

La Ecuación Logística

Irene Peral Walias

1. Introducción y preliminares

Cuando se comenzó el estudio de la dinámica de poblaciones por medio del modelo de Malthus se comprobó que no se ajustaba a la realidad. Ninguna población puede crecer indefinidamente a una tasa constante. Sólo para casos de cultivos de bacterias en cortos periodos de tiempo en los que el sustrato es suficiente, el modelo *malthusiano* puede tenerse en cuenta.

Cuando una población llega a ser demasiado numerosa, aparecen restricciones del medio en forma de limitaciones de espacio, de recursos, etc. , que haran disminuir la tasa de crecimiento o, incluso, que la harán negativa provocando que la población disminuya. Es más realista suponer que el medio sólo puede sostener de manera estable un máximo K de población (la capacidad de soporte del medio), de modo que si

- $x(t) > K$, la tasa sería negativa y la población decrecería acercándose a K .
- Si $x(t) = K$ la tasa sería nula y, por tanto, la población constante.
- Si $x(t) < K$, la tasa sería positiva , creciendo entonces la población, aunque más lentamente cuanto más próxima esté del valor de K .

Una forma de reflejar matemáticamente este comportamiento es imponer que la tasa de crecimiento x'/x sea proporcional a la diferencia $(K - x)$. Se tiene así la denominada ecuación logística(clásica), que reformulamos como,

$$x' = Ax(1 - x).$$

Es fácil ver que en este caso hay dos equilibrios, $x = 0$ y $x = 1$, inestable y estable respectivamente. Un modelo más complicado es cuando se admite

difusión espacial, en este caso la ecuación logística más simple, también conocida como *ecuación de Fisher-Kolmogoroff*, se escribe, en su versión más simple, como

$$u_t - D\Delta u = Au(1 - u).$$

Véase [1] y [9]. En éste trabajo nos limitamos a la ecuación diferencial logística clásica.

Otros modelos de *Ecuación logística* más general son, por ejemplo,

$$x' = x^\alpha(1 - x)^\beta,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que no se abordan en este estudio.

En el caso de la ecuación logística clásica haremos el estudio de la ecuación discreta, es decir, con paso de tiempo unitario. A tal efecto, precisaremos algunos conceptos que van a ser usados de forma sistemática.

Sea

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

una función suficientemente regular.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ definimos $x_1 = f(x_0)$ y en general $x_{k+1} = f(x_k)$.

Se dice que x es un punto de equilibrio para f , o que es un punto fijo, si $x = f(x)$.

Definición 1.1 *Se dice que un equilibrio \hat{x} es estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\text{dist}(x_0, \hat{x}) < \delta$ entonces $\text{dist}(f^k(x_0), \hat{x}) < \varepsilon$ para todo $k > 0$.*

Definición 1.2 *Se dice que un equilibrio \hat{x} es asintóticamente estable si satisface estas dos condiciones:*

- i) \hat{x} es estable*
- ii) Existe un $r > 0$ tal que si $\text{dist}(x_0, \hat{x}) < r$ entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(f^k(x_0), \hat{x}) = 0,$$

es decir, $f^k(x_0) \rightarrow \hat{x}$ cuando $k \rightarrow \infty$ (atractor).

Definición 1.3 *Se dice que un equilibrio \hat{x} es inestable si no es estable, es decir, si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe x_0 con $\text{dist}(x_0, \hat{x}) < \delta$ tal que $\text{dist}(f^k(x_0), \hat{x}) \geq \varepsilon$ para algún $k \geq 0$.*

Se tiene el siguiente resultado clásico.

Teorema 1.1 *Sea f una aplicación \mathcal{C}^1 . Un punto fijo \bar{x} de f es asintóticamente estable si $|f'(\bar{x})| < 1$ y es inestable si $|f'(\bar{x})| > 1$.*

Véase, por ejemplo, [5] página 73.

2. La Ecuación Clásica

La *ecuación logística clásica* está definida por la iteración:

$$x_{n+1} = A \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \quad A > 0 \quad (1)$$

En otras palabras, dado un valor inicial x_0 , generamos un nuevo valor x_1 a partir de la relación $x_1 = A \cdot x_0 \cdot (1 - x_0)$ y luego repetimos el proceso para generar x_2 a partir de x_1 , y así sucesivamente.

Obsérvese que esta recurrencia consiste en iterar la función uniparamétrica,

$$f(A, x) = A \cdot x \cdot (1 - x) \quad (2)$$

denomina *aplicación logística*.

Nótese que para cualquier valor de A , $f(A, 0) = f(A, 1) = 0$.

Los puntos fijos de $f(A, x)$ son las soluciones de la ecuación $x = f(A, x)$, es decir, las soluciones de

$$x = A \cdot x \cdot (1 - x) \quad (3)$$

Resolviéndola algebraicamente la ecuación (3), aparecen dos puntos fijos 0 y $p_A = 1 - \frac{1}{A}$.

