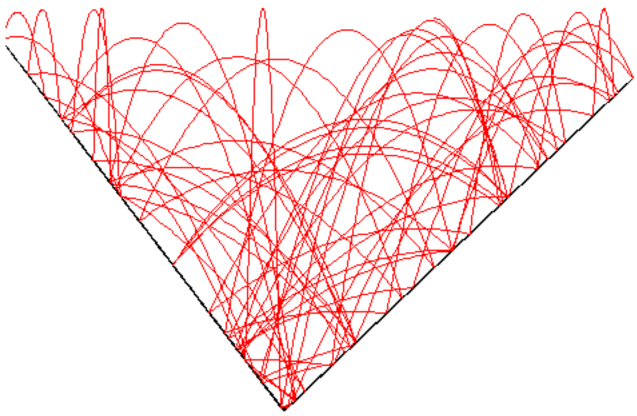
Introducción a la Teoría del Caos



Juan José Gómez Navarro, Ontureño ;)

Índice

1. Sobre este PDF

En mis primeros pinitos como becario en la Universidad de Murcia, mi director de Tesis me sugirió un problema bastante sencillo para empezar a acostumbrarme a lo que significa hacer un trabajo de investigación que nadie ha hecho antes. El problema es simplemente que estudie el comportamiento de una pelota puntual botando libremente entre dos planos inclinados enfrentados (ver capículo 8). Simulé el movimiento de la pelota y pronto me di cuenta de que éste era muy complicado. Repetí el experimento con la pelota botando dentro de un cuenco parabólico y mi sorpresa fue que en este caso el movimiento era trementadamente más ordeando y bonito. Empecé a pensar que cabía hablar de movimiento caótico o no caótico en uno u otro caso. Como no tenía (ni tengo) ni idea de teoría del Caos me puse a leer un libro bastente recomendable sobre este tema, *Iniciación al Caos*, de la editorial Síntesis. Como parte de mi proceso de aprendizaje pensé en redactar las ideas que consideraba importantes para tenerlas por escrito, una especie de resumen para mí mismo. Luego pensé que podía colgarlo en la página *fisica-es* para que le sirviera a alguien más.

Lo que pretendo decir con esto es que no soy un experto ni mucho menos, que todo lo que he escrito aquí está en los libros, que lo explican mejor que yo. Por tanto usa este pdf como veas, pero no le pidas peras al olmo. En cualquier caso, mi idea, desde que pensé en colgarlo, es que haya unos apuntes para que alguien interesado pueda leerlos y hacerse una idea sobre esta curiosa teoría matemática. Si uno busca en internet, encuentra muchas fotos y todo eso, pero poca matemática, y si va a un libro puede ser algo duro de leer para alguien que sólo busca unas cuantas ideas. El objetivo de este pdf es situarse entre una página llena de fotitos y un libro en condiciones.

Espero que te sea útil, no dudes en mandarme sugerencias o comentarios, así como erratas: juanjo.gomeznavarro@gmail.com

2. ¿Qué es el Caos?

Mi novia, cada vez que entra en mi habitación, siempre dice lo mismo: *esto es un caos*. Cuando tenemos una situación que no podemos controlar solemos decir que es *caótica*. Los jugadores del Warhammer conocerán bien el *Ejército del Caos*. Cuando estaba leyendo sobre el Caos, mi madre vio un libro sobre la mesa que se llamaba '«Iniciación al Caos'»la pobre creyó que me estaba metiendo a Anarquista o algo de eso, no es coña, incluso se asustó.

Caos es una palabra que, como muchas veces pasa en ciencia[1], tiene significados imprecisos en el lenguaje corriente. Por supuesto, aquí no estamos

[1]véase *continuidad, conexo, frontera, incertidumbre, oxidación...*

para hablar de semántica, sino de ciencia: ¿qué es pues el Caos para la ciencia?. Pues la Teoría del Caos es una teoría matemática[2] como puede ser la teoría de conjuntos, la de probabilidad o la de series infinitas. Tiene una serie de definiciones y se obtienen otros tantos teoremas, como veremos en las siguientes páginas.

El Caos se ha descubierto de manera relativamente reciente gracias, en parte, a los ordenadores. En 1961, el metereólogo Edward Lorenz estaba intentando predecir el clima. Para ello necesitaba resolver numéricamente unas ecuaciones que modelizaban el comportamiento de la atmósfera. Se dio cuenta de que cada vez que ejecutaba su programa, el ordenador obtenía resultados diferentes como solución al sistema de ecuaciones. Lo que ocurría era que su programa trabajaba con seis cifras decimales de precisión, mientras que él introducía como condición inicial sólo tres. Las tres restantes, eran introducidas aleatoriamente por el ordenador en cada ejecución. Aunque Lorenz conocía esto, no pensaba que un error de inicialización en las milésimas fuera a importar mucho en el resultado final. Craso error, había topado con un sistema de ecuaciones caótico.

El Caos viene a desvancar definitivamente con una idea bastante antigua, **el determinismo**. Desde los tiempos de Newton, disponemos de una teoría matemática capaz de predecir el comportamiento de los sistemas físicos. Conociendo la configuración inicial de un sistema y aplicando una serie de reglas (las leyes de la física), el comportamiento de un sistema está totalmente determinado en un instante posterior. La teoría del Caos nos advierte que, en determinados sistemas físicos, la evolución temporal es tremendamente compleja y depende dramáticamente de las condiciones iniciales hasta el punto de que no podamos predecir con seguridad la evolución real del sistema. Al final hablaré un poco más sobre este interesante punto y las implicaciones que de él se desprenden.

3. Los sistemas dinámicos

La teoría del Caos se enmarca dentro del estudio de los **sistemas dinámicos**. Empezaremos por defenir el **espacio de fases**. Éste es el conjunto configuraciones posibles de un sistema dado. Algunos ejemplos:

- Para un péndulo, una configuración está determinada por el conocimiento del ángulo θ y la velocidad ω (no basta sólo el ángulo). El espacio

[2] Ojo, cuando digo teoría no es que no esté comprobada, como por ejemplo la Teoría de Cuerdas en física de partículas o la Teoría de la Inflación en Cosmología. Es una rama de las matemáticas, y como tal no tiene sentido hablar de comprobación experimental, aunque bien es cierto que, como veremos, hay multitud de sistemas reales que se adecúan a este modelo matemático

de fases tendrá dimensión 2.

- Para un tiro parabólico, la configuración está determinada si conocemos las coordenadas x e y, así como las dos componentes de la velocidad v_x y v_y. En este caso, las dimensión del espacio es 4.
- El número de coches que hay aparcados en un aparcamiento subteráneo sólo depende de este número, por tanto el espacio de fases es sencillamente $\mathbb{N}$, en realidad un subconjunto de éste.

Una vez conocemos el espacio de fases de un sistema el cual queremos estudiar, necesitamos una ley que nos dé la evolución de éste en el espacio de fases. Podemos aquí diferenciar entre sistemas dinámicos discretos y continuos.

