Transformada de Laplace con Maple

Introducción

En este capitulo, se presenta el uso del paquete matemático MAPLE, para el cálculo simbólico de la transformada de Laplace. En primera instancia se definen algunos requisitos para la determinación de éste operador y luego se utiliza la librería existente dentro de Maple para la obtención simbólica de la transformada de Laplace.

Integración por partes

Si $f(t) = u(t) \cdot v(t)$, con $u(t)$ y $v(t)$ funciones diferenciables, entonces por medio de la regla del producto para la diferenciación podemos escribir:

$$f'(t) = u(t) \cdot v'(t) + v(t) \cdot u'(t)$$

ó

$$\frac{d[u \cdot v]}{d\,t} = u\frac{dv}{d\,t} + v\frac{du}{d\,t}$$

Por ejemplo: $\dfrac{d[t^2 sen\,t]}{d\,t} = 2tsen\,t + t^2\cos t$

Con Maple:

```
> diff(t^2*sin(t),t);
```

$$2\,t\sin(t) + t^2\cos(t)$$

Si integramos la expresión:

$$\frac{d[u\cdot v]}{dt}=u\frac{dv}{dt}+v\frac{du}{dt}$$

con respecto a la variable t nos queda:

$$u\cdot v=\int u\left[\frac{dv}{dt}\right]dt+\int v\left[\frac{du}{dt}\right]dt$$

de donde:

$$\int u\left[\frac{dv}{dt}\right]dt=u\cdot v-\int v\left[\frac{du}{dt}\right]dt$$

Esta expresión es la formula de la integración por partes.

Ejemplo 1:

Determine:

$$\int t\cos t\,dt$$

Si $u=t$ y $v=sent$, tenemos: $\frac{du}{dt}=1$ y $\frac{dv}{dt}=\cos t$, por lo que:

$$\int t\cos t\,dt=\int u\left[\frac{dv}{dt}\right]dt=u\cdot v-\int v\left[\frac{du}{dt}\right]dt$$
$$=tsent-\int sent\,dt=tsent+\cos t+c$$

Usando Maple:

```
> Int(t*cos(t),t)=int(t*cos(t),t);
```

$$\int t\cos(t)\,dt=\cos(t)+t\sin(t)$$

La librería "*student*" contiene un procedimiento que aplica la formula de integración por partes. Este procedimiento se invoca de la siguiente forma:

with(student):
intparts(I,u)

Parámetros:

I: una expresión de la forma: $Int(u*\frac{dv}{dt},t)$

u: el factor u en la fórmula $\int u\left[\frac{dv}{dt}\right]dt = u\cdot v - \int v\left[\frac{du}{dt}\right]dt$

Ejemplo 2:

```
> with(student): #se invoca la libreria que contiene el procedimiento
  intparts(Int(t*cos(t),t),t);
  value(%);
```

$$t\sin(t) - \int \sin(t)\,dt$$
$$\cos(t) + t\sin(t)$$

```
> g:=x->x^2*sin(x);
  intparts(Int(g(x),x),x^2);
  simplify(%);
  value(%);
```

$$g := x \to x^2\sin(x)$$
$$-x^2\cos(x) - \int -2\,x\cos(x)\,dx$$
$$-x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,dx$$
$$-x^2\cos(x) + 2\cos(x) + 2\,x\sin(x)$$

Integrales impropias

Una integral impropia de la forma:

$$\int_0^\infty f(t)\,dt$$

se define como:

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(t)\,dt$$

Si el valor del límite existe, se dice que la integral impropia converge.

