

CAOS DETERMINISTA

A. d'Anjou, C. SARASOLA y F.J. TORREALDEA (*)

Muchos sistemas dinámicos con leyes de funcionamiento sencillas exhiben modos de comportamiento errático, con un aspecto aleatorio imposible de predecir con precisión. El estudio de este tipo de sistemas puede ayudarnos a comprender mejor algunas patologías relacionadas con pautas temporales anormales como la fibrilación cardíaca o los ataques epilépticos. En un futuro próximo, las tecnologías de la información y comunicación también pueden llegar a beneficiarse de un mejor conocimiento de estos sistemas caóticos.

1. PRESENTACIÓN DEL FENÓMENO

Supongamos que, en un sistema del que sabemos está gobernado por leyes deterministas perfectamente conocidas, encontramos que la evolución en el tiempo de los valores de alguna de sus variables presenta apariencia aleatoria. Si ese es el caso, es muy posible que estemos frente a una manifestación de caos determinista. El caos determinista resulta un tanto desconcertante en la medida en que, a pesar de ser un fenómeno gobernado por leyes deterministas sencillas, no hay manera de predecir su comportamiento. Los modelos matemáticos asociados a un fenómeno de caos determinista no pueden resolverse mediante procedimientos analíticos, no puede establecerse la variación en el tiempo de los valores de sus variables mediante las funciones que la matemática utiliza normalmente. Por ello, no es extraño que el problema de los tres cuerpos, que hoy sabemos que es un problema de dinámica caótica, desconcertara a Poincaré a finales del siglo diecinueve. En aquel esplendor científico, con una mecánica racional triunfante, cuando Poincaré inspiraba a Einstein sobre qué tipo de transformaciones deberían permanecer invariantes en la Teoría de la Relatividad, resulta que no había manera de poder establecer el movimiento que siguen tres masas puntuales interaccionando gravitacionalmente entre sí.

Sin embargo, hoy en día, además de procedimientos analíticos, disponemos de otros procedimientos de resolución. Sobre la base de las leyes conocidas del movimiento podemos calcular las trayectorias numéricamente. Empezando desde una posición inicial podemos ir calculando, paso a paso, las sucesivas posiciones de las variables conforme va avanzando el tiempo. Es sencillo, pero hace falta velocidad de cálculo. Se comprende que haya habido que esperar a la llegada del ordenador para poder abordar la resolución de problemas numéricamente. Esto es lo que hizo el meteorólogo E. N. Lorenz, en 1963, estudiando un pequeño modelo climático. El resultado fue sorprendente y ha condicionado la investigación en la teoría matemática de sistemas dinámicos, y en muchos otros campos del saber, durante los últimos treinta años. Los resultados del cálculo relativo al modelo climático resultan ser muy dependientes, demasiado, de la precisión con que se establezcan los valores iniciales y de la de los propios cálculos. Pequeñas variaciones en los valores iniciales, incluso variaciones dentro de los límites de precisión aceptados, conducen a trayectorias completamente distintas. En la práctica, la predicción meteorológica a largo plazo resulta imposible. De lo que se sigue que tampoco los actuales métodos numéricos de ordenador resultan satisfactorios para encontrar la trayectoria precisa que seguirá un sistema caótico. Así pues, tras esperar casi un siglo, el problema de los tres cuerpos sigue sin resolverse. Es más, el propio concepto de trayectoria de un sistema dinámico, central a nuestra concepción macroscópica del universo, comienza a tambalearse al no poder encontrarse ni analítica ni numéricamente una solución exacta para un problema con comportamiento caótico. La aparición de caos determinista resulta, desde ese punto de vista, un ataque frontal a nuestra manera de entender el mundo que nos rodea.

(*) Profesores de la Facultad de Informática de la UPV.

2. UN EJEMPLO DE SISTEMA CAÓTICO. EL SISTEMA DE LORENZ

Utilizaremos el sistema caótico de Lorenz, [1], como un ejemplo representativo de comportamiento caótico determinista. Es un sencillo sistema dinámico descrito por tres ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - yz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

donde $\sigma = 16$, $\rho = 45$, $\beta = 4$ son parámetros. El sistema tiene comportamiento caótico para un amplio rango de valores de los parámetros siempre que estos sean positivos. Los valores dados son valores ampliamente utilizados en la bibliografía. El sistema no tiene solución analítica y su solución debe encontrarse mediante métodos numéricos. En la Figura 1 se muestra un esquema de integración utilizando la herramienta SIMULINK de MATLAB, [2]. Esta herramienta es un potente paquete de rutinas de integración de ecuaciones diferenciales dirigidas por el propio editor gráfico, lo que la hace muy útil para trabajar en diseño ingenieril. Su utilización es sencilla. Para comprender el esquema de la figura nótese que hay tres integradores, uno para cada una de las variables. Si a un integrador le entra la derivada respecto del tiempo de una variable su salida es la propia variable. Puesto que las ecuaciones de Lorenz nos dan explícitamente las derivadas como función de las variables, basta con construir esas derivadas utilizando productos y sumas en la forma que puede verse en el diagrama de la Figura 1.

El resultado de la integración del sistema de Lorenz se muestra en la Figura 2. Como puede apreciarse la evolución temporal es oscilatoria para las tres variables, pero las pautas nunca llegan a repetirse. El movimiento no es periódico. La evolución temporal mostrada corresponde a la solución numérica obtenida en las condiciones en las que se ha integrado, en concreto, utilizando unos valores iniciales representados en doble precisión y un algoritmo de integración Runge-Kutta 4, con unas condiciones de precisión establecidas. Como veremos a continuación, cualquier modificación, por mínima que sea, de estas condiciones conducirá a otra curva distinta, similar pero distinta. Por eso hemos comentado la dificultad de obtener la trayectoria real. Si para cada valor del tiempo representamos las variables x , y , z en el espacio tridimensional obtenemos una figura característica, Figura 3, que se conoce como atractor de Lorenz.