3.1. Sistemas dinámicos discretos

Estos son en los que la evolución del sistema se hace «a saltos», o siendo formales:

Definición 1 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Sea $f : X \longrightarrow X$ una función que relaciona estados mediante la expresión*

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k)$$

La pareja (f, X) es un sistema dinámico. Al conjunto X se le denomina espacio de fases del sistema.

Es decir, la ley que da la evolución, relaciona los puntos del espacio de fases de manera discreta. Si el sistema empieza en una configuración $\mathbf{x_0}$, tras k pasos se encontrará en el estado $f^k(\mathbf{x}_0)$. A $\mathbf{x_0}$ se le conoce como **confición inicial** y al conjunto

$$\{\mathbf{x_0}, f(\mathbf{x_0}), f^2(\mathbf{x_0}), \ldots\}$$

órbita de $\mathbf{x_0}$

3.2. Sistemas dinámicos continuos

En estos, la evolución del sistema viene dada por una ecuación diferencial.

Definición 2 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Sea $\nu : X \longrightarrow X$ un campo vectorial que relaciona los estados nuevos del sistema mediante la ecuación diferencial:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \nu(\mathbf{x}(t))$$

La pareja (ν, X) es un sistema dinámico. Al conjunto X se le denomina espacio de fases del sistema.

No voy a tratar los sistemas dinámicos continuos hasta el final, cuando hable del atractor de Lorenz. En lo que sigue, por tanto, me restrinjo a sistemas discretos, que son más fáciles de analizar y contienen los mismos ingredientes del Caos.

3.3. Ejemplo: la ecuación logística

En lo que sigue utilizaré un sistema dinámico bastante inocente en apariencia, la **ecuación logística**. Se debe al biólogo Robert May, que la propuso para estudiar la evolución de la población de insectos en un sistema cerrado[3]. El sistema es discreto y además unidimensional. Viene dado por la fórmula

$$x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k)$$

donde $0 < \mu < 4$. El espacio de fases del sistema es el intervalo $[0, 1]$. En lo sucesivo usaré este sistema como ejemplo para poner de manifiesto la mayoría de las propiedades interesantes del Caos, e incluso algo más interesante: la transición del orden al Caos.

4. Puntos fijos y periódicos

4.1. Fundamentos básicos

Como ocurre con muchos otros conceptos antagonistas, para definir el Caos primero hay que definir el orden.

Definición 3 *Sea (f, X) un sistema dinámico. Un punto ξ se denomina fijo si*

$$f(\xi) = \xi$$

Esto quiere decir que ese punto no evoluciona en el tiempo, ya que la función lo lleva a él mismo. Los puntos fijos son análogos a los puntos de equilibrio de un sistema físico. De hecho, podemos hablar de puntos fijos atractivos (como los puntos estables) y de puntos fijos repulsivos (como los puntos inestables de un sistema físico).

Definición 4 *Sea ξ un punto fijo de (f, X). Se dice que es* ***atractivo*** *si $\exists I \subset X$ conteniendo a ξ tal que $\forall x \in I$ se tiene*

$$\lim_{k\to\infty} f^k(x) = \xi$$

El interior del conjunto de los puntos

$$\{x \in X : \lim_{k\to\infty} f^k(x) = \xi\}$$

[3] la biología ha aportado multitud de sistemas que interrelacionan diferentes poblaciones de especies y que matemáticamente son sistemas bastante interesantes: problema cazador presa, el problema de las cornejas...

se denomina ***cuenca de atracción*** *de* ξ

Definición 5 *Sea* ξ *un punto fijo de* (f, X)*. Se dice que es* ***repulsivo*** *si pertenece a algún conjunto* $I \subseteq X$ *tal que* $\forall x_0 \in I$ *existe al menos un* k *tal que* $f^k(x_0) \notin I$

Básicamente, un punto atractivo es uno al que el sistema tiende a acudir con el paso del tiempo y se queda ahí, mientras que uno repulsivo es uno en que una pequeña perturbación de la posición saca rápidamente al sistema de esa configuración. Pensemos un un péndulo con rozamiento. Un punto atractivo es cuando el péndulo está abajo parado. Un punto repulsivo es el péndulo colocado verticalmene en posición de equilibrio inestable.

Son de más interés los puntos periódicos. Estos son un conjunto de puntos entre los cuales el sistema oscila indefinidamente.

Definición 6 *Se dice que un punto* ξ *es periódico del sistema* (f, X) *si* $\exists n$ *tal que* $f^n(\xi) = \xi$*. El mínimo número* k *tal que* $f^k(\xi) = \xi$ *se denomina orden del punto periódico y la órbita* $\{\xi, f(\xi), \ldots, f^{k-1}(\xi)\}$ *se llama periodo de orden* k*.*

En resumidas cuentas, un punto o conjunto de puntos periódicos, son unas configuraciones en las que el sistema puede entrar y quedar «atrapado» en ellas. De alguna manera, son estados menos ordenados que un sólo punto fijo atractivo, que sería el máximo orden posible, pero a fin de cuentas sigue estando la cosa ordenada. Cuantos más puntos periódicos tenga el sistema es menos ordenado, y será más difícil predecir la posición actual. Una de las manifestaciones del Caos es justo que la cantidad de puntos fijos diverja.

4.2. Puntos fijos y periódicos de la ecuación logística

En esta sección vamos a utilizar el ordenador para obtener estos puntos, y vamos a ver por qué son importantes par estudiar la transición al Caos. Nos apoyaremos en el sistema que describí entes, la ecuación logística:

$$x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k)$$

Los puntos fijos vienen de hacer $x_{k+1} = x_k$. Uno puede comprobar que las soluciones de esa ecuación son

$$p_0 = 0 \quad \text{y} \quad p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

4.2.1. Caso $0 \leq \mu \leq 1$

Si $\mu = 0$ el sistema tiende trivialmente a 0, que es el único punto fijo. Si $0 < \mu < 1$ en el intervalo que estamos estudiando, la solución b no es válida ya que predice puntos fijos que no pertenecen al espacio de fases; por tanto la solución vuelve a ser $x = 0$ para el único punto fijo. Si $\mu = 1$, la segunda solución predice también que $x = 0$ es el único punto fijo. Además vamos a comprobar que este punto es atractivo.

