N(\{a\}), \left(2^f\right)^N(B)\right) \geq \varepsilon_0.$$

Entonces existe $x_0 \in B$ tal que

$$d(a, x_0) < \delta \quad \text{y} \quad d(f^N(x_0), f^N(a)) \geq \varepsilon_0.$$

Esto demuestra la sensibilidad de f en X . □

La última propiedad que nos interesa discutir es la densidad del conjunto de los puntos periódicos.

En términos generales, la densidad de $Per(2^f)$ en 2^X no implica la densidad de $Per(f)$ en X . Esta situación tiene algo de sorprendente.

Supongamos que el conjunto $Per(2^f)$ es denso en 2^X . Dados un punto en X , digamos x_0 , y un valor positivo muy pequeño, digamos ε . Entonces existe un conjunto compacto A y un número natural N tales que

$$\mathbf{h}(\{x_0\}, A) < \varepsilon \quad \text{y} \quad f^N(A) = A.$$

Este conjunto compacto A es periódico bajo 2^f y está contenido en la bola $B(x_0, \varepsilon)$. Y este procedimiento es posible para cualquier $\varepsilon > 0$. Aún así, esto no implica la existencia de un punto periódico de f en una vecindad de x_0 .

Antes de ofrecer al lector el ejemplo de un espacio métrico compacto X y una función definida en él, $f : X \rightarrow X$, donde densidad de $Per(2^f)$ en el hiperespacio 2^X no implique la densidad de $Per(f)$ en X , presentamos un resultado en positivo.

Resulta que si el espacio donde estamos trabajando es el intervalo $[0, 1]$ entonces densidad de puntos periódicos en el hiperespacio sí implica densidad de puntos periódicos en $[0, 1]$.

Proposición 18.15. *Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Si 2^f tiene densidad de puntos periódicos en $2^{[0,1]}$, entonces f tiene densidad de puntos periódicos en $[0, 1]$.*

Demostración. Sean $0 \leq a < b \leq 1$.

Sean $x_0 = \frac{a+b}{2}$ y $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Así $(a, b) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Como $2^f : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ tiene densidad de puntos periódicos, existen $A \in 2^{[0,1]}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$h(\{x_0\}, A) < \varepsilon \quad \text{y} \quad f^N(A) = A.$$

Por tanto, $A \subset (a, b)$. Sean $\alpha = \min A$ y $\beta = \max A$.

Tenemos $a < \alpha \leq \beta < b$. Como $f^N(A) = A$, entonces

$$f^N(\alpha) \geq \alpha \quad \text{y} \quad f^N(\beta) \leq \beta.$$

Y dado que f^N es una función continua en el intervalo $[0, 1]$, existe $c \in [\alpha, \beta]$, tal que $f^N(c) = c$.

Por lo tanto $Per(f) \cap (a, b) \neq \emptyset$. □

Teorema 18.16. *Si la función inducida $2^f : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ es caótica en el hiperespacio $2^{[0,1]}$, entonces $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es caótica en $[0, 1]$.*

Demostración. Este resultado es consecuencia inmediata de las proposiciones 18.13, 18.14 y 18.15. □

18.6. Puntos periódicos, un ejemplo

Ahora nuestra meta es construir el ejemplo prometido.

Mostraremos en esta sección un espacio X , métrico, compacto y conexo, junto con una función $f : X \rightarrow X$ tales que el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ sí forma un conjunto denso en 2^X , pero $Per(f)$ no es denso en X .

Sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. En notación de números complejos, S^1 es el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. La métrica en S^1 es la que hereda de \mathbb{C} . El diámetro de S^1 es 2.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la función $f_n : S^1 \rightarrow S^1$ dada por:

$$f_n(z) = f_n(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + \frac{2\pi}{n})}.$$

Es decir, cada f_n es una rotación en S^1 de ángulo $\frac{2\pi}{n}$.

Es inmediato que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Per(f_n) = S^1$, y para todo $z \in S^1$, el periodo de z bajo f_n es n .