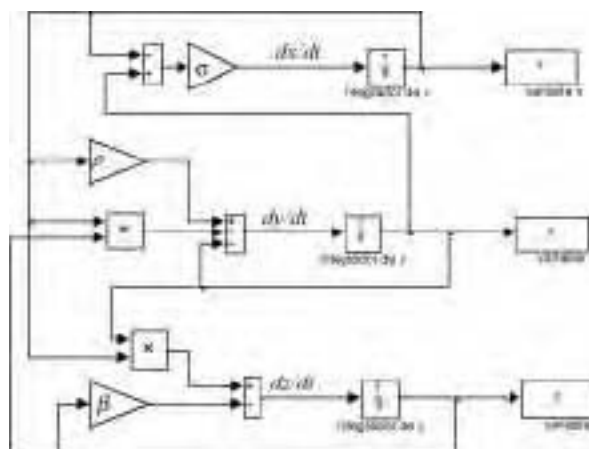


Figura 1. Modelo de Lorenz en Simulink

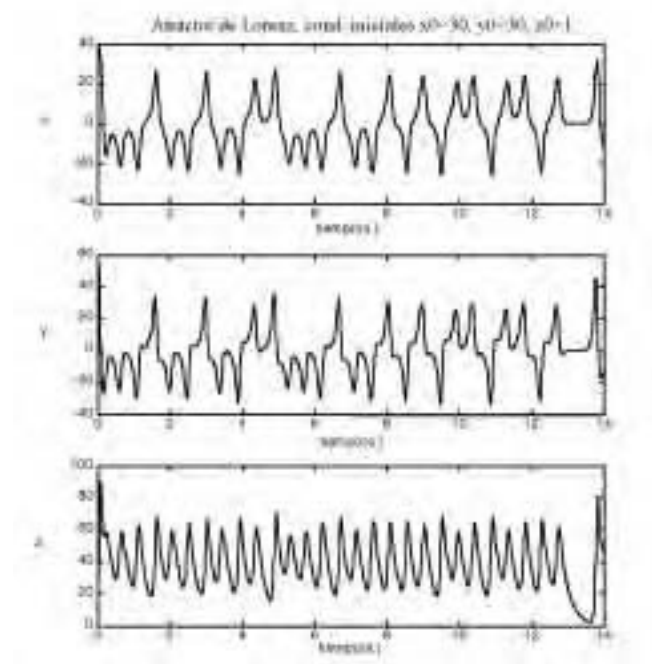


Figura 2. Trayectorias temporales de las tres variables del sistema caótico de Lorenz

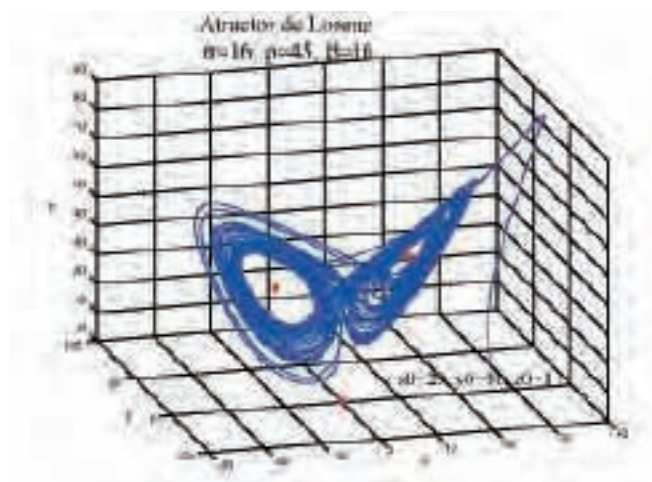


Figura 3. Atractor de Lorenz

3. CARACTERIZACIÓN DEL CAOS DETERMINISTA

A continuación abordaremos la caracterización de sistemas caóticos, es decir, veremos en mayor detalle algunos de los aspectos que son característicos del caos determinista. Para un estudio completo recomendamos el libro de R.C. Hilborn, [3].

3.1 SISTEMA NO LINEAL

El comportamiento caótico sólo aparece en sistemas no lineales. Un sistema es lineal cuando las leyes que rigen su comportamiento son lineales. Las soluciones de un sistema lineal son

en general periódicas y expresables de manera analítica y, por lo mismo, éste es el tipo de comportamiento que ha sido objeto de un estudio sistemático. Por el contrario, un comportamiento caótico determinista presenta oscilaciones no periódicas permanentes para las que no podemos encontrar una expresión analítica. El sistema de Lorenz es no lineal ya que en las expresiones de las derivadas temporales de las variables y y z aparecen los productos yz y xy respectivamente.

3.2 SENSIBILIDAD EXTREMA A LOS VALORES INICIALES

Una de las características más definitorias del comportamiento caótico determinista es la gran sensibilidad de las trayectorias a las condiciones iniciales. Dos trayectorias que arranquen desde puntos iniciales tan próximos como queramos terminan separándose y perdiendo toda correlación entre ellas. Esta propiedad ha sido recogida en imagen popular como el llamado *efecto mariposa*. La pequeña perturbación que puede causar en el aire las alas de una mariposa en su vuelo podrían alterar, a largo plazo, la predicción del tiempo meteorológico. La metáfora es del propio Lorenz. La Figura 4 muestra la evolución temporal de las tres variables de Lorenz para dos condiciones iniciales muy próximas.