Podemos comprobar esta solución fácilmente en el ordenador. Para ello se escoge una condición inicial, se elige un valor de μ y se programa el ordenador para que calcule un número dado de iteraciones. Se hace para muchas condiciones iniciales repartidas en el intervalo $[0, 1]$ y se pinta en el eje de ordenadas el estado del sistema en la iteración n-ésima. El resultado es la figura 1

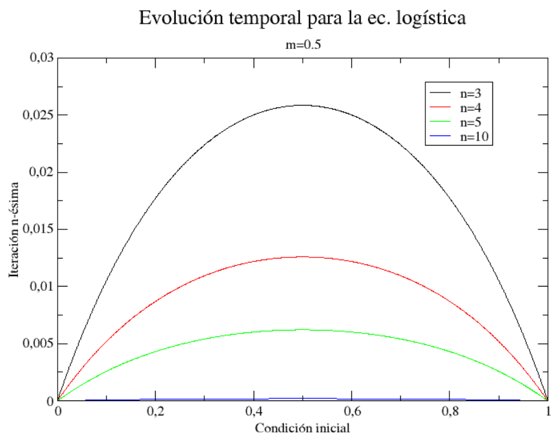


Figura 1: Evolución temporal para cada uno de las condiciones iniciales del intervalo $[0, 1]$ con el parámetro $\mu = 0{,}5$. Se ve como las órbitas tienden rápidamente al punto fijo atractivo $x = 0$.

4.2.2. Caso $1 < \mu \leq 3$

En este caso, $p_\mu \in [0, 1]$, tenemos por tanto dos puntos fijos. Se puede demostrar[4] que p_0 es en este caso un punto repulsivo y p_μ atractivo. Nosotros, en lugar de demostrar, simularemos. Como antes, para cada punto del intervalo $[0, 1]$ calculo su evolución n-ésima y la pinto en el eje de ordenadas. Se obtiene la figura 2

[4] En general no voy a hacer demostraciones, creo que para eso nada mejor que un buen libro. Aún así, como indicación diré para el que quiera ponerse, que se puede relacionar el carácter atractivo de un punto con la derivada de la función f en ese punto, con lo que la demostración se simplifica mucho.

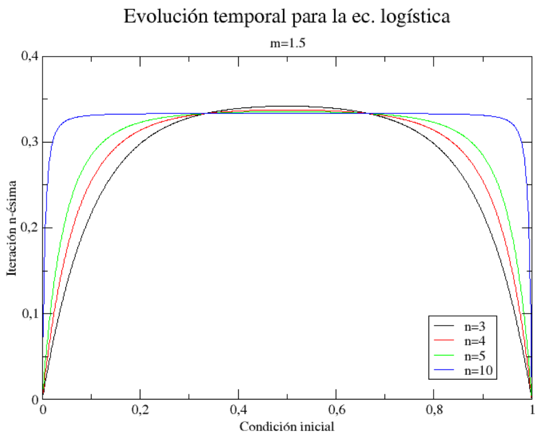


Figura 2: Evolución temporal para cada uno de las condiciones iniciales del intervalo $[0, 1]$ con el parámetro $\mu = 1{,}5$. Se ve como las órbitas tienden rápidamente al punto fijo atractivo $x = 0{,}334$

4.2.3. Caso $3 < \mu \leq 4$

Hasta ahora no se puede hablar en absoluto de Caos. Tenemos un sistema que tiende asintóticamente a $x = 0$ o a $x = p_\mu$ según el valor de μ. Vamos a ver cómo esto empieza a cambiar.

En este intervalo, los puntos $x = 0$ y $x = p_\mu$ siguen siendo fijos, eso no cambia en este intervalo. Sin embargo, se puede demostrar que al igual que pasaba en el intervalo anterior, ambos se vuelven puntos fijos repulsivos. Tenemos pues una situación nueva, los dos únicos puntos fijos del sistema son repulsivos. ¿Cuál será pues el comportamiento del sistema? Está claro que no puede tender a un punto fijo atractivo, pues no lo hay. Llegado este momento lo más fácil es hacer una simulación como en los casos anteriores. Obtenemos la figura 3.

Esta figura debería dejarnos claro que no hay ningún punto fijo, pues hemos dejado nada menos que 1000 iteraciones y no se alcanza el equilibrio. Aparecen algo así como dos puntos a los que la solución tiende alternativamente. Efectivamente, como habrás empezado a pensar, se trata de puntos periódicos de periodo dos.

Para comprobar de manera matemáticamente rigurosa la existencia de estos puntos periódicos de periodo dos, tenemos que resolver la ecuación

$$q_\mu = f^2(q_\mu)$$

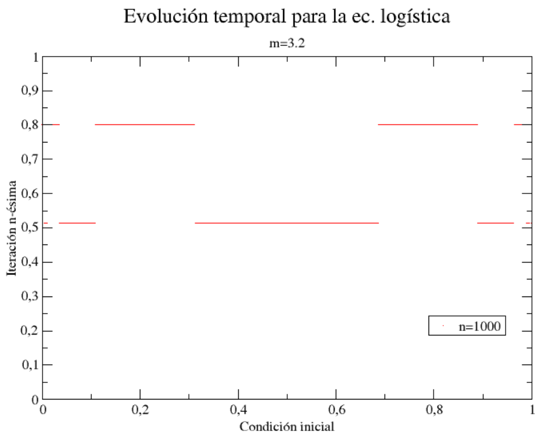


Figura 3: Evolución temporal para cada uno de las condiciones iniciales del intervalo $[0, 1]$ con el parámetro $\mu = 3{,}2$. En este caso la evolución del sistema no tiende a un punto solo como antes, sino que parece que tiende a dos puntos diferentes por igual. Si la simulación fuese perfecta, tendríamos dos líneas continuas en vez de a trazos.

Podéis creerme que uno se pone y sale que el resultado son los puntos

$$q_\mu = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

Que, para $\mu = 3{,}2$ coincide efectivamente con los resultados del ordenador[5]

Vemos, por tanto, que al pasar justo por $\mu = 3$, el punto p_μ pasa de ser fijo atractivo a fijo repulsivo dividiéndose en dos puntos atractivos de periodo dos. Este fenómeno se llama **duplicación del periodo**. Pues bien, si μ aumenta podemos comprobar numéricamente que estos dos puntos pasan a ser también repulsivos a la vez que dan lugar a cuatro puntos periódicos atractivos de periodo cuatro (la fórmula analítica para obtener estos puntos se empieza a complicar sobremanera, como apreciarás). En general, antes de llegar a $\mu = 4$, empieza a doblarse y doblarse el número de puntos periódicos del sistema, de tal manera que llega un punto en que el número de puntos periódicos en el intervalo $[0, 1]$ es denso en éste, en el sentido matemático del término. Podemos visualizar esta multiplicación de los puntos periódicos si graficamos, en función del parámetro μ, la situación del sistema en el paso n-ésimo para una configuración inicial arbitraria. Este gráfico se denomina

[5] la aparición de líneas segmentadas no tiene que ver con el resultado real, que son (nuevamente es una cuestión demostrable) dos líneas densas. Confieso que no conozco la razón computacional de estos intervalos.

figura de Feigenbaum, y se muestra en la figura 4.