Además:

1. Si $A > 1$ entonces $p_A \in (0, 1)$.
2. Como $f'(A, x) = A \cdot (1 - 2x)$ resulta

$$f'(A, 0) = A \quad \text{y} \quad f'(A, p_A) = 2 - A$$

Dada la iteración (1), es decir,

$$x_{n+1} = A \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \quad A > 0,$$

se escribe como,

$$\begin{cases} x_1 = f(x_0) \\ x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ \dots \\ x_n = f^n(x_0) \end{cases} \quad (4)$$

Lema 2.1 *Considérese la aplicación logística (2)*

i) Sean $A > 1$ y $x_0 < 0$ entonces $f^n(A, x_0) \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $x_n \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

(Análogamente si $x_0 > 1$, $f^n(A, x_0) \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$).

ii) Sean $0 < A < 1$ y $x_0 \in (0, 1)$ entonces $f^n(A, x_0) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $x_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

iii) Sean $1 < A < 4$ y $x_0 \in (0, 1)$ entonces $f^n(A, x_0) \in (0, 1) \forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $\{x_n\} \subset (0, 1) \forall n \in \mathbb{N}$

Demostración.

i) Si $x_0 < 0$ entonces $f(A, x_0) = x_1 < x_0$. Por tanto, $\{f^n(A, x_0)\} = \{x_n\}$ es una sucesión decreciente. Pero esta sucesión no converge porque f no tiene un punto fijo negativo.

En el segundo caso, $x_0 > 1$, se tiene que $x_1 < 0$ y aplicamos el caso previo.

ii) Como $0 < A < 1$ y $x_0 \in (0, 1)$ entonces $0 < f(A, x_0) = x_1 < x_0$. Por tanto, $\{f^n(A, x_0)\} = \{x_n\}$ es una sucesión decreciente, que converge a 0, punto fijo de f .

iii) El máximo valor de f es menor que 1, para cualquier $A \in (1, 4)$.

En efecto, se tiene

$$f'(A, x) = 0 \Leftrightarrow A \cdot (1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

cualquiera que sea A .

Es fácil ver que se trata de un máximo. Finalmente, valorando la función en $x = \frac{1}{2}$ tenemos

$$f\left(A, \frac{1}{2}\right) = A \cdot \frac{1}{4} < 1 \quad \forall A \in (1, 4)$$

■

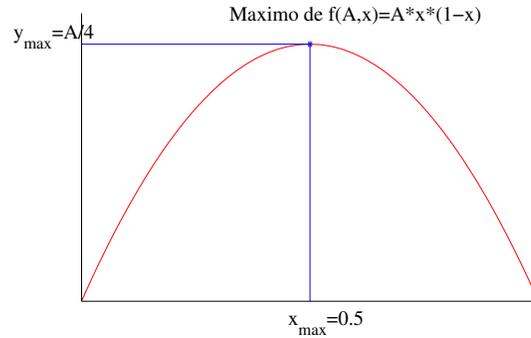


Figura 1. Punto máximo de la aplicación logística.

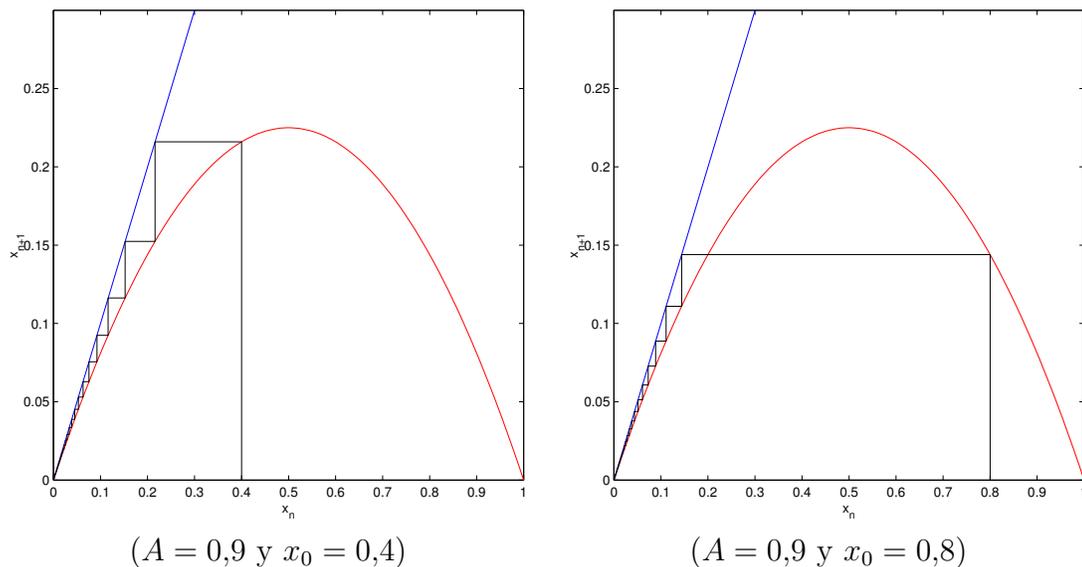
2.1. Dinámica de la aplicación logística

Estudiemos la dinámica de la aplicación logística para varios rangos del parámetro A . Distinguimos:

- $0 < A < 1$.

Por el teorema (1.1), se concluye que el punto fijo 0 es estable (pues $|f'(A,0)| = |A| < 1$ por hipótesis). Si restringimos f a $(0,1)$, 0 es un atractor global.