Ejemplo 3:

```
> f:=x->1/x^2;
  Int(f(x),x=1..R)=int(f(x),x=1..R);
  limit(%,R=infinity);
```

$$f := x \to \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{R-1}{R}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Maple permite evaluar este tipo de integrales, directamente:

```
> Int(f(x),x=1..infinity)=int(f(x),x=1..infinity);
```

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Ejemplo 4:

```
> Int(1/(1+x^2),x=0..R);
  value(%);
  Limit(%,R=infinity);
  value(%);
```

$$\int_{0}^{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\arctan(R)$$

$$\lim_{R \to \infty} \arctan(R)$$

$$\frac{\pi}{2}$$

```
> Int(1/(1+x^2),x=0..infinity);
  value(%);
```

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\frac{\pi}{2}$$

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ es una función $F(s)$ definida mediante la expresión:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

La integral impropia se determina, como:

$$F(s) = \lim_{P\to\infty} \int_0^{P} e^{-st} f(t)dt$$

Ejemplo 5: Determine la transformada de Laplace de $f(t) = 1$

```
> f:=t->1;
  Int(exp(-s*t)*f(t),t=0..P);
  value(%);
  # se asume s>0, para garantizar la convergencia
  assume(s>0);
  Limit(%,P=infinity)=limit(%,P=infinity);
```

$$f := 1$$

$$\int_0^P e^{(-s\,t)}\,dt$$

$$-\frac{e^{(-s\,P)} - 1}{s}$$

$$\lim_{P \to \infty} -\frac{e^{(-s\,P)} - 1}{s} = \frac{1}{s}$$

Ejemplo 6: $f(t) = t$

```
> f:=t->t;
  Int(exp(-s*t)*f(t),t=0..P);
  value(%);
  assume(s>0); # se asume s>0
  Limit(%,P=infinity)=limit(%,P=infinity);
```

$$f := t \to t$$

$$\int_0^P e^{(-s\,t)}\, t\, dt$$

$$-\frac{e^{(-s\,P)}\, s\, P + e^{(-s\,P)} - 1}{s^2}$$

$$\lim_{P \to \infty} -\frac{e^{(-s\,P)}\, s\, P + e^{(-s\,P)} - 1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

Ejemplo 7: $f(t) = t^2$

```
> f:=t->t^2;
  Int(exp(-s*t)*f(t),t=0..P);
  value(%);
  assume(s>0); # se asume s>0
  Limit(%,P=infinity)=limit(%,P=infinity);
```

$$f := t \to t^2$$

$$\int_0^P e^{(-s\,t)}\, t^2\, dt$$

$$-\frac{e^{(-s\,P)}\, s^2\, P^2 + 2\, e^{(-s\,P)}\, s\, P + 2\, e^{(-s\,P)} - 2}{s^3}$$

$$\lim_{P \to \infty} -\frac{e^{(-s\,P)}\, s^2\, P^2 + 2\, e^{(-s\,P)}\, s\, P + 2\, e^{(-s\,P)} - 2}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

Ejemplo 8: $f(t) = e^{at}$

```
> f:=t->exp(a*t);
  Int(exp(-s*t)*f(t),t=0..P);
  value(%);
  assume(s>a); # se asume s>a
  Limit(%,P=infinity)=limit(%,P=infinity);
```

$$f := t \to e^{(a\,t)}$$

$$\int_0^P e^{(-s\,t)}\, e^{(a\,t)}\, dt$$

$$-\frac{e^{(-s\,P + a\,P)} - 1}{s - a}$$

$$\lim_{P \to \infty} -\frac{e^{(-s\,P + a\,P)} - 1}{s - a} = \frac{1}{s - a}$$

Ejemplo 9: $f(t) = \cos(at)$

```
> f:=t->cos(a*t);
  Int(exp(-s*t)*f(t),t=0..P);
  value(%);
  assume(s>0); # se asume s>0
  Limit(%,P=infinity)=limit(%,P=infinity);
```

$$f := t \to \cos(a\,t)$$

$$\int_0^P e^{(-s\,t)} \cos(a\,t)\, dt$$

$$-\frac{s\, e^{(-s\,P)} \cos(a\,P) - a\, e^{(-s\,P)} \sin(a\,P) - s}{s^2 + a^2}$$

$$\lim_{P \to \infty} -\frac{s\, e^{(-s\,P)} \cos(a\,P) - a\, e^{(-s\,P)} \sin(a\,P) - s}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Ejemplo 10: $f(t)=sen(at)$

```
> f:=t->sin(a*t);
  Int(exp(-s*t)*f(t),t=0..P);
  value(%);
  assume(s>0); # se asume s>0
  Limit(%,P=infinity)=limit(%,P=infinity);
```