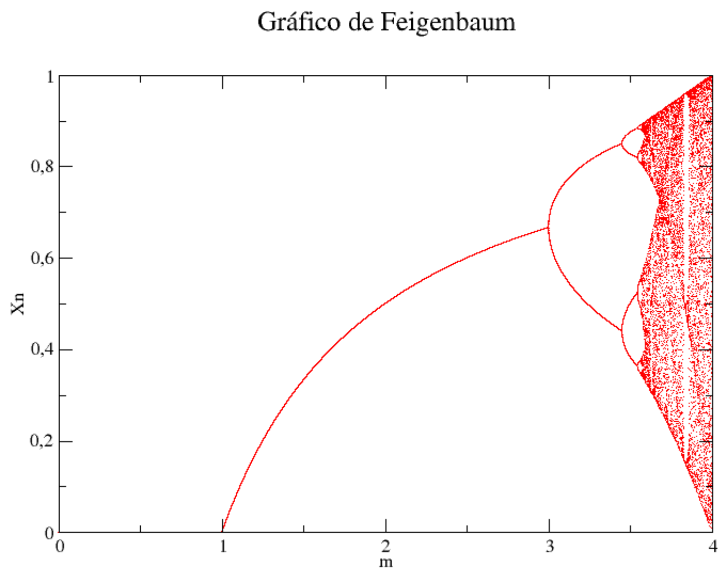


Figura 4: En esta figura de aspecto fractal se visualiza uno de los aspectos de la aparción del Caos, la multiplicación de los puntos periódicos del sistema. Vemos cómo en el intervalo [0,1] el sistema tiende a 0, en el intervalo [1,3] tiende a un número diferente de 0 y que varía con μ. Al pasar por 3 aparecen dos puntos periódicos, pero pronto se ve que estos a su vez se doblan más adelante. Claramente, antes de llegar al 4 el sistema se ha descontrolado, es impredecible: el Caos ha aparecido.

Otra manera de ilustrar el extraño comportamiento del sistema cerca de $\mu = 4$ es hacer una gráfica como las que hice al principio. Si dibujamos el estado del sistema en paso n-ésimo en función de la condición inicial, veremos que el sistema no tiende en absoluto a un recta, ni si quiera a un número finito de éstas. Este gráfico, que muestra la propiedad de mezcla del Caos, se muestra en la figura 5.

La última propiedad que quiero mostrar de la ecuación logística es la sensibilidad a las condiciones iniciales. Recordemos el caso $\mu < 1$ en el que el sistema tendía a 0 independientemente de la condición inicial, como mostraba la figura 1. En el caso $1 < \mu < 3$ el sistema tiende a p_μ como muestra la figura 2 también independientemente de las configuración inicial. Incluso cuando el sistema tenía puntos periódicos era estable, pues todas las posiciones terminan irremediablemente cayendo en los puntos periódicos.

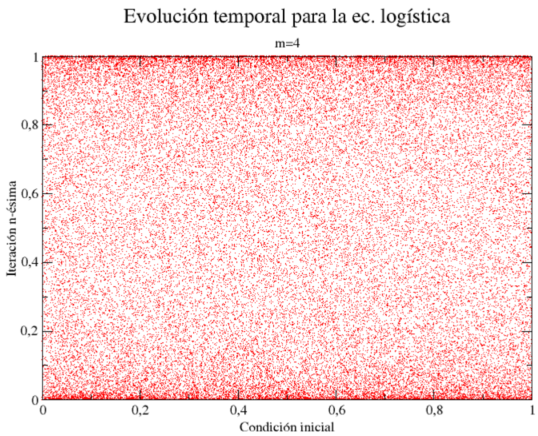


Figura 5: Configuración del sistema en función de la configuración inicial. Se aprecia que puntos muy cercanos terminan en configuraciones totalmente diferentes esparcidas en el espacio de fases. Esta propiedad, denominada *mezcla* es un importante indicativo del Caos

En todos estos casos, el sistema no era sensible a las condiciones iniciales. Sin embargo, para μ suficientemente grande (y luego aclararé cuánto) podemos comprobar que el sistema **si** depende críticamente de las condiciones iniciales. Esto es muestra en la figura 6, donde para dos configuraciones iniciales casi idénticas salvo en la cuarta cifra decimal se deja evolucionar el sistema. En el diagrama temporal azul se representan, superpuestas, las dos evoluciones del sistema para $1 < \mu < 3$. Sólo se ve una debido a que son idénticas y una tapa la otro. En el diagrama inferior se representan las dos evoluciones temporales para $\mu = 4$. Se aprecia al principio sólo una línea, ya que las configuraciones coinciden. Vemos, no obstante que pronto las soluciones se bifurcan y se vuelven totalmente independientes.

5. El Caos

En la sección anterior hemos visto la definición formal de los puntos fijos y periódicos. Como ejemplo hemos visto éstos en un sistema particular. Además hemos visto cómo al aumentar el número de puntos periódicos aparecen fenómenos que nos gustaría catalogar como caóticos. En esta sección definiremos formalmente el Caos y describiremos algunas propiedades importantes de éste.

5.1. Definición formal del Caos

Recordemos los fenómenos *interesentes* del capítulo anterior:

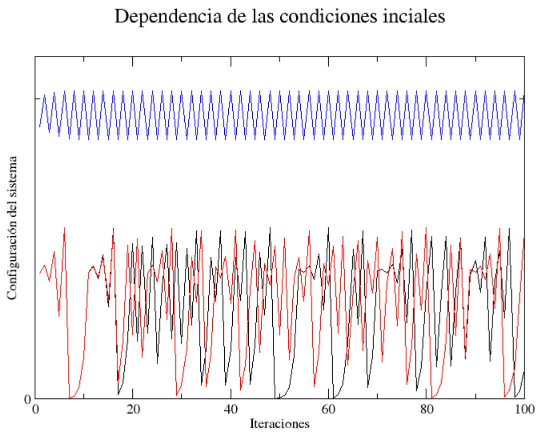


Figura 6: En esta figura se representan dos sistemas diferentes, uno encima del otro. La línea azul es la evolución temporal de un sistema con $1 < \mu < 3$. Aunque se aprecia una sola línea oscilando entre los dos puntos fijos, en realidad hay pintadas dos órbitas diferentes, cada una correspondiente a una configuración inicial dada, pero muy similares entre sí. En las líneas de abajo se muestran las órbitas de las mismas configuraciones iniciales pero en un sistema $\mu = 4$. Se aprecia que al principio el sistema evoluciona de la misma manera, pero pronto se separan las órbitas para no volver a encontrarse. Esto es la sensibilidad a las condiciones iniciales.

- Aparición de más y más puntos periódicos (fig. 4)
- El espacio de fases «se llena» de puntos (fig. 5)
- Sensibilidad a las condiciones iniciales (fig. 6)

Definición 7 *Sean $A \subset B$ dos conjuntos no vacíos, y sean $a \in A$ y $b \in B$ dos puntos de sendos conjuntos. Sea $d(a, b)$ una distancia. Se dice que A es denso en B si*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; y \;\; \forall b \in B \;, \exists a \in A \quad tal\ que \quad d(a, b) < \epsilon$$

Por ejemplo, los racionales del intervalo $[0, 1]$ son densos en este intervalo

Definición 8 *Se dice que un sistema dinámico (f, X) tiene la propiedad de mezcla si para cuales quiera conjuntos $I, J \subset X$ arbitrariamente pequeños existe un n tal que $f^n(I) \cap J \neq 0$*

Es decir, que independientemente de la configuración inicial, el sistema no deja ningún punto del espacio de fases sin pisar. Otra forma de decirlo es que el sistema llena el espacio de fases, o que las órbitas no son cerradas.