Desde el punto de vista de modelización de una especie, no tiene sentido tener en cuenta el otro punto fijo de f por ser negativo.



($A = 0,9$ y $x_0 = 0,4$)

($A = 0,9$ y $x_0 = 0,8$)

Figura 2. Iteraciones de la ecuación logística clásica

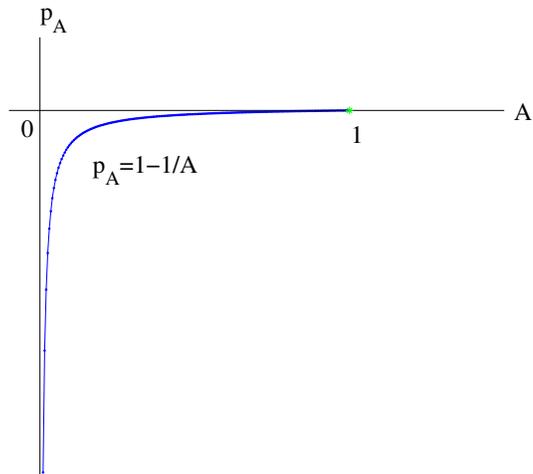


Figura 3. Diagrama de puntos fijos
($0 < A < 1$)

- $A = 1$.

$A = 1$ es un punto de bifurcación desde cero, en el sentido que cuando $A > 1$ obtenemos $p_A = 1 - \frac{1}{A} > 0$ y además $p_A \rightarrow 0$ cuando $A \rightarrow 1$.

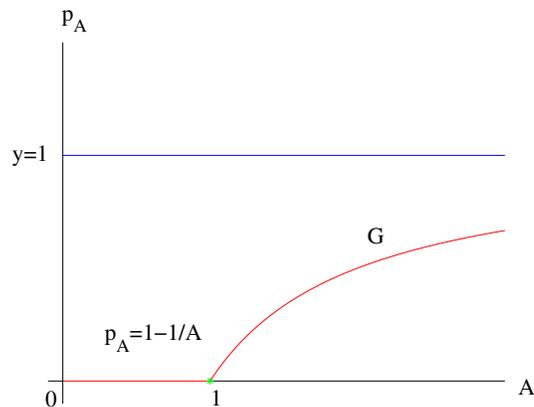


Figura 4. Diagrama de bifurcación. ($A = 1$)
G rama de soluciones positivas.
 $(A, p_A) = (1, 0)$ punto de bifurcación para G

- $1 < A < 3$.

Por el teorema (1.1) concluimos:

- El punto fijo 0 es inestable (pues $|f'(A, 0)| = |A| > 1$ por hipótesis).

- El punto fijo $p_A = 1 - \frac{1}{A}$ es asintóticamente estable (pues $|f'(A, p_A)| = |2 - A| < 1$ ya que por hipótesis $1 < A < 3$).

Si restringimos f a $(0, 1)$ se tiene que p_A es un atractor global, es decir, si $0 < x_0 < 1$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(A, x_0) = p_A$. En efecto, distinguimos dos casos:

Caso I. Si $1 < A < 2$ entonces $0 < p_A < \frac{1}{2}$.

Además, como $f'(A, x) = A \cdot (1 - 2x)$, se tienen:

- a) Si $0 < x_0 < \frac{1}{2}$ entonces $f'(A, x_0) > 0$ y

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = f(x_{n-1}) \in [0, 1] \text{ es creciente} \\ \{x_n\} \longrightarrow p_A \text{ por compacidad} \end{array} \right.$$

entonces toda la sucesión converge a p_A por monotonía.

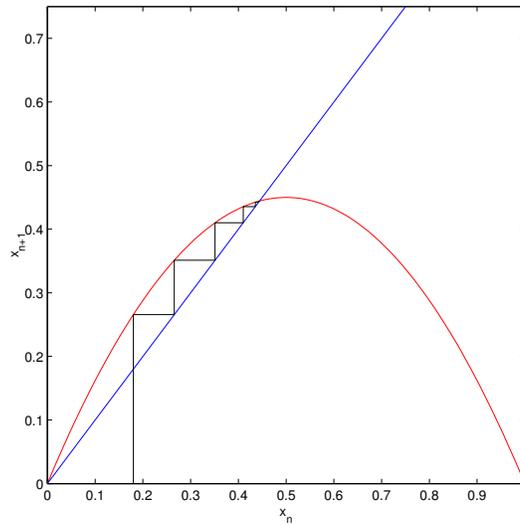


Figura 5. Iteraciones de la Ecuación Logística Clásica ($A = 1,8$ y $x_0 = 0,18$)

- b) Si $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ entonces $f'(A, x_0) < 0$. Además,

$$x_1 = A \cdot x_0 \cdot (1 - x_0) < 2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

entonces a partir de la primera iteración entramos en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y se está en el caso a).