Sea $X = \prod_{n=1}^{\infty} S^1$. Es decir,

$$X = \{ \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots) : t_n \in S^1, \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \}.$$

Si d representa la métrica en S^1 , entonces la métrica en X está dada así:

$$\mathbf{d}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(t_n, s_n)}{2^n}.$$

Sea $f : X \rightarrow X$ dada por:

$$f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, t_3, \dots) = (f_1(t_1), f_2(t_2), f_3(t_3), \dots). \quad (18.4)$$

La demostración de la siguiente proposición se puede consultar en el libro de Hocking y Young, [25].

Proposición 18.17. Sean $X = \prod_{n=1}^{\infty} S^1$ y $f : X \rightarrow X$ la función definida por (18.4). Entonces:

- f es continua en X .
- X es compacto y conexo.

Proposición 18.18. Sean $X = \prod_{n=1}^{\infty} S^1$ y $f : X \rightarrow X$ la función definida por (18.4). Entonces f no tiene puntos periódicos.

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que existen $\mathbf{x} \in X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f^N(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n^N(x_n) = x_n$.

Como x_n es de periodo n bajo f_n , n divide a N para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible. \square

En la siguiente proposición demostramos que la función inducida en el hiperespacio 2^X , $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$, sí tiene muchísimos puntos periódicos, tantos que forman un conjunto denso en 2^X .

Proposición 18.19. Sean $X = \prod_{n=1}^{\infty} S^1$ y $f : X \rightarrow X$ la función definida por (18.4). El conjunto $Per(2^f)$ es denso en 2^X .

Demostración. Paso uno. Sean $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, \dots)$, un punto en X , y $\varepsilon > 0$.

El conjunto $\{\mathbf{t}\}$ es un elemento de 2^X .

Demostraremos que existen $E \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$(2^f)^N(B) = B \quad \text{y} \quad \mathbf{h}(\{\mathbf{t}\}, B) < \varepsilon.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\text{diam}(S^1)}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea N el mínimo común múltiplo de $\{1, 2, 3, \dots, M\}$.

Observemos que para cada t_i , $1 \leq i \leq M$, se tiene que $f_i^N(t_i) = t_i$ ya que la coordenada t_i es un punto periódico de la rotación f_i de periodo i .

Como las primeras M coordenadas de \mathbf{t} y $f^N(\mathbf{t})$ coinciden, se tiene que

$$\mathbf{d}(\hat{\mathbf{t}}, f^N(\hat{\mathbf{t}})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De hecho tenemos un poco más: Para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene que \mathbf{t} y $f^{jN}(\mathbf{t})$ coinciden en las primeras M coordenadas, así:

$$\mathbf{d}(\mathbf{t}, f^{jN}(\mathbf{t})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto implica la órbita $o(\mathbf{t}, f^N)$ está contenida en la bola $B(\mathbf{a}, \frac{\varepsilon}{2})$.

Entonces el omega conjunto límite $\omega(\mathbf{t}, f^N)$ está contenido en la cerradura de esa misma bola.

Sea $E = \omega(\mathbf{t}, f^N)$.

Es inmediato que E es un subconjunto compacto de X y que $f^N(E) = E$.

Además, como la distancia de Hausdorff de $\{\mathbf{t}\}$ a E es $\leq \frac{\varepsilon}{2}$, se concluye que

$$\mathbf{h}(\{\mathbf{t}\}, E) < \varepsilon, \quad E \in Per(2^f).$$

Paso dos. Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$.

Como A es compacto, existen L puntos en A , $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_L$, tales que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^L B\left(\mathbf{a}_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por cada punto \mathbf{a}_i , $1 \leq i \leq L$ consideramos un conjunto compacto E_i y un número natural N_i tales que

$$\mathbf{h}(\{\mathbf{a}_i\}, E_i) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad f^{N_i}(E_i) = E_i.$$

Sea $E = \bigcup_{i=1}^L E_i$ y sea N igual al mínimo común múltiplo de los números (N_1, \dots, N_L) .