Definición 9 *Un sistema* (f, X) *es sensible a las condiciones iniciales si* $\exists\delta > 0$ *tal que que para cualquier* $x \in X$ *y* $\epsilon > 0$ *existen* $y \in X$ *y* n *verificando*

$$|x - y| < \epsilon \quad y \quad |f^n(x) - f^n(y)| > \delta$$

Es decir, que por muy juntas que estén las condiciones iniciales, el sistema tiende a separarlas muy deprisa, tanto que no depende de lo juntas que lleguen a estar, pues δ no depende de ϵ. Todo sistema depende de las condiciones iniciales, pero no necesariamente de forma tan dramática.

Pues bien, ahora estamos en condiciones de definir el Caos como Dios manda:

Definición 10 *Un sistema dinámico* (f, X) *se dice* **caótico** *si verifica las siguientes propiedades:*

- *los puntos periódicos de* f *son densos en* X
- *es sensible a las condiciones iniciales*
- *tiene la propiedad de mezcla*

Habría que decir que en realidad todas estas condiciones no son independientes, por ejemplo se puede demostrar que las propiedades 1 y 3 implican la 2. Eso son sutilezas, nos interesa esta definición porque todas las condiciones tienen bastante física por sí solas, como se ha puesto de manifiesto en el ejemplo de la ecuación logística. Se puede demostrar que así definido, la ecuación logística es un sistema caótico.

5.2. La transformación del panadero

Parece que los sistemas caóticos son complicados e impredecibles. Vamos a ver que en realidad lo que caracteriza al Caos es una misma cosa. Imaginemos que tenemos un espacio de fases que es $[0, 1] \times [0, 1]$. Si queremos un sistema caótico, tendremos que definir una función que desplace puntos dentro del espacio y que lo haga de forma muy desordenada. Por ejemplo, queremos que si inicialmente tenga un cuadrado dentro pintado de negro, éste evolucione rompiéndose en mil pedazos y llenando uniformemente el espacio como si se tratase de una gota de tinta. Un algoritmo para hacer esto es la transformación del panadero, que consiste en dos pasos:

- se estira el espacio de fases deformándolo como si fuera elástico
- se corta en trozos y se pegan por lugares diferentes de donde se cortaron

Este proceso es el que realiza un panadero amasando hojaldre y de hecho lo hace porque es la mejor forma de conseguir que el sistema se homogeneice.

Por ejemplo, la función definida a trozos:

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} (2x, y/4) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ (2x-1,)1/2 + y/4 & \text{si} \quad 1/2 < x \leq 1 \end{array} \right.$$

contiene dichos ingredientes.

El punto de cortar y pegar es fundamental. Esto es lo que hace que condiciones iniciales muy parecidas terminen en lugares muy dispersos, ya que un proceso de corte puede separar vecinos para siempre. Esto es importante, una función lineal puede deforar el espacio, pero como no contiene cortes no producirá Caos. Esto es lo que hace que los sistemas no lineales sean los caóticos, puesto que contienen ambos ingredientes. En el ejemplo de arriba, la no linealidad está dada por la definición a trozos de la función.

Todo sistema caótico pues, ha de ser no lineal y de alguna manera actúa deformando el espacio para luego cortarlo y pegarlo en diferentes configuraciones, ése es el *modus operandi* del Caos.

5.3. Universalidad del Caos

Aparte de las definiciones, que las he hecho en la forma más general posible, los ejemplos y las explicaciones las he llevado a cabo basándome en ejemplos concretos, sobre todo en la ecuación logística. Podría pensarse que las propiedades de este sistema no tienen por qué tener caracter general, que todo lo dicho sólo es válido para este sistema en particular. Pero en realidad el Caos es un concepto muy general, y el Caos de la ecuación logística es, en muchos sentidos, el único que hay y el que se presenta en todos los sistemas.

Volvamos al diagrama de Feigenbaum. Si recordamos, había un valor de μ para el que el periodo se duplicaba por primera vez, si lo recuerdas era $\mu = 3$. Más adelante se duplicaba otra vez, y se podía demostrar (resolviendo un polinomio de grado 4) que esto ocurre en $\mu = 1 + \sqrt{6}$. Llamaremos μ_1 al punto en el diagrama en que ocurre la primera bifurcación, μ_2 al segundo y así sucesivamente. Para encontrar μ_3 ya hay que resolver polinómios de grado 8, la cosa se complica rápidamente. Esto no debe preocuparnos, porque Feigenbaum calculó muchos de estos valores ya por nosotros.

Pues bien, definamos ahora $d_k = \mu_{k+1} - \mu_k$ y $\delta_k = \frac{d_k}{d_{k+1}}$. Feigenbaum se dio cuenta de que la serie δ_k convergía a una constante:

$$\lim_{k \to \infty} \delta_k = 4{,}669 \ldots$$

Que se denomina **constante de Feigenbaum**. Lo importante de esta constante es que se ha comprobado que muchos sistemas caóticos la contienen de alguna manera. Al igual que ocurre con el número π, que aparece en todo lo relaciondo con circunferencias o círculos.

Tengamos en cuenta que la teoría del Caos apenas ha comenzado su andadura, y que hoy en día está en extensa investigación. Al igual que antiguamente se conocía la relación entre círculos y esferas, pero quizá no se entendían las propiedades del número π, hoy en día tenemos sistemas caóticos que sabemos que están relacionados, que hay un número por ahí pero no se entienden muy bien sus implicaciones. Quizá, cuando se desarrolle toda la teoría, comprendamos la relación de la constante de Faigenbaum (también llamada constante del Caos) con todos los sistemas caóticos y haya una teoría unificada que los describa como diferentes caras de un mismo fenómeno.

La inmensa mayoría de los sistemas estudiados hasta ahora por la ciencia siempre han sido sistemas lineales. Esto es así porque son los fáciles, la verdad. Sin embargo, la naturaleza nos enseña que es intrínsecamente no lineal, que lo lineal es sólo una aproximación y por tanto los sistemas reales son caóticos. Ejemplos de estos son las reacciones químicas, la bolsa, sistemas físicos de muy diversa índole (óptica, relatividad, incluso física clásica), relaciones entre animales en un ecosistema... la lista es interminable y abarca todas las ramas de la ciencia. Si la constante del Caos es tan importante para describir estos sistemas, puede que sea incluso más importante que el famoso número π.