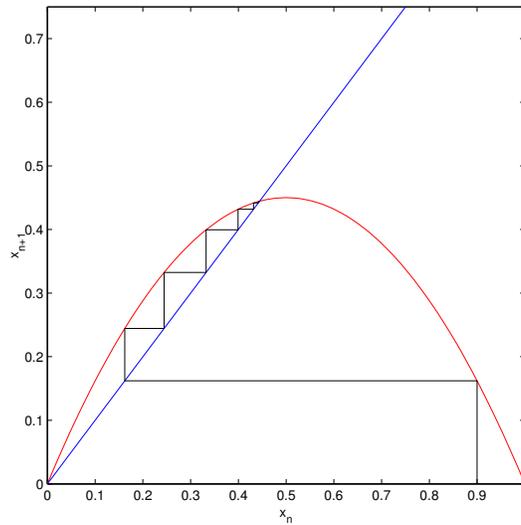
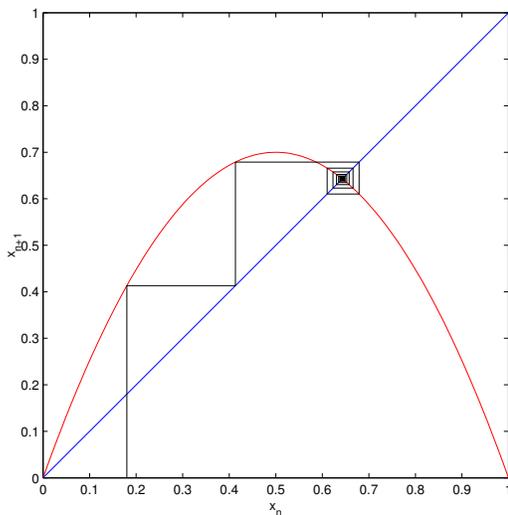


Figura 6. Iteraciones de la Ecuación Logística Clásica
($A = 1,8$ y $x_0 = 0,9$)

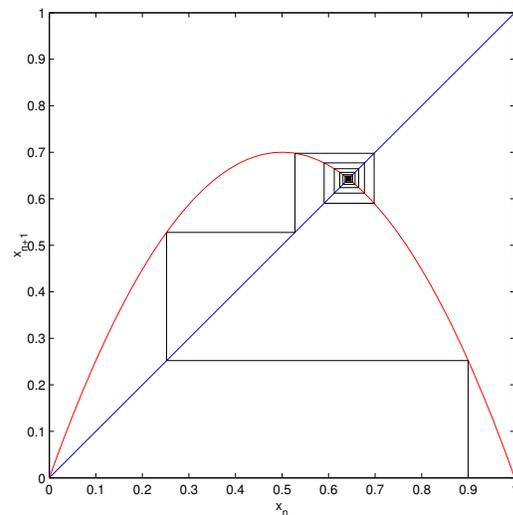
Observación: Si $A = 2$ entonces $p_A = \frac{1}{2}$, es decir, es el máximo de $f(2, x)$. Nótese que el comportamiento, en este caso particular, es análogo al caso anterior.

Caso II. Si $2 < A < 3$ entonces $\frac{1}{2} < p_A < \frac{2}{3}$.

Veamos que p_A es un atractor global.



($A = 2,8$ y $x_0 = 0,18$)



($A = 2,8$ y $x_0 = 0,9$)

Figura 7. Iteraciones de la ecuación logística clásica

Comprobemos que existe \widehat{p}_A tal que:

- i) $\widehat{p}_A \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$
- ii) $f(A, \widehat{p}_A) = p_A$

En efecto, la ecuación

$$p_A = A \cdot x \cdot (1 - x) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{A} = Ax - Ax^2$$

tiene por soluciones

$$x_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4A(1 - \frac{1}{A})}}{2A} = \frac{A + \sqrt{(A - 2)^2}}{2A} = 1 - \frac{1}{A} = p_A$$

$$x_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4A(1 - \frac{1}{A})}}{2A} = \frac{A - \sqrt{(A - 2)^2}}{2A} = \frac{1}{A} = \widehat{p}_A$$

Por tanto, $f(A, \widehat{p}_A) = p_A$ y $f(A, p_A) = p_A$ entonces

$$f^2(A, \widehat{p}_A) = p_A$$

Además,

- $f^2\left(A, \frac{1}{2}\right) = \frac{A^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{A}{4}\right) > \frac{1}{2}$ si $2 < A < 3$.
- $f^2\left(A, \frac{1}{2}\right) \leq f^2(A, p_A) = p_A$ por ser $x = \frac{1}{2}$ mínimo.

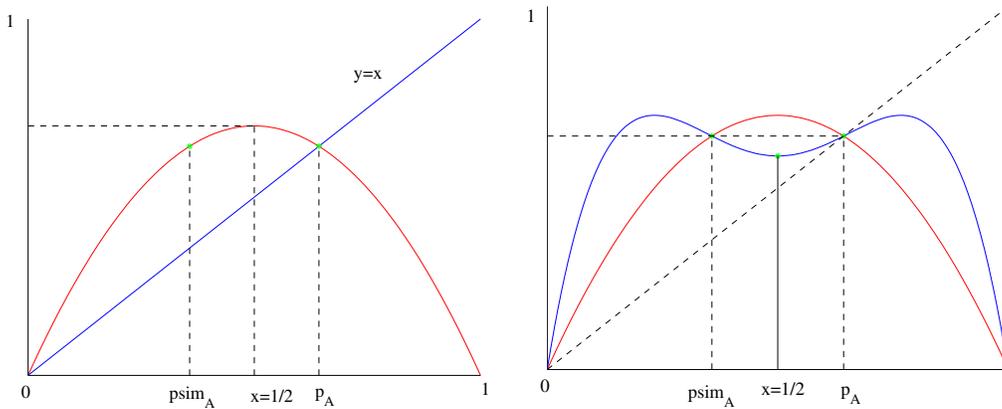


Figura 8. Situación de p_A y $\widehat{p}_A = psim_A$.