Atractor de Lorenz: Dependencia de las condiciones
azul $x_0=30, y_0=30, z_0=1$ rojo $x_0=29.9, y_0=30, z_0=1$

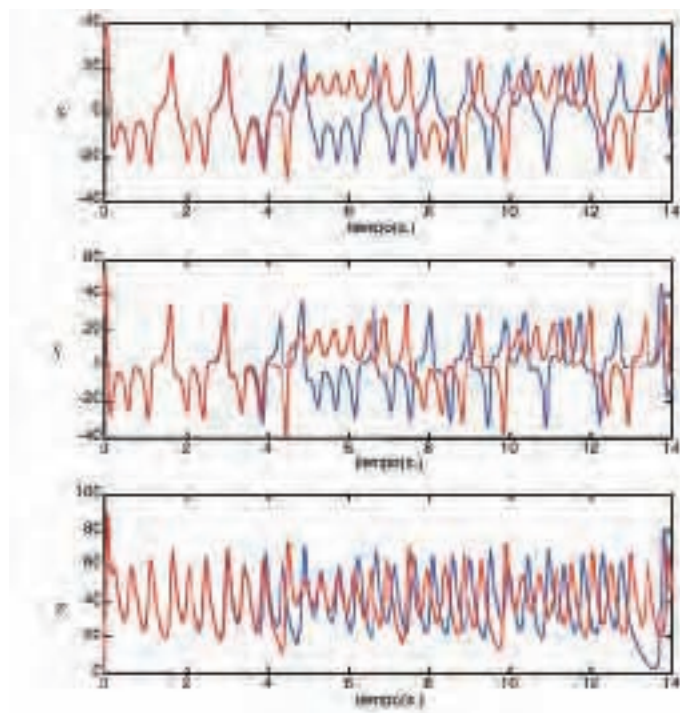


Figura 4. Dependencia de las condiciones iniciales

3.3 ATRACTOR DE VOLUMEN NULO Y GEOMETRÍA FRACTAL

3.3.1 Atractor de volumen nulo

Se llama espacio de estados de un sistema a un espacio geométrico construido sobre la base de sus variables dinámicas. Es decir, el sistema se encuentra en un instante dado en el estado, en el punto del espacio de estados, que corresponde a los valores de cada una de sus variables en ese

instante. La visión del movimiento de un sistema como cambio temporal de los valores de sus variables se puede contemplar, desde una perspectiva geométrica, como que a partir de un estado inicial, conforme el tiempo transcurre, el sistema describe una trayectoria en el espacio de estados, ver Figura 3. Un sistema caótico disipativo se caracteriza por la existencia de una región del espacio de estados, de volumen nulo, hacia la que se dirigen, y en la que quedan atrapadas, todas las posibles trayectorias que se inicien dentro de una cierta cuenca de atracción. A esa región se le llama atractor y, desde cualquier estado inicial que se encuentre dentro de la cuenca de atracción, el sistema evolucionará hacia esa región en la que quedará, en continuo movimiento y sin repetir nunca un mismo estado, atrapado para siempre. El atractor de Lorenz es global en el sentido de que su cuenca de atracción es todo el espacio de estados. Cualquiera que sea el valor inicial de una trayectoria ésta se dirige siempre al atractor. Al ser el atractor de volumen nulo, podemos contemplar el movimiento del sistema como contrayendo toda la cuenca de atracción hacia volumen cero. Por esto se dice que los sistemas disipativos contraen el volumen del espacio de estados, o quizás, al revés, que un sistema es disipativo cuando contrae el volumen del espacio de estados. No todos los sistemas dinámicos son disipativos. Los llamados sistemas conservativos conservan el volumen. Los sistemas por antonomasia de la física, los de la mecánica racional, suelen ser conservativos. Aquí nos referiremos sólo a sistemas caóticos disipativos.

3.3.2 Geometría fractal

Los atractores de los sistemas caóticos disipativos tienen propiedades peculiares desde el punto de vista geométrico, son fractales. En esta misma revista en Febrero de 2002, [4], ya se dedicó un artículo a las curvas fractales. Dos son las características fundamentales de una figura con geometría fractal. Una de ellas es que su forma mantiene una pauta repetitiva. Un fractal es, en un sentido cualitativo, similar a sí mismo a distintas escalas. Una idea de este tipo de estructura la proporciona la costa de un país. A vista de avión constituye una figura quebrada. A distintos grados de aproximación la geometría se va progresivamente reproduciendo. Un grano de arena, visto con una buena lupa recuerda mucho a una roca. La naturaleza nos presenta infinidad de ejemplos de este tipo de ordenamiento. Los alvéolos pulmonares o las arterias coronarias muestran con claridad esta pauta de reproducibilidad a distintas escalas.

La segunda característica es que la dimensión de un fractal no es entera. No es ni cero, como un punto, ni uno, como una línea, ni dos como una superficie, ni tres como el espacio ordinario. Puede ser cualquier número. Esta afirmación resulta un tanto enigmática, pero el asunto no es, en realidad, tan raro como parece. Habitualmente tenemos una idea intuitiva, no medible, de la dimensión de los objetos. Cuando decimos que una mesa tiene tres dimensiones no se nos ocurre, probablemente, como comprobarlo. No sabemos medir la dimensión. La dimensión fractal es, por el contrario, el resultado de una medida inventada por los matemáticos, el resultado de un cálculo de ordenador realizado sobre el objeto a medir. El cálculo produce los valores enteros esperados para los objetos ordinarios que conocemos. Sorprendentemente, cuando se aplica a los atractores de sistemas caóticos deterministas el resultado suele ser fraccionario, de ahí el nombre de fractal. Los matemáticos han definido varias medidas de la dimensión de un objeto más o menos similares. Ilustraremos el concepto de dimensión fractal definiendo la llamada dimensión de capacidad y utilizando esa definición para calcular la dimensión del objeto conocido como fractal de Koch.