6. Atractores extraños y fractales

Hasta ahora nos hemos concentrado mucho en el Caos en los sistemas discretos. En estos, el sistema puede ser caótico independientemente del número de dimensiones, como hemos comprobado en el cado de la ecuación logística, caótica en 1 dimensión. Sin embargo, en sistemas continuos existe el teorema de Poincaré-Bendixos[6], que dice que en 1 y 2 dimensiones las órbitas tienen tres posibilidades:

- escapan al infinito
- convergen a un punto
- tienen un ciclo periódico

Esto quiere decir que en sistemas continuos en 1 y 2 dimensiones no existe el Caos. Por esto, es inevitable tratar un poco más en profundidad

[6] Para que es cumpla este teorema, el sistema dinámico tiene que tener ciertas propiedades de regularidad en la función que da la evolución. Estas propiedades, como continuidad y diferenciabilidad se dan fácilmente en los sistemas de interés.

los sistemas caóticos en varias dimensiones. Primero generalizaremos los conceptos importantes, para luego definir los atractores extraños y poner algunos ejemplos de estos. Finalmente veremos su relación con los fractales.

6.1. Atractores extraños

Un atractor es, básicamente, un conjunto de puntos hacia los que las órbitas del sistema tienden.

Definición 11 *Sea el sistema dinámico (f, X). Diremos que $A \subset X$ es un* ***atractor*** *si $\exists \mathbb{C}$ conteniendo a A tal que $\forall x \in \mathbb{C}$*

$$d(f^k(x), A) \to 0 \quad \text{cuando } k \to \infty$$

El conjunto $\mathbb{C}$ es la ***cuenca de atracción*** *del atractor A.*

Esta definición, que en realidad ha sido dada para sistemas discretos es fácilmente generalizable a sistemas continuos. Un atractor no es algo exclusivo del Caos, ni mucho menos. Por ejemplo, un oscilador amortiguado, que no tiene por qué ser un sistema caótico, tiene un atractor que es el centro del espacio de fases.

Ahora daremos una generalización de los puntos fijos

Definición 12 *Sea un sistema dinámico (f, X), diremos que un conjunto $B \subset X$ es invariante si*

$$f(B) = B$$

Por ejemplo, un atractor es un conjunto invariante. Los puntos fijos de la ecuación logística son también una conjunto invariante. Los atractores eran bien conocidos antes del inicio de toda esta teoría. Sin embargo, con el descubrimiento del Caos se encontraron atractores con propiedades bastante más complejas que, por ejemplo, el del oscilador amortiguado. Por esta razón, y porque se creía que los sistemas caóticos eran una rara excepción, se llamó a estos conjuntos **atractores extraños**. En realidad, ahora sabemos que los atractores extraños no son «tan extraños» en la naturaleza.

Un atractor extraño, aunque es un conjunto invariante, tiene mucha complejidad, en el sentido en que las órbitas de sus puntos pueden ser muy complicadas. Además, como vimos en la transición al Caos de la ecuación logística, la cantidad de puntos fijos se hacía densa cuando el sistema se convertía en caótico. En base a estas ideas intuitivas que obtuvimos, podemos definir los atractores extraños:

Definición 13 *Sea (f, X) un sistema dinámico, y sea A un atractor de éste. El conjunto A es un* ***atractor extraño*** *si:*

- *existe al menos un punto $x \in A$ tal que $\{f^k(x)\}$ es denso en A*
- *el conjunto de puntos periódicos en A es denso en éste*
- *tiene sensibilidad a las condiciones iniciales*

En realidad, esta no es la única definición de atractor extraño, y no es muy adecuada en el sentido que no son condiciones totalmente independientes. Usamos esta definición, aún así, porque los tres requerimientos dan una idea intuitiva del comortamiento de estos conjuntos, que es lo que nos interesa.

Un ejemplo de atractor extraño es el de la ecuación logística. Cuando $1 < \mu < 3$, tenemos un punto fijo, que es el atractor (no extraño) del sistema, al hacer $\mu = 3{,}1$ tenemos ahora dos puntos fijos y así sucesivamente al aumentar μ. Cuando μ se acerca a 4, aparece un conjunto mayor y mayor de puntos fijos que se hacen densos en el intervalo. Ése es precisamente el atractor extraño de este sistema, aunque no es fácil caracterizarlo matemáticamente.

En general, los atractores de la familia de sistemas dinámicos tipo la ecuación logística tienen atractores extraños que son estructuras cantorianas. Éstas se forman quitando a un intervalo un fragmento interior de éste; luego, a los que quedan se les vuelve a quitar un fragmento y así sucesivamente. Al conjunto al que tiende esta sucesión de amputación de intervalos se le denomina conjunto de Cantor, y es la forma típica de los atractores extraños en sistemas unidimensionales.

Hay varios ejemplos de atractores extraños en la naturaleza. El más conocido e importante históricamente es el atractor de Lorenz, que como dijimos al principio, fue encontrado por éste al intentar resolver unas ecuaciones que simularan el comportamiento del clima. Este sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= Rx - y - xz \\ \dot{z} &= -Bz + xy \end{aligned}$$

donde R, σ, B son constantes positivas. Si se resuelve numéricamente este sistema con un ordenador, se encuentra que todas las trayectorias, independientemente de la condición inicial tienen a describir la figura 7.

Como vemos, el sistema de ecuaciones de Lorenz es no lineal. Esta condición es necesaria para la aparición del Caos, pero no es suficiente, necesitamos además que el sistema sea disipativo, esto es, que disipe energía. La definición matemática de disipativo no involucra obviamente la energía, pero sí una consecuencia de esto, que el volumen del espacio de fases se encoge debido a que el número de estados accesibles se reduce.

Definición 14 *Sea $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nu(\mathbf{x}(t))$ un sistema dinámico continuo con solución $\phi(t) = (x_1(y), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. Y sea $U \subset \mathbb{R}^n$ el espacio de estados*

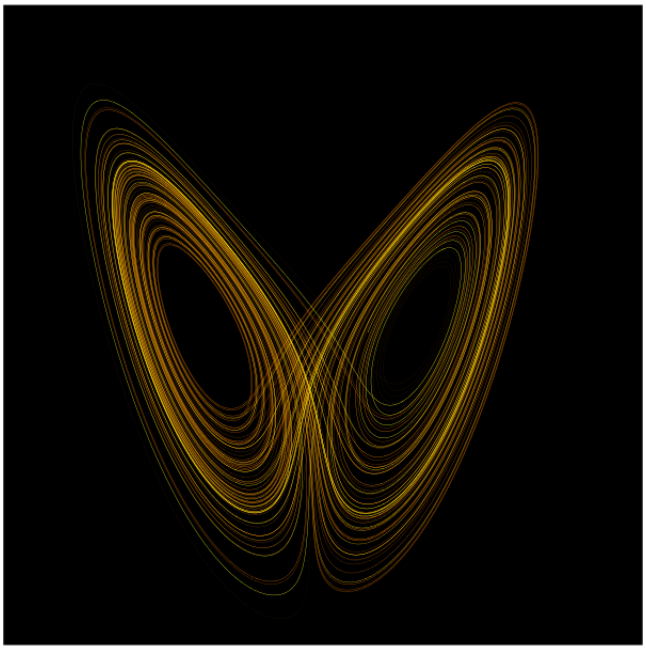


Figura 7: Atractor de Lorenz. Se representa la trayectoria del sistema $(x(y), (t), z(y))$, que es solución al sistema de ecuaciones de Lorenz para unos parámetros dados. Se observa la misma figura independientemente de las condiciones iniciales. La forma geométrica es aproximadamente dos discos en diferentes planos, ya que es intrínsecamente tridimensional.

inicial. El sistema se denomina disipativo si

$$Vol(\phi_t(U)) \to 0 \quad \textit{cuando } t \to \infty$$

Precisamente, el atractor del sistema viene dado por

$$A = \bigcap_{t>0} \phi_t(U)$$

que es un conjunto de medida nula[7].