$$f:=t\rightarrow\sin(a\,t)$$

$$\int_0^P \mathrm{e}^{(-s\,t)}\sin(a\,t)\,dt$$

$$-\frac{a\,\mathrm{e}^{(-s\,P)}\cos(a\,P)+s\,\mathrm{e}^{(-s\,P)}\sin(a\,P)-a}{s^2+a^2}$$

$$\lim_{P\rightarrow\infty}-\frac{a\,\mathrm{e}^{(-s\,P)}\cos(a\,P)+s\,\mathrm{e}^{(-s\,P)}\sin(a\,P)-a}{s^2+a^2}=\frac{a}{s^2+a^2}$$

Otra manera de calcular por definición la transformada de Laplace es suponer que la función es clase A, es decir seccionalmente continua y de orden exponencial cuando $t\rightarrow\infty$, así como $\mathrm{Re}(s)>0$.

Llamando:

$$g(t)=\int e^{-st}f(t)\,dt$$

tenemos:

$\lim_{t\rightarrow\infty} g(t)=0$. (Si $f(t)$ es de orden exponencial, $g(t)=\int e^{-st}f(t)\,dt$, también lo es)

Por lo que:

$$F(s)=g(\infty)-g(0)=-g(0)$$

Ejemplo 11: Utilizando este forma obtenga la transformada de Laplace de f(t) = t^2

```
> f:=t-> t^2;
  g:=t->int(exp(-s*t)*f(t),t);
  `g(t) ` = g(t);
  `g(infinity) - g(0) ` = simplify(subs(t=infinity,g(t))-subs(t=0,g(t)));
  `F(s) ` = simplify(-subs(t=0,g(t)));
```

$$f := t \to t^2$$

$$g := t \to \int e^{(-s\,t)}\, f(t)\, dt$$

$$g(t) = -\frac{e^{(-s\,t)}\, s^2\, t^2 + 2\, e^{(-s\,t)}\, s\, t + 2\, e^{(-s\,t)}}{s^3}$$

$$g(infinity) - g(0) = -\frac{e^{(-s\,\infty)}\, s^2\, \infty + e^{(-s\,\infty)}\, s\, \infty + 2\, e^{(-s\,\infty)} - 2}{s^3}$$

$$F(s) = \frac{2}{s^3}$$

Ejemplo 12: $f(t) = e^{at}$

```
> f:=t-> exp(a*t);
  g:=t->int(exp(-s*t)*f(t),t);
  `g(t) ` = g(t);
  `g(infinity) - g(0) ` = simplify(subs(t=infinity,g(t))-subs(t=0,g(t)));
  `F(s) ` = (simplify(-subs(t=0,g(t))));
```

$$f := t \to e^{(a\,t)}$$

$$g := t \to \int e^{(-s\,t)}\, f(t)\, dt$$

$$g(t) = \frac{e^{(-s\,t + a\,t)}}{-s + a}$$

$$g(infinity) - g(0) = \frac{e^{(\infty\,(-s + a))} - 1}{-s + a}$$

$$F(s) = -\frac{1}{-s + a}$$

Ejemplo 13: $f(t) = senh(t)$

```
> f:=t-> cos(a*t);
  g:=t->int(exp(-s*t)*f(t),t);
  `g(t) ` = g(t);
  `g(infinity) - g(0) ` = simplify(subs(t=infinity,g(t))-subs(t=0,g(t)));
  `F(s) ` = eval(simplify(-subs(t=0,g(t))));
```

$$f := t \to \cos(a\,t)$$

$$g := t \to \int e^{(-s\,t)}\,\mathrm{f}(t)\,dt$$

$$g(t) = -\frac{s\,e^{(-s\,t)}\cos(a\,t)}{s^2+a^2} + \frac{a\,e^{(-s\,t)}\sin(a\,t)}{s^2+a^2}$$

$$g(infinity)\text{ - }g(0) = \frac{-s\,e^{(-s\,\infty)}\cos(a\,\infty) + a\,e^{(-s\,\infty)}\sin(a\,\infty) + s\cos(0) - a\sin(0)}{s^2+a^2}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Maple puede ser usado directamente para encontrar la transformada de Laplace una vez que se cargue la librería *inttrans*, la cual contiene entre otras, una función denominada *laplace* que la determina. Para llamar la librería, se escribe:

```
> with(inttrans);
```

$$[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]$$

La sintaxis de esta función es: $laplace(f(t), t, s)$, por ejemplo:

Ejemplo 14:

```
> f:=t->t:
  `f(t) ` = f(t);
  laplace(f(t),t,s);
```

$$f(t) = t$$

$$\frac{1}{s^2}$$

```
> f:=t->exp(a*t):
  `f(t) ` = f(t);
  laplace(f(t),t,s);
```

$$f(t) = e^{(a\,t)}$$

$$\frac{1}{s-a}$$

```
> f:=t->sinh(t):
  `f(t) ` = f(t);
  laplace(f(t),t,s);
```

$$f(t) = \sinh(t)$$

$$\frac{1}{s^2-1}$$

```
> f:=t->t^n:
  assume(n>0):
  `f(t) ` = f(t);
  laplace(f(t),t,s);
  convert(%,factorial);
```

$$f(t) = t^n$$

$$s^{(-n-1)}\,\Gamma(n+1)$$

$$\frac{s^{(-n-1)}\,(n+1)!}{n+1}$$

Dado que se requieren dos parámetros adicionales en la función *laplace*, podemos definir un operador L mediante un procedimiento donde su argumento sea la función $f(t)$ a la cual se le determinara su transformada de Laplace:

```
> with(inttrans):
  # definicion de un procedimiento para calcular Laplace
  L := proc(f)
           laplace(f,t,s)
        end;
```

$$L := \text{proc}(f)\ \text{laplace}(f, t, s)\ \textbf{end proc}$$

Ejemplo 15:

```
> 'L(1)' = L(1);
```

$$L(1)=\frac{1}{s}$$

```
> 'L(t^4)' = L(t^4);
```

$$L(t^4)=\frac{24}{s^5}$$

```
> 'L(cos(a*t)) ' = L(cos(a*t));
```

$$L(\cos(a\,t))=\frac{s}{s^2+a^2}$$

```
> 'L(t*sin(t))';
  value(%);
```

$$L(t\sin(t))$$

$$\frac{2\,s}{(s^2+1)^2}$$

```
> 'L(cos(t)^2)';
  value(%);
  simplify(%);
```

$$L(\cos(t)^2)$$

$$\frac{2\left(1+\frac{s^2}{2}\right)}{s\,(s^2+4)}$$

$$\frac{2+s^2}{s\,(s^2+4)}$$

Propiedades de la transformada de Laplace

Linealidad:

```
> f:=t->t^3+2*cos(t)-sinh(2*t):
`f(t) ` = f(t);
`L(f(t)) ` = L(f(t));
```

$$f(t) \ = t^3 + 2\cos(t) - \sinh(2\,t)$$
$$L(f(t)) \ = \frac{6}{s^4} + \frac{2\,s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2-4}$$

Primer teorema de traslación:

Por definición:

```
> f:=t->exp(3*t)*cos(2*t):
  'f(t) '= f(t);
  Int(exp(-s*t)*f(t),t=0..P);
  value(%);
  assume(s>3); # se asume s>3
  Limit(%,P=infinity);
  'F(s) ' = value(%);
```

$$\mathrm{f}(t) = \mathbf{e}^{(3\,t)}\cos(2\,t)$$
$$\int_0^P \mathbf{e}^{(-s\,t)}\,\mathbf{e}^{(3\,t)}\cos(2\,t)\,dt$$
$$-\frac{\mathbf{e}^{(-(s-3)\,P)}\cos(2\,P)\,s - 3\,\mathbf{e}^{(-(s-3)\,P)}\cos(2\,P) - 2\,\mathbf{e}^{(-(s-3)\,P)}\sin(2\,P) - s + 3}{s^2 - 6\,s + 13}$$
$$\lim_{P \to \infty} -\frac{\mathbf{e}^{(-(s-3)\,P)}\cos(2\,P)\,s - 3\,\mathbf{e}^{(-(s-3)\,P)}\cos(2\,P) - 2\,\mathbf{e}^{(-(s-3)\,P)}\sin(2\,P) - s + 3}{s^2 - 6\,s + 13}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{s-3}{s^2 - 6\,s + 13}$$