Supongamos que deseamos recubrir un objeto de volumen V y dimensión D , con cubos D -dimensionales de lado ϵ infinitamente pequeño. El número de cubos $N(\epsilon)$ necesarios para recubrir el objeto será obviamente,

$$N(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^D, \text{ donde } V \text{ es el volumen del objeto}$$

Si tomamos logaritmos a ambos lados de la ecuación (antes de tomar el límite) obtenemos,

$$\log N(\varepsilon) = \log V - D \log \varepsilon$$

Despejando de esta ecuación el valor de la dimensión D tendremos,

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} + \frac{\log V}{\log \varepsilon} \right]$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\log \varepsilon \rightarrow -\infty$, y puesto que V es una constante, el término $\frac{\log V}{\log \varepsilon} \rightarrow 0$, por lo que la dimensión de capacidad puede definirse como,

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

El llamado fractal de van Koch puede verse en la Figura 5. Su generación es sencilla. Dado un segmento inicial de longitud unidad, se divide en tres partes, se quita la del medio y el hueco se rellena con dos segmentos adicionales formando un triángulo equilátero sin la base. Se itera el procedimiento indefinidamente con todos los segmentos. Como puede verse en la figura, recubrir el objeto en la iteración n requeriría 4^n elementos de volumen, de tamaño $\varepsilon = (1/3)^n$. Por lo tanto, la dimensión de capacidad del objeto de Koch podremos calcularla mediante el siguiente paso al límite,

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log \left(\frac{1}{3}\right)^n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 4}{n \log \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

Es decir, el fractal de Koch tiene dimensión 1.26. Es inmediato comprobar que si se aplica esta definición a un punto o a un conjunto normal de puntos se obtiene dimensión cero. Si aplica a un segmento dimensión uno. Si se aplica a una superficie normal, un cuadrado por ejemplo, dimensión dos. La medida funciona bien con los objetos normales y es de confianza. Sin embargo, cuando se aplica al atractor de Koch produce 1.26 y es, por lo tanto, un objeto a medio camino entre una línea y una superficie. Los atractores de los sistemas dinámicos que se mueven en un régimen de caos determinista son objetos fractales. El atractor de Lorenz tiene dimensión 1.27.

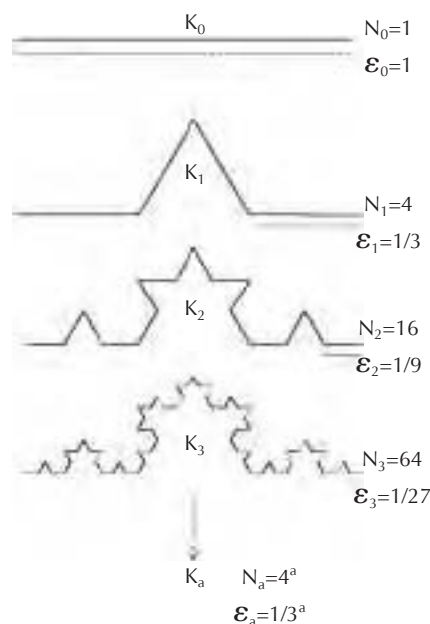


Figura 5. Fractal de Van Koch

3.4 ESPECTRO DE FRECUENCIAS CON COMPONENTES PLANAS

Otra característica de una serie temporal caótica determinista es que suele tener un espectro de frecuencias con componentes planas, como le ocurre a un ruido aleatorio. Una forma de cuantificar las frecuencias dominantes en una serie temporal oscilatoria es obtener su espectro de frecuencias; es decir, si se supone la señal formada por una superposición de señales sinusoidales de distintas frecuencias, determinar cuales son las frecuencias, y en que medida colabora cada una de ellas, en la serie temporal analizada. El espectro de frecuencias se puede obtener mediante técnicas matemáticas basadas en la transformación de Fourier y es una herramienta disponible en cualquiera de los actuales programas de cálculo científico.

Si se obtiene un espectro de la potencia de cada frecuencia para una señal periódica formada, digamos, por la superposición de dos sinusoidales, las frecuencias correspondientes a esas sinusoidales aparecerán claramente destacadas. En el extremo opuesto, una serie temporal aleatoria no tiene frecuencias dominantes o, mejor dicho, todo el continuo de frecuencias está presente con la misma potencia en el espectro de frecuencias de la señal aleatoria. Se da el nombre de ruido blanco a una señal aleatoria con un espectro de frecuencias plano. La Figura 6 muestra el espectro de la potencia de las distintas frecuencias de una aproximación a un ruido blanco generado por un generador de números aleatorios mediante ordenador. La frecuencia de muestreo es 50 hercios por lo que el espectro se ha estudiado hasta una frecuencia de 25 hercios en consonancia con el teorema de muestreo de Nyquist.