6.2. Fractales

Como estamos viendo, los atractores extraños son objetos geométricos complicados. Tienen dimensión nula, pero son densos. Además, si uno aumenta la escala del dibujo en la figura 4, donde se muestra la figura de

[7] Cuando hablo de volumen me refiero al concepto matemático. Por ejemplo, cuando estamos en una dimensión, el volumen se define como la longitud, en el plano se define como el área. Una línea en el plano no tiene área, y por tanto su volumen matemático es nulo. Análogamente, un círculo no tiene volumen en $\mathbb{R}^3$, y una esfera tiene volumen cero en $\mathbb{R}^4$

Feigenbaum, uno se puede dar cuenta de que un zoom sobre la figura parece que es igual a la figura sin aumentar, se dice que es autosemejante. Estas propiedades recuerdan mucho a las de las estructuras matemáticas conocidas como **fractales**. Un fractal es una figura geométrica que, si bien tiene medida nula en el espacio, es tan intrincadamente compleja que «casi» tiene volumen.

El fractal más conocido es la figura de Mandelbrot, que se muestra en la figura 8. Este conjunto se define como los puntos c del plano complejo que hacen que la sucesión

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

no diverja. Es decir,

Definición 15 *Sea* $\mathbb{M}$ *el conjunto de Mandelbrot y* z_n *la sucesión dada arriba. Sea* c *un punto cualquiera el plano complejo. Diremos que* $c \in \mathbb{M}$ *si se cumple que* $|z_n| < 2 \quad \forall n$.

Imponemos que sea menor que 2 porque es suficiente que un término alcance este valor para que la sucesión sea divergente. Como vemos en la figura, es básicamente un círculo del que salen protuberancias. Podríamos hacer un zoom en cada protuberancia y comprobaríamos que es análoga a la inicial, con nuevas protuberancias. Este proceso se puede llevar *ad infinitum*, y es una de las características más importantes de los fractales.

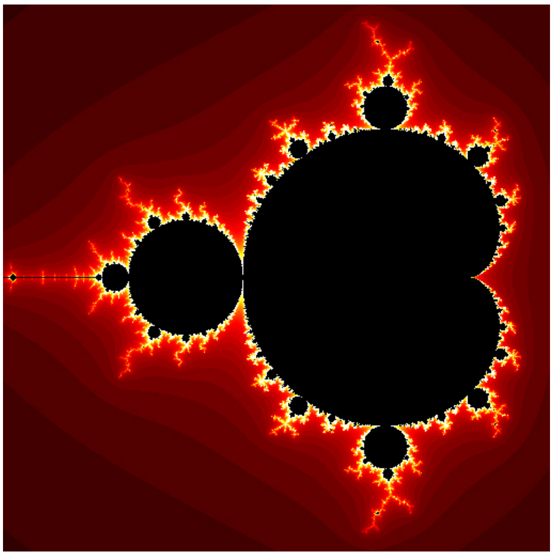


Figura 8: Vemos cómo el conjunto de puntos c del plano complejo es muy ramificado. Cada una de las ramas está compuesta de una infinitud de pequeñas réplicas de la imagen inicial. Este proceso no termina nunca.

Una propiedad importante de un fractal es su **dimensión fractal**. Imaginemos una curva en el plano, obviamente no tiene área. Si la doblamos una y otra vez, haciendo formas muy muy complicadas, esta curva empezará a llenar el plano, y si llevamos este proceso hasta el infinito, ¿quizá podría tener área?. No puede tener dimensión 2, puesto que es una curva, no una figura geométrica, sin embargo tampoco es justo llamarlo curva, puesto que es denso en el plano. Para caracterizar hasta qué punto empieza a llenar el plano, se define esta dimensión, que no puede ser entera.

Imagina que ponemos una malla en el plano. La distancia entre líneas es $\delta_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Sobre esta malla colocamos figuras geométricas, y podemos contar el número de cuadraditos de área δ_k^2 que corta, lo llamaremos $N(k)$. Si colocamos en la malla una figura geométrica bidimensional sencilla, como un círculo o un cuadrado, tendremos que

$$\lim_{k\to\infty} N(k)\delta_k^2 = A$$

lo que nos da el Área de la figura. Si ahora ponemos una curva unidimensional, como una circunferencia, análogamente

$$\lim_{k\to\infty} N(k)\delta_k = L$$

para la longitud de la curva. Pues bien, en general, para una figura arbitraria se cumple que

$$N(k) \approx \delta_k^{-D}$$

con $0 \leq D \leq 2$. D es la dimensión del objeto que tenemos. Si colocamos un fractal sobre la malla, obtendremos que D no vale ni 1 ni 2, sino un punto intermedio entre ambos. Por tanto, se define la dimensión fractal como

$$D = -\lim_{k\to\infty} \frac{\log N(k)}{\log \delta_k}$$

Aunque lo expuesto aquí es para objetos embebidos en dos dimensiones, es fácilmente generalizale a 3. Por ejemplo, el atractor de Lorenz es como un par de discos muy complicados, parece que tengan dimensión cercana a 2. Efectivamente, una evaluación con el ordenador de la expresión anterior arroja $D = 2{,}05$ para este sistema.

7. Implicaciones filosóficas del Caos

Aunque parece una tontería, la existencia del Caos tiene profundas implicaciones en un tema tan alejado de las matemáticas como es la libertad de albedrío de las personas.

En el siglo XVIII, el matemático Laplace se dio cuenta de que las leyes de Newton eran deterministas. Esto quiere decir que basta con conocer las condiciones iniciales de un sistema dinámico para, mediante las leyes de Newton, conocer con exactitud la configuración del sistema en cualquier instante posterior. Esto es, de hecho, el objetivo de la física, y se lleva a a cabo día a día en laboratorios o en la vida cotidiana, la capacidad de predicción es algo habitual. Esta visión del mundo se llama a veces **determinismo Laplaciano**.