Distinguiamos los siguientes casos:

Caso 1. Sea $x \in [\widehat{p}_A, p_A]$.

De ahora en adelante denotaremos

$$f^2(A, x) \equiv g(A, x).$$

Así

$$\begin{aligned} g'(A, x) &= A^2 \cdot (1 - 2Ax(1 - x)) \cdot (1 - 2x) \\ g''(A, x) &= 2A^2 \cdot (-(A + 1) + 6Ax - 6Ax^2) \end{aligned}$$

Se observa que

$$\begin{aligned} - g''(A, x) &> 0 \text{ en } \left[\frac{1}{2}, p_A\right] \\ - g'(A, x) &> 0 \text{ en } \left[\frac{1}{2}, p_A\right] \end{aligned}$$

por tanto,

$$\max_{\left[\frac{1}{2}, p_A\right]} g'(A, x) = g'(A, p_A) = A^2 \cdot \left(1 - 2 \left(\frac{A-1}{A}\right)\right)^2 < 1 \text{ si } 2 < A < 3$$

Luego, $g(A, x)$ es contractiva en $[\widehat{p}_A, p_A]$. Así,

$$g^n(A, x) \rightarrow p_A \quad \forall x \in [\widehat{p}_A, p_A]$$

Como p_A es el único punto de equilibrio estable

$$f^n(A, x) \rightarrow p_A$$

Caso 2. Sea $x \in [0, \widehat{p}_A]$.

Como $\widehat{p}_A < \frac{1}{2} < p_A$, $f(A, x) > x$ por iteración se puede comprobar que existe k_0 tal que $f^{k_0}(A, x) \in [\widehat{p}_A, p_A]$ y se tiene el caso 1.

Caso 3. Si $x \in [p_A, 1]$ entonces $0 < f(x) < f(p_A) = p_A$.

Por tanto,

$$f(x) \in [0, p_A]$$

y se tiene los casos anteriores.

Recopilando, si $A \in (2, 3)$, p_A es atractor global.

- $A \geq 3$

Si $A = 3$ entonces $p_3 = \frac{2}{3}$ es un nuevo punto de bifurcación de (1) para el que $f'(3, p_3) = -1$

En efecto, para $A > 3$ consideremos la segunda iteración del proceso recursivo (4)

$$g(A, x) = f(A, f(A, x)) = A \cdot [A \cdot x \cdot (1 - x)] \cdot [1 - A \cdot x \cdot (1 - x)].$$

Los puntos fijos de $g(A, x)$ son las soluciones de

$$x = A^2 \cdot x \cdot (1 - x) \cdot [1 - A \cdot x \cdot (1 - x)]$$

dadas por

$$x_1 = 0$$

$$x_2(A) = 1 - \frac{1}{A} = p_A$$

$$x_3(A) = \frac{1 + A - \sqrt{(A - 3)(A + 1)}}{2A}$$

$$x_4(A) = \frac{1 + A + \sqrt{(A - 3)(A + 1)}}{2A}$$

Los dos primeros son los puntos fijos de $f(A, x)$. Los otros dos son, para $A > 3$, puntos fijos de $g(A, x)$ que no son de equilibrio de (1)