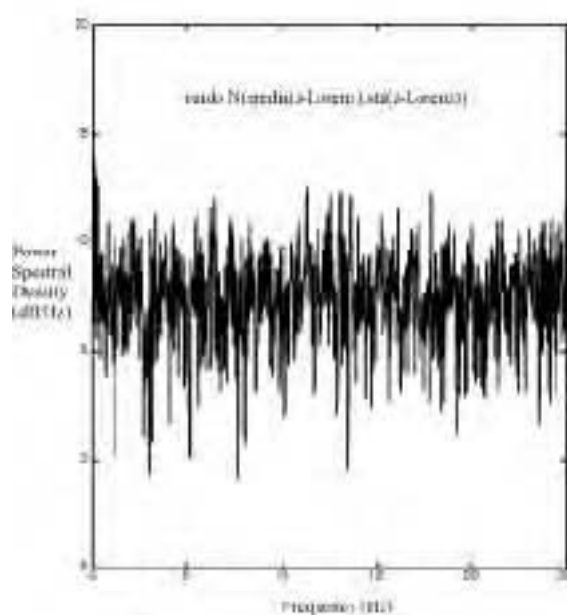


Figura 6. Espectro de potencia de frecuencias de un ruido blanco

El espectro de un ruido blanco es plano en el sentido de que están presentes todas las frecuencias y su potencia se mantiene constante incluso para frecuencias muy altas. Un ruido exactamente blanco es un concepto teórico. La producción física de una señal de esas características requiere aportes de energía indefinidamente crecientes con la frecuencia por lo que las señales reales tienden a ser de potencia decreciente conforme aumenta la frecuencia. La Figura 7 muestra el espectro de frecuencias de un ruido blanco al que se le han superpuesto dos señales sinusoidales de frecuencias definidas. Puede apreciarse cómo las frecuencias periódicas aparecen nítidamente destacadas sobre el fondo correspondiente al ruido blanco.

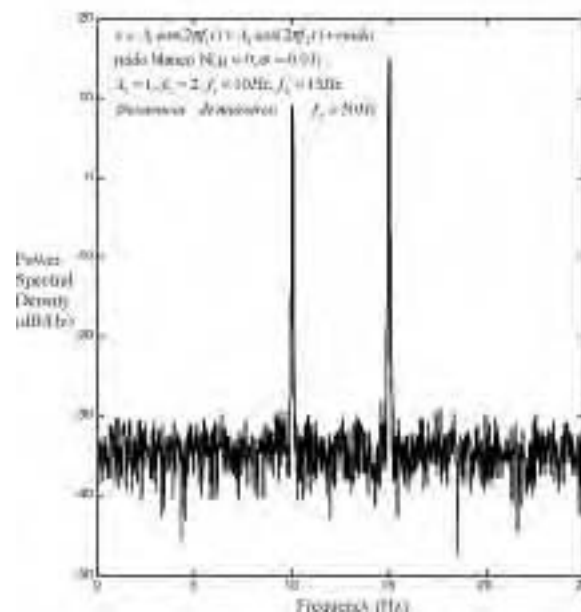


Figura 7. Espectro de potencia de frecuencias de la superposición de dos señales sinusoidales y de ruido blanco

Un sistema caótico determinista da lugar a series temporales no periódicas. Al igual que en un ruido blanco, el caos determinista tiene un espectro de frecuencias con componentes planas dentro de un rango continuo de frecuencias. En ese sentido puede ser tomado por un ruido aleatorio. La Figura 8 muestra un espectro de potencia de frecuencias para la variable z del sistema de Lorenz. Puede apreciarse cómo no se distinguen componentes periódicas nítidas y cómo un continuo de frecuencias están presentes en la señal temporal. La potencia no se mantiene constante sino que va progresivamente disminuyendo con la frecuencia, lo que significa que las componentes de alta frecuencia están progresivamente menos presentes en la señal temporal.

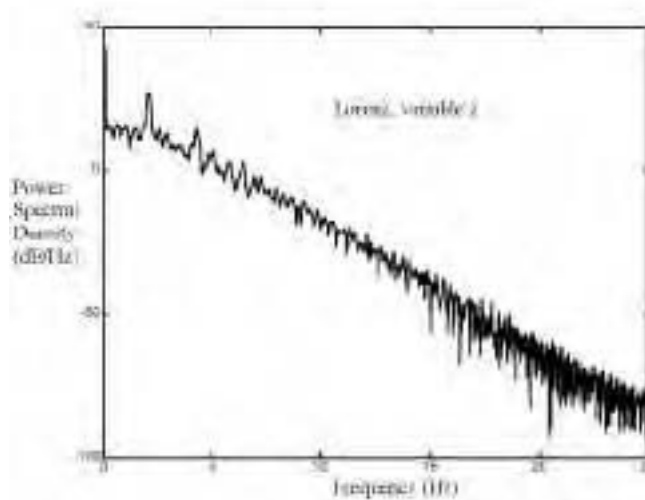


Figura 8. Espectro de potencia de frecuencias de la variable z del sistema caótico determinista de Lorenz

4. CONTROL DEL CAOS. UN RETO CIENTÍFICO Y TÉCNICO

Hasta hace muy pocos años, la reacción frente al comportamiento imprevisible del caos determinista ha sido considerarlo como una rareza matemática que debe ser evitada, como un enemigo de cualquier intento de comprender el mundo o de desarrollar aplicaciones tecnológicas útiles para la humanidad. Sin embargo, la naturaleza presenta numerosas pistas de la presencia de caos determinista en el normal funcionamiento de las cosas del mundo que nos rodea. Esto es especialmente cierto en los seres vivos. Si los alvéolos pulmonares y las arterias coronarias presentan una organización fractal, es probable que esto sea una indicación de que algún sistema caótico esté gobernando su desarrollo.

Empieza a sospecharse que la actividad biológica normal en los seres vivos está relacionada con pautas de comportamiento caótico, ver referencias [5,6]. Un ritmo cardíaco perfectamente periódico puede ser síntoma de algún tipo de patología. La ausencia de pauta repetitiva en los latidos del corazón, parece considerarse, por el contrario, característica de un corazón saludable. Resulta ahora que el comportamiento caótico se ha convertido en lo normal. En los últimos diez años se viene realizando un esfuerzo importante en la investigación de la dinámica caótica desde la perspectiva de alcanzar a controlar el caos dentro de ciertos límites convenientes. Así como un cierto grado de caos en el pulso es síntoma de buena salud, la fibrilación cardíaca, también un régimen oscilatorio caótico, supone un desajuste tan extremo que el corazón colapsa y se produce la muerte súbita, principal causa de mortalidad en el mundo occidental. La forma actual de intentar conducir al corazón a un régimen sostenible de latidos consiste en aplicarle intensas descargas eléctricas, tremendamente agresivas, en la esperanza de que su impacto sobre el corazón reconduzca a éste a un ritmo de menor peligro inmediato. Quizá en un futuro próximo, utilizando modernas técnicas de control de caos, un sencillo marcapasos pueda suavemente reconducir al corazón desde una situación crítica como la fibrilación a su pauta de funcionamiento normal sin producir ninguna agresión a la persona afectada.