Entonces $f^N(E) = E$, y $\mathbf{h}(A, E) < \varepsilon$. □

La función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ que acabamos de estudiar no es transitiva (ver ejercicio 18.8).

Sin embargo es posible encontrar un espacio compacto X y construir una función $f : X \rightarrow X$ donde 2^f sí tiene densidad de puntos periódicos y es transitiva en 2^X , pero f no tiene densidad de puntos periódicos en X (ver [19]). Este ejemplo muestra que es posible que $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ sí sea caótica en 2^X mientras que $f : X \rightarrow X$ no es caótica en X .

Ejercicios

Todas las funciones consideradas en esta sección son continuas. La letra X representa un espacio métrico compacto. Sean $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en el hiperespacio 2^X y $A \in 2^X$. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{h}(A_n, A) = 0,$$

escribimos $\lim A_n = A$.

EJERCICIO 18.1. Demostrar la proposición 18.1.

EJERCICIO 18.2. Demostrar las afirmaciones contenidas en el ejemplo 18.3.

EJERCICIO 18.3. Sean $X = [0, 1]$ y $A = \{0\}$. Describir los siguientes conjuntos:

- $\mathbf{E} = \{B \in 2^X : \mathbf{h}(A, B) = 1\}$.
- $\mathbf{F} = \{B \in 2^X : \mathbf{h}(A, B) = \frac{1}{2}\}$.

- $\mathbf{G} = \{B \in 2^X : h(A, B) < 1\}$.
- $\mathbf{H} = \{B \in 2^X : h(X, B) < 1\}$.

EJERCICIO 18.4. Demostrar el lema 18.8.

EJERCICIO 18.5. Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos el hiperespacio $F_n(X)$:

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : |A| \leq n\}.$$

Aquí $|A|$ representa la cardinalidad del conjunto A . A este hiperespacio se le conoce como el *n-producto simétrico* de X .

Demostrar que $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ forma un conjunto denso en 2^X .

EJERCICIO 18.6. Demostrar que el hiperespacio $2^{[0,1]}$ es un conjunto perfecto.

EJERCICIO 18.7. Cada una de las siguientes sucesiones está contenida en el hiperespacio $2^{[0,1]}$. En cada caso calcular el $\lim A_n$. Si se considera que el límite no existe, argumentar.

- $A_n = [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$.
- $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$.
- $A_{n+1} = A_n \cup \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$, $A_1 = \{1\}$.

EJERCICIO 18.8. Sean $X = \prod_{n=1}^{\infty} S^1$ y $f : X \rightarrow X$ la función dada por la fórmula (18.4).

Demostrar que la función inducida $2^f : 2^X \rightarrow 2^X$ no es transitiva.

EJERCICIO 18.9. Sea $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ la función inducida por la función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Sea $A \in 2^{[0,1]}$,

$$A = \{0\} \cup \left\{ x = \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Obsérvese que $2^T(A) = A$: Demostar que para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $B \in 2^{[0,1]}$, $B \subset A$, tal que $B \in Per(2^T)$ de periodo N .

EJERCICIO 18.10. Sea $2^T : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^{[0,1]}$ la función inducida por la función *Tienda*, $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Como 2^T es transitiva y $2^{[0,1]}$ es un compacto, entonces existe $A \in 2^{[0,1]}$ tal que su $o(A, 2^T)$ forma un conjunto denso en el hiperespacio $2^{[0,1]}$. Es decir, A es un conjunto compacto, contenido en el intervalo $[0, 1]$, tal que dado cualquier compacto B , $B \subset [0, 1]$, y dado cualquier valor positivo ε , existe n tal que la distancia de Hausdorff de $T^n(A)$ a B es menor que ε .