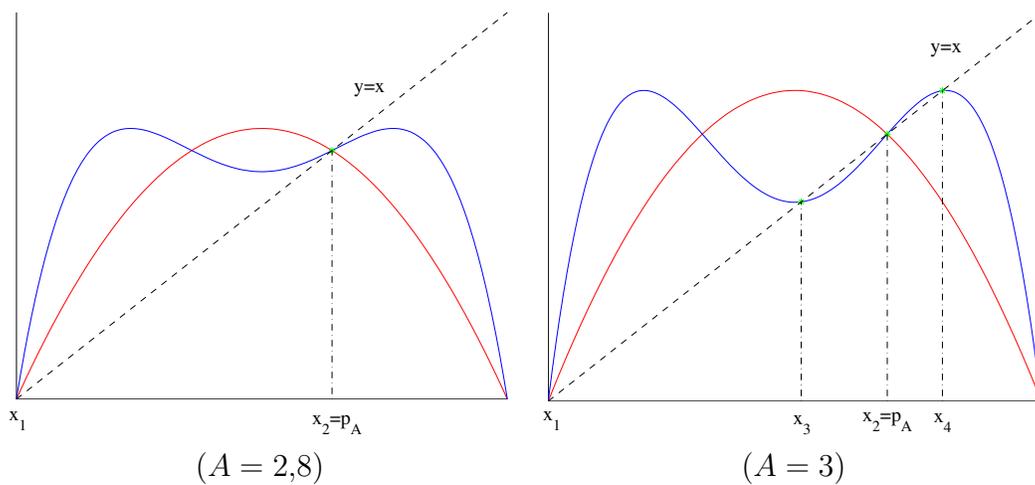


Figura 9. Primera y segunda iteraciones de la ecuación logística

La órbita $\{x_3, x_4\}$ es una órbita periódica de periodo dos. Además como

$$g'(A, x) = f'(A, f(A, x)) \cdot f'(A, x) = A^2[1 - 2Ax(1 - x)](1 - 2x)$$

entonces

$$g'(A, x_3) = g'(A, x_4) = -A^2 + 2A + 4$$

y la órbita $\{x_3, x_4\}$ es atractora cuando $|-A^2 + 2A + 4| < 1$, es decir, para $A \in (3, 1 + \sqrt{6})$

En consecuencia, en el punto $(3, p_3) \equiv (3, 2/3)$ se produce la ramificación de una órbita de período dos, y por eso esta bifurcación se denomina *bifurcación de duplicación de periodo*, y la transferencia de estabilidad entre ésta y la órbita fija.

El diagrama de bifurcación que se muestra en la figura siguiente incluye la representación de la curva formada por los puntos de la órbita periódica.

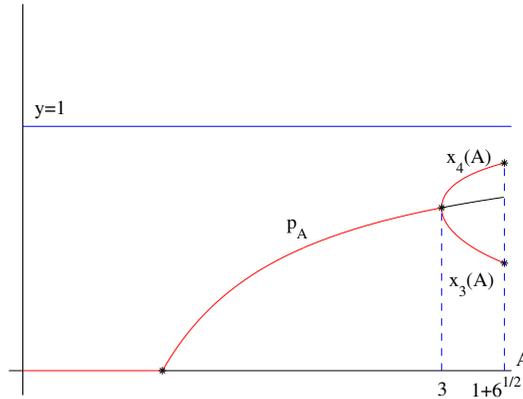


Figura 10. Diagrama de bifurcación. ($A = 3$)

Si $A = 1 + \sqrt{6}$ en los puntos $(A, x_3(A))$ y $(A, x_4(A))$ se tiene otra bifurcación, es decir,

$$g'(A, x_3) = g'(A, x_4) = -1$$

y la órbita de período dos pasa a ser inestable. Se trata de otra bifurcación de duplicación de período, que se analiza estudiando la segunda iteración de $g = f^2$, es decir, la cuarta iteración de f . Se produce así la ramificación de una órbita atractora de período cuatro.

Pero la ecuación logística (1) no sólo tiene bifurcaciones de duplicación de período en $A = 3$ y $A = 1 + \sqrt{6}$, se puede probar que existe una sucesión (véase [2] y [3]) A_n de bifurcaciones en las que ramifican órbitas

atractoras de período 2^n , pasando a ser repulsoras las de período 2^{n-1} . Además se demuestra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_\infty \approx 3,57$$

y, a partir de ese valor, la ecuación (1) tiene infinitas órbitas periódicas inestables (al menos todas las de período par, aunque se puede probar que existen órbitas de cualquier período) y aparecen trayectorias aperiódicas acotadas que no convergen a órbitas regulares (estacionarias o periódicas). El comportamiento de las órbitas se va haciendo más complejo, como se pone de manifiesto en la siguiente figura.