No sólo es el corazón el que funciona en un régimen caótico. Estudios recientes, parecen indicar que la transmisión de señales en las neuronas sigue, también, pautas erráticas. Durante un ataque epiléptico la actividad neuronal en el cerebro se vuelve, de repente, anómalamente regular. La falta de control corporal asociada al ataque parece estar relacionada con la aparición de una onda de sincronización que fuerza a la actuación periódica y sincronizada de todas las neuronas. En esas condiciones las neuronas no pueden ocuparse del normal funcionamiento de todos los procesos por ellas controlados. Los fenómenos de sincronización de sistemas caóticos se encuentran actualmente bajo intensa investigación. Un buen conocimiento teórico sobre control y sincronización de caos permitiría desarrollar tratamientos de la epilepsia que no requirieran intervención quirúrgica. Como otro posible ejemplo, conjeturamos aquí que la activación de genes en un dominio extenso y la correspondiente generación de las proteínas que estos codifican podría estar relacionada, también, con fenómenos de sincronización caótica. Cabe esperar que ciencias como la medicina y la biología puedan enriquecer sus métodos de trabajo a través de una mejor comprensión de los fenómenos de no linealidad asociados con el comportamiento caótico.

En el mundo de las modernas tecnologías de la información y de la comunicación el caos determinista parece también llamado a jugar un papel importante. Por un lado, ya se empieza a hablar de un nuevo paradigma de transmisión de señales basado en técnicas de caos determinista. Este cambio en el paradigma de transmisión podría afectar tanto a la señal portadora, que pasaría a ser una señal caótica, como a la técnica de codificación de mensajes, para lo que se aprovecharía la estructura fractal del atractor caótico. Por lo que se refiere a la portadora, el ancho de banda de una portadora caótica es superior al de una portadora periódica

lo que se traduce en que puede llegar a transmitirse una mayor cantidad de información por unidad de tiempo. Respecto a la codificación de la información, el carácter fractal del atractor caótico permite asociar bits a distintas regiones del mismo de manera tal que un cambio de una región a otra pueda realizarse mediante una interacción de valor prácticamente nulo con el sistema caótico. Por tanto, si se consigue definir una gramática apropiada, un atractor caótico puede ser aprovechado para codificar mensajes mediante bits de información con un coste energético de conmutación despreciable.

Por otro lado, el caos determinista también puede ser utilizado en comunicación segura. El caos determinista tiene características frecuenciales que lo hacen similar a un ruido aleatorio, propiedad que lo hace resistente a las técnicas habituales de filtrado para separar información superpuesta sobre una misma señal. Si un mensaje representado en bits de baja intensidad se superpone a una portadora aleatoria, la portadora enmascarará el mensaje de manera tal que *a priori* resultará difícil dilucidar si se está transmitiendo un mensaje y, mucho más difícil, extraerlo. El modo natural de recuperar el mensaje por el receptor sería reproducir la portadora aleatoria y restarla de la señal recibida, de esta manera el mensaje reaparecería nuevamente. La dificultad radica en que una señal aleatoria, por su propia naturaleza, no puede ser reproducida y, en consecuencia, el mensaje quedará oculto para siempre. Los sistemas caóticos imitan a un ruido aleatorio pero tienen la particularidad de que pueden ser sincronizados. Este hecho puede ser utilizado para enmascarar mensajes sobre una portadora caótica. Un receptor autorizado puede reproducir la portadora caótica que enmascara el mensaje, utilizando un sistema caótico sincronizado con el emisor, y descriptarlo. Métodos mixtos que combinen encriptación mediante algoritmos clásicos con posterior encriptación caótica están quizás llamados a tener amplia utilización en los próximos años.

4.1 ENCRIPCIÓN DE MENSAJES CON PORTADORAS CAÓTICAS

A continuación presentamos en mayor detalle, como una aplicación de indudable interés tecnológico, la propiedad de sincronización de señales caóticas deterministas y su posible utilización en encriptación de mensajes.

Ya hemos visto que una característica definitoria de las trayectorias temporales de un sistema caótico es su dependencia extrema de las condiciones iniciales y, por tanto, del más mínimo detalle del algoritmo de integración utilizado. En estas circunstancias es muy improbable que dos sistemas caóticos independientes lleguen a funcionar de manera sincronizada, en el sentido de que sigan trayectorias temporales coincidentes. Sin embargo, en un trabajo que se ha convertido en referencia obligada en el tema de sincronización de caos, Pecora y Carroll [7], mostraron que dos sistemas caóticos idénticos pueden llegar a sincronizar sus comportamientos si se acoplan de manera apropiada. Es decir, que puede conseguirse que dos sistemas caóticos idénticos, en principio independientes, aproximen sus trayectorias, se sincronicen, y en adelante marchen reproduciendo trayectorias temporales prácticamente idénticas. El acoplamiento es sencillo y consiste en utilizar la serie temporal generada por una variable apropiada de uno de los sistemas (guiador), en sustitución parcial de la correspondiente variable en el segundo sistema (guiado). Por ejemplo, dos sistemas de Lorenz acoplados según el esquema de Pecora y Carroll vienen descritos por el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{array}{l} \text{guiador} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \sigma(y_1 - x_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = \rho x_1 - y_1 - y_1 z_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{array} \right. \quad \text{guiado} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_2}{dt} = \sigma(y_2 - x_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = \rho x_1 - y_2 - y_2 z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = x_1 y_2 - \beta z_2 \end{array} \right. \end{array}$$