Sea A un conjunto compacto con órbita densa bajo 2^T . Demostrar lo siguiente:

- A es un conjunto de cardinalidad infinita.
- A no contiene puntos periódicos bajo la función T .
- Para todo a en A se tiene que $o(a, T)$ forma un conjunto denso en $[0, 1]$.
- Si $a \in A$, entonces a es un número irracional.
- A es totalmente desconexo.

Más información sobre este conjunto A se puede encontrar en [23].

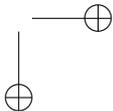
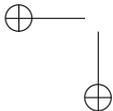
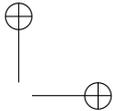
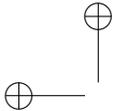
EJERCICIO 18.11. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en el hiperespacio $2^{[0,1]}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$. Sea $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Demostrar que

$$\lim A_n = A.$$

EJERCICIO 18.12. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en el hiperespacio $2^{[0,1]}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. Sea $A = cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Demostrar que

$$\lim A_n = A.$$

FIN



Bibliografía

- [1] Acosta G., Illanes A. y Méndez H., *The transitivity of induced maps*, Topology and its Applications, **156** (2009), 1013-1033.
- [2] Adler R. L., Konheim A. G. y McAndrew M. H., *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **114** (1965), 309-319.
- [3] Alligood K., Sauer T. D. y Yorke J. A., *CHAOS, an Introduction to Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1996.
- [4] Alsedá L., Llibre J. y Misiurewicz M., *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, Series in Nonlinear Dynamics **5**, World Scientific, 1993.
- [5] Arenas G. y Sabogal S., *Una introducción a la geometría fractal*, Ediciones UIS, Bucaramanga, Colombia, 2011.
- [6] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G. y Stacey P., *On Devaney's Definition of Chaos*, American Mathematical Monthly **99** (1992), 332-334.
- [7] Barnsley M. F., *Fractals everywhere*. Second Edition, Academic Press, Cambridge, 1993.
- [8] Block L. S. y Coppel W. A., *Dynamics in One Dimension*. Lecture Notes in Math. 1513, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [9] Block L. S., Guckenheimer J., Misiurewicz M. y Young L. S., *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps*, Global theory of dynamical systems, 18-34, Lectura Notes in Math. **819**, Springer, Berlín, 1980.

- [10] Bowen R., *Topological entropy and axiom A*, Global Analysis (1968), Proc. Sympos. Pure Math., **XIV**, Berkeley, Calif., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [11] Braun M., *Differential equations and their applications*. Springer, 1992.
- [12] Collet P. y Eckmann J. P., *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhauser, 1980.
- [13] Denker M., Grillenberger Ch. y Sigmund K., *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Lectures Notes in Math. 527, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [14] Devaney R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
- [15] Devaney R. L., *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiments*, Addison-Wesley, Redwood City, 1992.
- [16] Douady A. y Hubbard J., *On the Dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sc. E. N. S. (4) **18** (1985), 287-343.
- [17] Bau-Sen Du, *A Simple Proof of Sharkovsky’s Theorem*, Amer. Math. Monthly, **111** (2004), 595-599.
- [18] Espinosa B., *Introducción a la entropía topológica*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.
- [19] García J. L., Kwietniak D., Lampart M., Oprocha P. y Peris A., *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal., **71** (2009), no. 1-2, 1-8.
- [20] Graczyk J. y Swiatek G., *Generic Hyperbolicity in the Logistic Family*, Annals of Mathematics (2), **146**, no. 1, (1997), 1-52.
- [21] Gutiérrez J. L. y Sánchez F., *Matemáticas para las ciencias naturales*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, No. 11, SMM, México, 1998.
- [22] Hassalblatt B y Katok A., *.A first course in Dynamics*”, Cambridge University Press, 2003.
- [23] Hernández P., King J. y Méndez H., *Compact sets with dense orbit in 2^X* , Topology Proceedings, **40** (2012), 319-330.