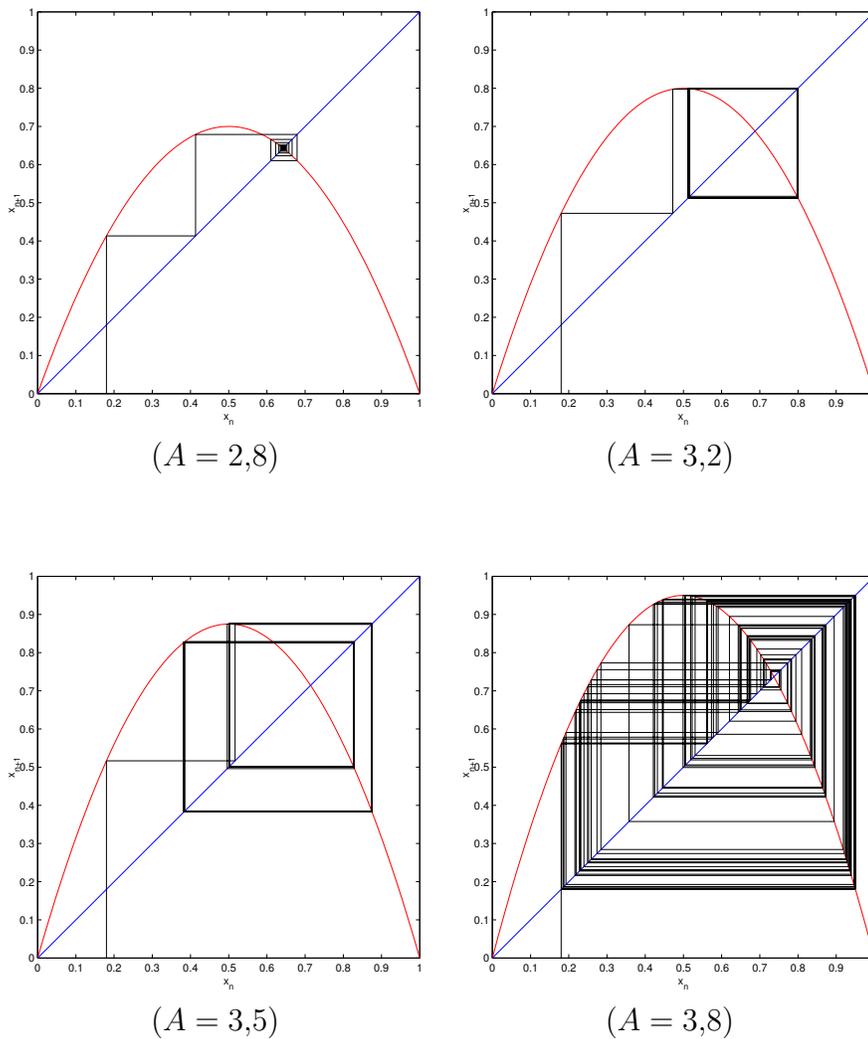


Figura 11. Distintas evoluciones de las órbitas de la ecuación logística

Se observa cómo la evolución de las órbitas cambia al variar el parámetro A . Para $A \in [0, 4]$, el intervalo $I = [0, 1]$ es invariante por $f(A, x)$, por lo que las órbitas que comienzan en un punto de I son acotadas ($x_k \in I$, para todo $k \in \mathbb{N}$).

Cuando $A = 2,8$, las órbitas no fijas tienden al equilibrio positivo (lo que sucede para $1 < A < 3$).

Si $A = 3,2$, las órbitas no fijas tienden a un ciclo de período dos (lo que sucede para $3 < A < 1 + \sqrt{6}$), cuando $A = 3,45$ tienden a uno de período cuatro, y cuando $A = 3,5$ tienden a uno de período ocho.

Finalmente, para $A = 3,6$ y $A = 3,8$ las órbitas aperiódicas no convergen a ningún ciclo periódico.

Estas órbitas aperiódicas (que existen cuando $A_\infty < A \leq 4$) presentan una característica destacada: tienen una dependencia sensible respecto de los datos iniciales (DSDI).

Definición 2.1 *Se dice que una órbita $\gamma(x_0)$ tiene DSDI si existe $d > 0$ de forma que cualquier entorno V de x_0 contiene un punto x tal que $\text{dist}(f^k(x), f^k(x_0)) \geq d$ para algún $k \in \mathbb{N}$, es decir, tiene órbitas tan cercanas inicialmente como se quiera cuya evolución en algún momento se separa de $\gamma(x_0)$ (al menos d unidades).*

Este hecho tiene una notable relevancia pues imposibilita la predicción a medio y largo plazo: los pequeños errores iniciales se convierten en grandes errores futuros.

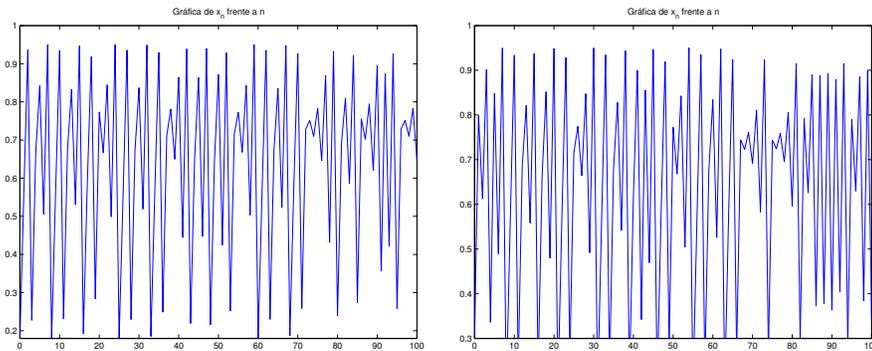


Figura 12. Dependencia sensible respecto de los datos iniciales.

Las órbitas acotadas, no periódicas, y que presentan dependencia sensible se denominan *órbitas caóticas*. Se puede demostrar que para $A > A_\infty$, la ecuación logística tiene órbitas caóticas. En este caso el

comportamiento asintótico de las órbitas de (1) no puede ser descrito en términos de conjuntos "simples" (con un número finito de puntos determinados por órbitas fijas o periódicas), por lo que el concepto de atracción se generaliza a conjuntos arbitrarios:

Definición 2.2 *Se dice que un conjunto $O \subset \mathbb{R}$ es un atractor de la ecuación*

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

si es invariante por f , existe un conjunto $D \supseteq O$ de medida no nula tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f^n(x_0), O) = 0$ para todo $x_0 \in D$ (es decir, atrae a todas las órbitas que empiezan en D) y tiene una órbita densa (lo que garantiza que contiene lo "mínimo", lo "esencial").

Definición 2.3 *Si el atractor de una ecuación contiene una órbita caótica, se dice que es un atractor caótico.*

Los atractores caóticos constan de infinitos puntos y suelen ser extremadamente irregulares.