Las tres ecuaciones de la izquierda representan el sistema de Lorenz guiador y las tres de la derecha un sistema idéntico guiado. A pesar de ser sistemas idénticos las variables deben de ser distintas, por cuanto las trayectorias temporales de uno y otro sistema son distintas. Que los sistemas son idénticos quiere decir que están descritos por las mismas ecuaciones formales con idénticos valores de los parámetros. El acoplamiento consiste en que la variable x_2 de las dos últimas ecuaciones del sistema guiado ha sido sustituida por la variable x_1 del sistema guiador. En estas circunstancias todas las variables del sistema guiado tienden a una evolución temporal convergente con las del sistema guiador.

En la Figura 9 puede verse la evolución temporal de la variable x de dos sistemas idénticos de Lorenz, con valores iniciales distintos, cuando no están acoplados. Las dos variables siguen trayectorias independientes. Si los dos sistemas se acoplan las trayectorias tienden a sincronizar. La Figura 10 muestra las variables x y z de los sistemas guiador y guiado cuando ambos han sido acoplados siguiendo el esquema de Pecora y Carroll. Puede apreciarse cómo desde sus distintas posiciones iniciales las variables de ambos sistemas tienden a coincidir. Se necesita un cierto tiempo transitorio para que las variables puedan contemplarse como siguiendo la misma trayectoria. Estrictamente siempre hay una diferencia entre los valores de una y otra variable, pero esta diferencia tiende a cero conforme el tiempo aumenta. Es muy importante destacar que este fenómeno de sincronización, con diferencia de valores entre una y otra variable que tiende a cero, sólo se produce si los sistemas son idénticos y con valores de los parámetros iguales. Si los parámetros son muy parecidos, pero no exactamente coincidentes, las variables alcanzarán un cierto grado de aproximación, pero éste no progresará con el tiempo.

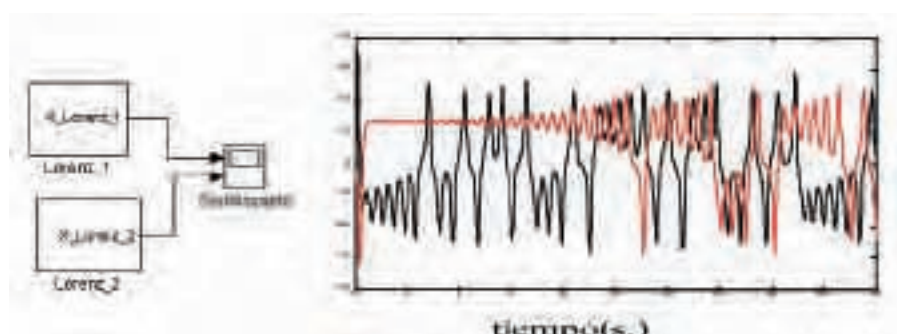


Figura 9. Dos sistemas de Lorenz idénticos no acoplados. Distintas condiciones iniciales llevan a que las trayectorias sigan pautas independientes. En la figura la variable x de ambos sistemas

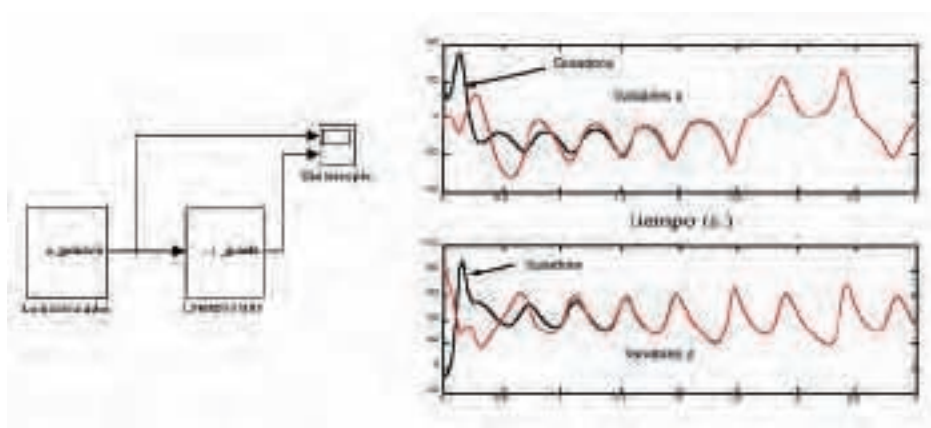


Figura 10. Dos sistemas de Lorenz idénticos acoplados. Desde distintas condiciones iniciales las trayectorias tienden a converger, es decir, se sincronizan. En la figura variables x , z de ambos sistemas

La propiedad de sincronización se puede aprovechar para la utilización de señales caóticas como portadoras para ocultar mensajes de baja intensidad. Si el mensaje y la portadora se superponen en el momento de la emisión, el mensaje queda oculto y puede ser transmitido por un canal público con seguridad. En el canal público sólo se verá una señal con el aspecto aleatorio característico del caos determinista. Si esta señal transmitida es capaz de inducir la sincronización de un sistema caótico idéntico al emisor que se encuentre en el lugar de recepción, la señal portadora podrá reproducirse en el sistema receptor. Una vez reproducida la portadora, un procedimiento inverso al utilizado para la superposición podrá ser utilizado para recuperar el mensaje.