- [24] Hirsch M., Smale S. y Devaney R. L., *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Academic Press, 2003.
- [25] Hocking J. G. y Young G. S., *Topology*, Dover Publications, New York, 1996.
- [26] Holmgren R. A., *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Segunda Edición, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [27] Hutchinson J. E., *Fractals and self-similarity*, Indiana University Mathematics Journal, **30** (1981), 713-747.
- [28] Li T. Y. y Yorke J. A., *Period 3 implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975), 985-992.
- [29] May R., *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, **261** (1976), 459-467.
- [30] Méndez H., *Iteración de funciones. Una introducción a los sistemas dinámicos discretos*, Vínculos Matemáticos, **2000-4**, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.
- [31] Méndez H., *On intervals, sensitivity implies Chaos*, Revista Integración, **21**, Nos. 1 y 2, (2003), 15-23.
- [32] Méndez H., *Is the process of finding f' chaotic?*, Revista Integración, **22**, Nos. 1 y 2, (2004), 37-41.
- [33] Nadler S. B., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. **158**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [34] Nadler S. B., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Vol. **18**, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.
- [35] Robinson C., *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida, 1995.
- [36] Royden H. L., *Real Analysis*, MacMillan Publishing, New York, 1968.

- [37] Ruelle S., *Chaos for continuous interval maps*. Notas disponibles en la siguiente dirección electrónica:
<http://www.math.u-psud.fr/~ruette/abstracts/abstract-chaos-int.html>
- [38] Schori R. M. y West J. E., *The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert Cube*, Trans. Amer. Math. Soc., **213** (1975), 217-235.
- [39] Sharma P. y Nagar A., *Inducing sensitivity on hyperspaces*, Topology and its Applications, **157** (2010), 2052-2058.
- [40] Spivak M., *Calculus*, Segunda Edición, Editorial Reverte, México, D.F., 1999.
- [41] Spivak M., *Cálculo en Variedades*, Editorial Reverte, España, 1968.
- [42] Stefan P., *A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line*, Comm. Math. Phys., **54** (1977), 237-248.
- [43] Straffin P. D., *Periodic Points of Continuous Functions*, Mathematics Magazine, **51** (1978), 99-105.
- [44] Vellekoop M. y Berglund R., *On Intervals, Transitivity = Chaos*, Amer. Math. Monthly, **101** (1994), 353-355.
- [45] Walters P., *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Math. 79, Springer Verlag, New York, 1982.
- [46] Páginas en internet que ofrecen software (libre) muy útil a la hora de hacer *experimentos* con la computadora:
Funciones cuadrática, cúbica, logística, tienda y panadero:
<http://users.dickinson.edu/~richesod/math271/Bifurcations.html>
Diagramas de bifurcación:
<http://math.bu.edu/DYSYS/applets/OrbitDgm.html>
y
<http://www.emporia.edu/~hyanik/Chaos/Bifurcation.htm>
Ejemplos de sistemas dinámicos:

BIBLIOGRAFÍA

313

*[http://www.dean.usma.edu/math/research/mathtech/
java/DDSPProject/ddsproject.html](http://www.dean.usma.edu/math/research/mathtech/java/DDSPProject/ddsproject.html)*

Un link de links interesantes:

<http://ecademy.agnesscott.edu/~jwiseman/mat311/links.html>

Las páginas de Robert L. Devaney:

<http://math.bu.edu/people/bob/>

y

<http://math.bu.edu/DYSYS/applets/>

Índice analítico

- Órbita de un punto, 7
- Análisis gráfico, 17
- Atractora
 - órbita, 127
- Bifurcación, 213
 - de duplicación de periodo, 222, 227
 - del tenedor, 241
 - tangente, 237
 - transcrítica, 241
- Bola de radio ε , 69
- Caos, 132
- Cascada infinita, 230
- Cerradura de un conjunto, 70
- Ciclo
 - de longitud m , 62
 - de Stefan, 48, 65
- Circunferencia unitaria, 76
- Componente conexa, 90
- Conjugación topológica, 149, 159
- Conjunto
 - abierto, 70
 - acotado, 71
 - atractor, 194
 - cerrado, 70
 - compacto, 72
 - conexo, 74
 - de Cantor, 85, 141, 186
 - de Julia, 138
 - de los puntos atrapados, 137
 - denso, 71
 - denso en ninguna parte, 91, 117
 - estable, 153
 - estrictamente invariante, 138
 - finito, 74
 - fractal, 93
 - infinito, 74
 - infinito no numerable, 75
 - infinito numerable, 75
 - invariante, 138
 - minimal, 210
 - perfecto, 90
 - residual, 120
 - totalmente desconexo, 90
- Constante de sensibilidad, 131
- Contracción, 117
- Cubierta abierta, 72, 264
- Cubo de Hilbert, 154, 285
- Cuenca de atracción, 81, 126
- Densa
 - órbita, 118
- Diagrama de bifurcaciones, 243
- Digráfica

- de una órbita periódica, 58
- Duplicadora, 51
- Ecuaciones de recurrencia, 7
- Entropía, 272
 - función identidad, 272
 - función Logística, 277
 - función Tienda, 276
 - rotación racional, 274
- Entropía topológica, 271
- Equivalencia topológica, 149, 159
- Escalera del diablo, 89
- Espacio de dos símbolos, 143
- Espacio métrico, 9
 - completo, 76, 114
- Estable
 - órbita, 128
- Exterior de un conjunto, 70
- Familia
 - arcotangente, 241
 - cuadrática, 213
 - de las Tiendas, 108, 155, 180, 259
 - logística, 152, 213, 243
- Frontera de un conjunto, 70
- Función
 - biyectiva, 23
 - caótica, 132
 - corrimiento, 148
 - inducida, 290
 - inyectiva, 23
 - lineal por partes, 19
 - Logística, 24
 - sensible a las condiciones iniciales, 131
 - suprayectiva, 23
 - Tienda, 20, 95, 131
 - transitiva, 111
- Gráfica
 - de Markov, 58
- Hiperespacio, 288
- Hiperespacio de los compactos, 288
- Homeomorfismo, 23
- Imagen inversa, 72, 266
- Interior de un conjunto, 70
- Intervalo
 - abierto, 12
 - acotado, 12
 - cerrado, 12
- Isometría, 209
- Iteración de una función, 9
- Itinerario de un punto, 143
- límite
 - inferior, 269
 - superior, 269
- Lyapunov estable
 - órbita, 129
- Máquina de sumar, 195
- Métrica
 - de Hausdorff, 289
- Modelo
 - lineal, 3
 - logístico, 4, 6
- Multiplicador de una órbita, 228
- Omega conjunto límite, 169
- P-gráfica, 68
- Periódica
 - órbita, 18
- Periodo, 18

- Preperiódica
 - órbita, 18
- Punto
 - aislado, 71
 - aperiódico, 177
 - de acumulación, 70
 - de adherencia, 70
 - eventualmente periódico, 18
 - exterior, 70
 - frontera, 70
 - interior, 70
 - límite, 169
 - periódico, 18
 - preperiódico, 18
- Punto fijo, 10
 - atractor, 14, 126
 - estable, 127
 - neutro, 16
 - no estable, 128
 - repulsor, 14, 126
 - súper atractor, 16
- Refinamiento de una cubierta, 264
- Repulsora
 - órbita, 127
- Shift map, 148
- Sistema dinámico caótico, 132
- Sistema dinámico discreto, 7, 10
- Subcubierta, 72
- Subsucesión, 77, 114
- Sucesión, 75
 - acotada, 75, 78
 - convergente, 75
 - creciente, 78
 - de Cauchy, 76
 - decreciente, 78
 - divergente a infinito, 77
- Sumadora, 195
- Teorema
 - de Baire, 115
 - de Li y Yorke, 32
 - de Sharkovskii, 39, 41, 58, 100, 191
 - de Stefan, 65
 - del valor intermedio, 12
- Vecindad, 14
- Ventana, 251
 - de periodo 3, 251
- Zona caótica, 250