El problema con él, es cuando se generalizan sus implicaciones al universo como un todo. A fin de cuentas, el universo es algún sistema dinámico, por tanto la teoría de Newton es aplicable y aunque no conozcamos la solución del sistema, sabemos que ésta existe, que está «escrita» en algún lugar. Por tanto, dado que las condiciones iniciales del Universo pudieron ser dadas en la creación[8] de éste, la evolución ya está totalmente determinada.

Pensemos ahora en las personas. Éstas forman parte del Universo y están compuestas de partículas, que obedecen leyes deterministas. Por tanto, todo lo que le ocurra a las personas es fruto de lo que ha pasado antes. Realmente, nada de lo que ocurre es arbitrario, sino que ya estaba implícito en la creacción del universo. Incluso las elecciones más tontas, como qué comer hoy ya están «tomadas». Ni que decir tiene, que es una postura un poco incómoda para las personas, que nos gusta sentir que tenemos libertad de albedrío.

Afortunadamente para los amantes de la libertad, el paradigma clásico cambió a finales de XIX. Hasta el siglo XX, el paradigma científico eran las leyes de Newton, totalmente deterministas. Sin embargo, a principios de este siglo, aparece una nueva forma de entender el mundo: la **Mecánica Cuántica**. Lo importante en cuanto nos concierne ahora mismo de esta teoría, es que es *no determinista*. Quiere esto decir que no es capaz de dar una evolución precisa del universo, sino que sólo es capaz de dar una interpretación probabilística del mismo. No voy a entrar en detalles ahora sobre cómo se comporta este nuevo paradigma. Simplemente es importante quedarnos con la idea de que no es totalmente determinista.

Esto supuso un duro golpe para el determinismo de Laplace, pero no del todo. La mecánica cuántica se ocupa de procesos microscópicos (a niveles atómicos), pero las leyes de Newton siguen siendo válidas en el ambiente cotidiano. Por tanto, las fluctuaciones estadísticas que introduce la Mecánica Cuántica son sólo pequeños cambios microscópicos en el Universo. Dado que los procesos neuronales están llevados a cabo por reacciones químicas a mucha mayor escala que los átomos, la mecánica cuántica por sí sola no puede negar el determinismo.

[8]Creacción en el sentido que queramos. Da igual si el Universo fue creado por Dios, en el Big Bang o lo que sea.

Y es aquí donde entra la teoría del Caos. Como estamos viendo todo el tiempo, la naturaleza es intrínsecamente caótica, sería difícil imaginar un universo, con unas leyes tan tremendamente complicadas que no podemos conocer, que fuese un sistema lineal. La mecánica cuántica introduce pequeñas perturbaciones en él. Por tanto, debido a la sensibilidad de las condiciones iniciales, la evolución del Universo como un todo no va a ser necesariamente determinista. Cada pequeña elección que tomamos modifica tremendamente la evolución del resto de nuestra vida y la de los que nos rodean. Por ejemplo, salir 5 minutos más tarde de casa porque nos hemos torcido un poco el tobillo bajando las escaleras puede ahorrarnos estar involucrados en un accidente de tráfico mortal[9], o viceversa. Se puede decir que el Caos nos hace libres.

8. Mi problema con el Caos

Como comenté al principio, yo me enfrenté con este problema por primera vez cuando estudiaba un problema aparentemente trivial. Se trata de una partícula botando entre los dos planos inclinados enfrentados.

8.1. Planteamiento

Tenemos un bote totalmente elástico, además no hay rozamiento, de manera que la energía mecánica se conserva en todo momento. La evolución entre choque y choque es trivial, pues es un movimiento parabólico habitual. El único problema pues, es calcular donde exáctamente choca la partícula con el plano inclinado en su trayectoria parabólica. Eso se resuelve sin muchos problemas, realmente, aunque la solución no es fácilmente expresable como una función de las coordenadas del choque anterior, pues la superficie de los planos no es una función lineal[10]. Programándolo, el ordenador puede calcular fácilmente la sucesión de coordenadas de los choques en el espacio de fases

$$\{(x_0.y_0, v_{x0}, v_{y0}), (x_1.y_1, v_{x1}, v_{y1}), \dots, (x_n.y_n, v_{xn}, v_{yn})\}.$$

Se trata pues, de un sistema dinámico que, aunque es continuo, a efectos de mi planteamiento **es un sistema discreto**.

8.2. Aparición del Caos

Pronto me di cuenta de que el sistema tenía comportamientos caóticos, pues tras un número elevado de iteraciones obtengo cosas como la figura 9.

[9] Por cierto, el tráfico es un sistema caótico también.
[10] el caso de un solo plano inclinado infinito es un problema académico trivial

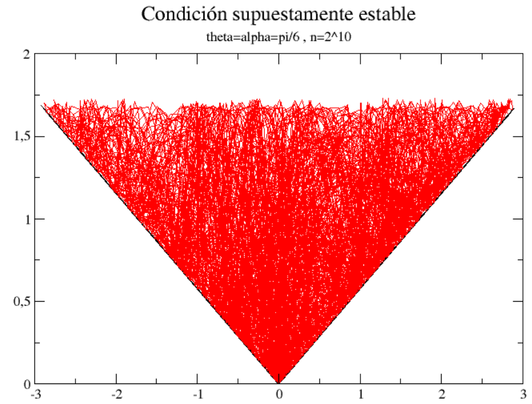


Figura 9: Propiedad de mezcla del problema de los planos inclinados enfrentados. *alpha* y *theta* son los ángulos que forman los planos con la horizontal, y n es el número de botes. Se observa cómo la partícula llena todo el espacio.

Además, el sistema es enormemente sensible a las conciciones iniciales. Nos fijamos en la coordenada X en cada choque, y ejectutamos dos lanzamientos con coordenadas idénticas hasta la quinta cifra decimal, pronto las trayectorias se separan drásticamente, como se muestra en la figura 10.

Estas figuras dan indicios de comportamiento caótico, y fue lo que me hizo entrar en este bonito tema. Realmente no he tenido tiempo todavía de estudiar este misterioso sistema más en profundidad.

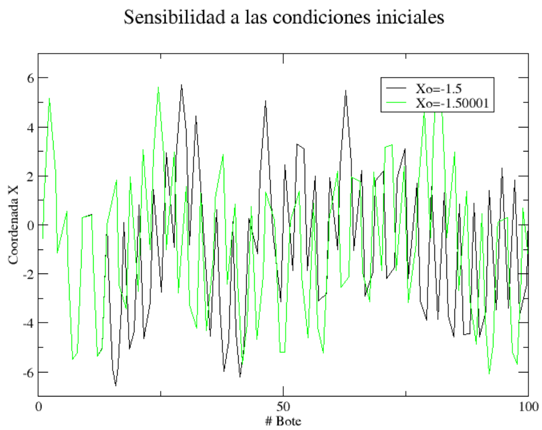


Figura 10: Sensibilidad a las conciciones iniciales. Se dejan evolucionar dos partículas, la única diferencia es la quinta cifra decimal en la coordenada X. Al principio ejecutan un movimiento similar, pero pronto sus trayectorias se separan para siempre.