En la Figura 11 puede verse un esquema que representa un sistema caótico de Lorenz emisor al que se le suma la señal de información que codifica el mensaje. A los efectos de esta demostración el mensaje viene implementado por un tren de pulsos equiespaciados de amplitud 0.1 emitidos cada 5 segundos. Esta señal de información se suma a la variable x del sistema de Lorenz emisor que hace de portadora caótica. La superposición de ambas señales se transmite por el canal público y el mensaje queda completamente enmascarado por la señal de Lorenz. Las características del espectro de frecuencias de la señal correspondiente al caos determinista de Lorenz, que lleva en sí mismo un continuo de frecuencias, hace a este enmascaramiento resistente a ataques a la encriptación basados en técnicas de separación frecuencial para intentar localizar y aislar las frecuencias del mensaje y de esa forma separarlo de la portadora caótica. El mensaje no sólo está aparentemente oculto, como se desprende de la contemplación de la figura, sino que es resistente a intentos sofisticados de descryptación.

Si la portadora caótica fuera una señal aleatoria, ésta no podría reproducirse y el mensaje quedaría oculto para siempre. No obstante, la propiedad de sincronización permite en recepción la generación en paralelo de la portadora. Nótese que para hacerlo se necesita en recepción un sistema de Lorenz idéntico al emisor. Es decir, la estructura generadora de la señal caótica portadora y el conocimiento exacto de los valores de los parámetros utilizados es un requerimiento indispensable para poder sincronizar los sistemas emisor y receptor, y estos datos son la llave para acometer la descryptación del mensaje. En el esquema de la Figura 11, la señal del canal, portadora más mensaje, se utiliza para crear un acoplamiento de tipo Pecora y Carroll y que la variable x del sistema receptor sincronice con la variable x del sistema emisor. Una vez sincronizados ambos sistemas, el receptor está reproduciendo la variable x del emisor y, por tanto, si restamos de la señal del canal la variable x generada en el receptor, el mensaje podrá ser recuperado.

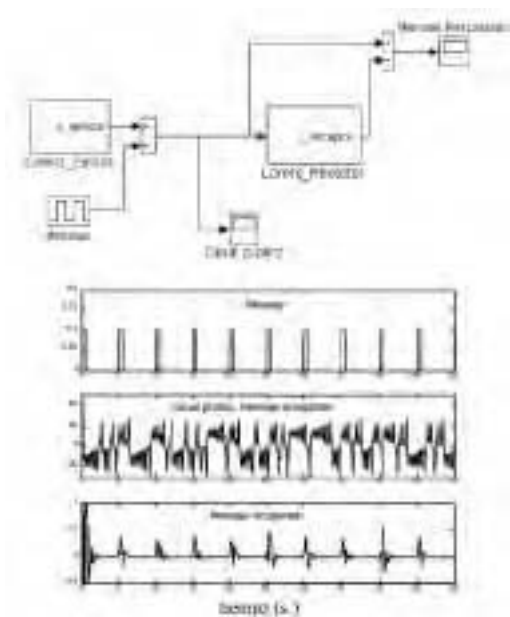


Figura 11. Esquema de un dispositivo de encriptación y descryptación caótica. Un sistema caótico genera la señal enmascaradora. Un mensaje en bits de baja intensidad comparados con los valores de la señal caótica se suma a la señal enmascaradora y esta suma es la señal transmitida. En el lugar de destino el receptor sincroniza su propio sistema de Lorenz con el sistema de Lorenz del emisor. Restando a la señal transmitida la señal caótica sincronizada el receptor logra recuperar el mensaje

En la gráfica del mensaje recuperado puede observarse que transcurre un cierto tiempo, el transitorio necesario para que se alcance un cierto grado de sincronización, antes de que puedan detectarse los pulsos de información. Aunque la reproducción de los pulsos no es perfecta, estos son detectados con detalle suficiente como para rehacer el mensaje original sin ninguna dificultad. La reproducción de los pulsos originales no es perfecta, ni mejora con el tiempo como podría pensarse que debería ocurrir, debido al hecho de que la señal sincronizadora no es la variable x del emisor sino la variable x corrupta por el mensaje y , por tanto, incapaz de lograr una sincronización perfecta. Este mismo problema impone un límite a la frecuencia y a la amplitud mínima de los pulsos utilizados en la codificación del mensaje. No obstante, esta limitación es consecuencia de utilizar el tipo básico de acoplamiento aquí presentado. Acoplamientos más generales entre emisor y receptor, Kokarev y Parlitz, [8], permiten la recuperación de los mensajes con una perfección teóricamente absoluta.

REFERENCIAS

- [1] **Lorenz, E.N.**, 1963: *Deterministic Nonperiodic Flow*. Journal of the Atmospheric Sciences, 20, 130-171.
- [2] **MATLAB®**: *The language of technical computing*, **SIMULINK®**: *Simulation and model-based design*. The MathWorks, Inc., <http://www.mathworks.com>
- [3] **Hilborn, R.C.**, 2000: *Chaos and Nonlinear dynamics. An introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press.
- [4] **Aguirre, J.**, 2002: Curvas Fractales, *SIGMA, Revista de Matemáticas*, 20, 79-92.
- [5] **Goldberger A.L., Amaral L.A.N. y otros**, 2002: Fractal dynamics in physiology: Alterations with disease and aging. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(1), 2466-2472.
- [6] **Volman, V., Baruchi, I., y Ben-Jacob, E.**, 2004: *Self-regulated homoclinic chaos in neural networks activity*, Experimental Chaos: 8th Experimental Chaos Conference, Editado por Boccaletti S. y otros, American Institute of Physics, Melville 197-209.
- [7] **Pecora, L.M., y Carroll, T. L.**, 1990: Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, 64(8), 821-824.
- [8] **Kokarev, L. y Parlitz, U.**, 1995: General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communications, *Physical Review Letters*, 74(25), 5028–5031.