Por la propiedad:

```
> f:=t->exp(3*t)*cos(2*t);
  print(`la transformada de cos(2t) es: `);
  laplace(cos(2*t),t,s);
  print(`la sustitución de s=s-3, es: `);
  subs(s=s-3,%);
  `F(s) ` = simplify(%);
```

$$f := t \rightarrow \mathrm{e}^{(3\,t)} \cos(2\,t)$$

la transformada de cos(2t) es:

$$\frac{s}{s^2+4}$$

la sustitución de s=s-3, es:

$$\frac{s-3}{(s-3)^2+4}$$

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2-6\,s+13}$$

Usando el procedimiento de Maple:

```
> f:=t->exp(3*t)*cos(2*t):
  `f(t) ` = f(t);
  `F(s) ` = L(f(t));
  simplify(%);
```

$$f(t) = \mathrm{e}^{(3\,t)} \cos(2\,t)$$

$$F(s) = \frac{s-3}{4\left(\frac{(s-3)^2}{4}+1\right)}$$

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2-6\,s+13}$$

```
> f:=t->exp(2*t)*t^2:
  `f(t) ` = f(t);
  `F(s) ` = L(f(t));
```

$$f(t) = \mathrm{e}^{(2\,t)}\, t^2$$

$$F(s) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

```
> f:=t->exp(-t)*sin(2*t):
  `f(t) ` = f(t);
  `F(s) ` = L(f(t));
  simplify(%);
```

$$f(t) = e^{(-t)}\sin(2\,t)$$

$$F(s) = \frac{1}{2\left(\frac{(s+1)^2}{4}+1\right)}$$

$$F(s) = \frac{2}{s^2+2\,s+5}$$

Segundo teorema de Traslación:

Por definición:

```
> f:=t->piecewise(1<=t,(t-1)^2):
  `f(t) ` = f(t);
  Int(exp(-s*t)*f(t),t=0..P);
  value(%);
  assume(s>0); # se asume s>0
  Limit(%,P=infinity):
  'F(s) ' = value(%);
```

$$f(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & 1 \le t \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\int_0^P e^{(-s\,t)}\left(\begin{cases} (t-1)^2 & 1 \le t \\ 0 & otherwise \end{cases}\right) dt$$

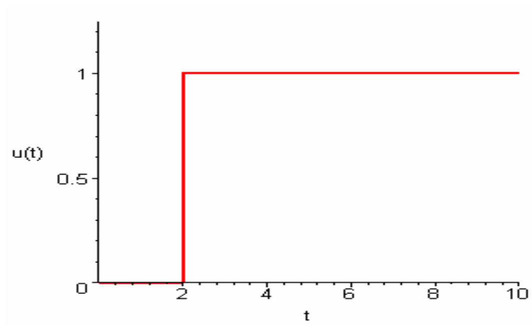
$$\begin{cases} 0, & P \le 1 \\ -\dfrac{e^{(-s\,P)}\,s^2\,P^2 + 2\,s\,P\,e^{(-s\,P)} + 2\,e^{(-s\,P)} - 2\,e^{(-s\,P)}\,s^2\,P - 2\,e^{(-s\,P)}\,s + e^{(-s\,P)}\,s^2 - 2\,e^{(-s)}}{s^3}, & 1 < P \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{2}{e^s\,s^3}$$