En la siguiente figura, se ha representado el comportamiento asintótico de la ecuación logística, para ello, se ha dibujado la evolución de una órbita (con dato inicial $x_0 = 0,2$) desde la iteración 500 (con el objeto de esperar su asentamiento sobre el conjunto atractor) hasta la 5000 para valores del parametro $A \in [2,8, 4]$. A esta gráfica, aunque las órbitas inestables no aparecen representadas, también se la denomina diagrama de bifurcación.

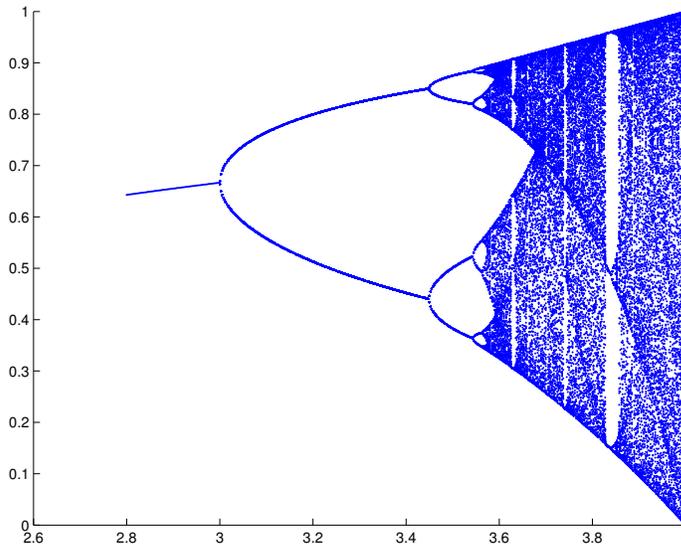


Figura 13. Diagrama de bifurcación de la ecuación logística.

La complejidad del comportamiento de las órbitas de la ecuación logística para $A > A_\infty$ queda patente en la anterior figura. Se observa como los atractores parecen rellenar un subintervalo de $I = [0, 1]$, lo que no es así pues de dichos subintervalos también arrancan infinitas órbitas periódicas inestables. También se aprecian regiones con atractores periódicos (que se corresponden con las franjas claras verticales del diagrama), denominadas *ventanas periódicas*. En estos casos, aunque existen órbitas periódicas, la región de atracción tiene medida nula por lo que en la práctica, son "inobservables" (y entonces no existe atractor caótico).

Los atractores caóticos son extremadamente irregulares y presentan ricas estructuras sobre escalas arbitrariamente pequeñas. Ello hace que para su adecuada caracterización se introduzcan nuevos conceptos de dimensión, distintos de la dimensión euclídea permitiendo el uso de "dimensiones no enteras" (fractales). En particular, se demuestra que el atractor de la ecuación logística para $A = 4$ es un conjunto de Cantor, con dimensión de Hausdorff $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63$ (véase [7]).

Por otro lado, la existencia de estos atractores caóticos diluye la posibilidad de precisar con detalle el comportamiento a largo plazo de las órbitas del sistema: las órbitas recorren el atractor de forma extraordinariamente compleja, visitando todas sus partes con probabilidad positiva y generando una evolución de apariencia aleatoria por lo que la descripción de la dinámica del sistema se ha de llevar a cabo mediante el uso de conceptos y métodos estocásticos.

La existencia de dinámicas caóticas, en el contexto de las ecuaciones diferenciales, sólo es posible para sistemas con dimensión $n \geq 3$, mientras que en los sistemas discretos invertibles (con f y f^{-1} diferenciables) hace falta dimensión $n \geq 2$ para que pueda existir dinámica caótica. Tenemos así una escala de dimensiones mínimas para la posibilidad de caos:

- Sistemas dinámicos discretos $x_{k+1} = f(x_k)$, f arbitraria, $n = 1$.
- Sistemas dinámicos discretos $x_{k+1} = f(x_k)$, f invertible, $n = 2$.
- Sistemas dinámicos continuos $x' = f(x)$, f arbitraria, $n = 3$.

Referencias

- [1] D.G. Aronson, H.F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in populations genetics, combustion, and nerve pulse propagation*. Lectures Notes in Mathematics No 446, Springer-Verlag, 1978 pg 5-49.
- [2] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems* Second Edition, Addison Wesley, 1989.
- [3] S. N. Elaydi, *Discrete chaos* Chapman and Hall, 2000.
- [4] C. Fernández Pérez, F.J. Vázquez Hernández, J.M. Vegas Montaner, *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*, Thomson, 2003.
- [5] J. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations* , Springer-Verlag, 1991.
- [6] M.W. Hirsch, S. Smale, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal* Alianza Universidad, 1983.
- [7] R.A. Holmgren, *A first course in discrete dynamical systems*, Springer- Verlag, 1994.
- [8] J.D. Murray, *Mathematical Biology. Vol 1 Introduction*, Third Edition, Springer-Verlag, 2002.
- [9] J.D. Murray, *Mathematical Biology. Vol 2 Spatial model and biomedical applications* Third Edition, Springer-Verlag, 2003.
- [10] P. Quintela Estévez, *Matemáticas en ingeniería con Matlab* Universidade de Santiago de Compostela Publicatións, 2000.