Para utilizar la función de Maple, debemos expresar la función $f(t)$ en términos de la función de Heaviside, la cual viene definida en la librería *standard*. Por ejemplo:

```
> u:=t->Heaviside(t-2);
  plot(u(t),t=0..10,u=0..1.25,tickmarks=[3,3],labels=[t,`u(t)`]);
  `L[u(t)] ` = L(u(t));
```

$$u := t \to \text{Heaviside}(t-2)$$



$$L[u(t)] = \frac{e^{(-2\,s)}}{s}$$

Escribiendo la función anterior en términos de la función de Heaviside, tenemos:

```
> f:=t->(t-1)^2*Heaviside(t-1):
  `f(t) ` = f(t);
  `F(s) ` = L(f(t));
```

$$f(t) = (t-1)^2\,\text{Heaviside}(t-1)$$

$$F(s) = \frac{2\,e^{(-s)}}{s^3}$$

```
> f:=t->t^2*Heaviside(t-1):
  `f(t) ` = f(t);
  `F(s) ` = L(f(t));
```

$$f(t) = t^2\,\text{Heaviside}(t-1)$$

$$F(s) = \frac{e^{(-s)}}{s} + \frac{2\,e^{(-s)}}{s^2} + \frac{2\,e^{(-s)}}{s^3}$$

Cambio de escala (Homotecia):

Por propiedades:

```
> f:=t->cos(a*t):
  `f(t) ` = f(t);
  # definimos la función sin cambio de escala
  g:=t->cos(t):
  `g(t) ` = g(t);
  # Calculamos la transformada de Laplace a esta función
  G:=s->L(g(t)):
  `G(s) ` = G(s);
  # Aplicamos la propiedad
  `F(s) ` = (1/a)*subs(s=s/a,G(s));
  # simplificamos el resultado
  simplify(%);
```

$$f(t) = \cos(a\,t)$$

$$g(t) = \cos(t)$$

$$G(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$F(s) = \frac{s}{a^2\left(\frac{s^2}{a^2}+1\right)}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Directamente, utilizando el procedimiento escrito con Maple:

```
> `F(s) ` = L(f(t));
```

$$F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Transformada de Laplace de las derivadas:

Por propiedades, Maple conoce su expresión, esto es:

```
> with(inttrans):
  laplace(diff(f(t),t),t,s);
```

$$s\ \mathrm{laplace}(\mathrm{f}(t), t, s) - \mathrm{f}(0)$$

```
> # Transformada de Laplace de la segunda derivada
  laplace(diff(f(t),t$2),t,s);
```

$$s\,(s\,\mathrm{laplace}(\mathrm{f}(t),t,s)-\mathrm{f}(0))-\mathrm{D}(f)(0)$$

```
> # Transformada de Laplace de la enésima derivada
  laplace(diff(f(t),t$n),t,s);
```

$$s\,\mathrm{laplace}(\mathrm{f}(t),t,s)-\left(\sum_{\_U1=0}^{n-1} s^{-\_U1}\,(\mathrm{D}^{(n-\_U1-1)})(f)(0)\right)$$

Ejemplo 16: Determine la transformada de la derivada de $f(t)=sen(t)$:

```
> f:=t->sin(t):
 `f(t) ` = f(t);
 `L(diff(f(t),t)) ` = L(diff(f(t),t));
```

$$f(t)\ =\sin(t)$$

$$L(diff(f(t),t))\ =\frac{s}{s^2+1}$$

Transformada de Laplace de la derivada de: $f(t)=sen^2 t$

```
> f:=sin(t)^2;
  `F(s) ` = laplace(diff(f,t),t,s);
```

$$f:=\sin(t)^2$$

$$F(s)\ =\frac{2}{s^2+4}$$

Transformada de Laplace de las integrales:

Por propiedades, Maple la aplica directamente:

```
> with(inttrans):
  laplace(int(f(u),u=a..t),t,s);
```

$$\frac{\text{laplace}(\text{f}(t), t, s)}{s} - \left(\frac{1}{s} \int_0^a \text{f}(u)\, du\right)$$

```
> laplace(int(int(f(u),u=0..v),v=0..t),t,s);
```

$$\frac{\text{laplace}(\text{f}(t), t, s)}{s^2}$$

También podemos mediante un procedimiento construir la aplicación de la propiedad:

```
> with(inttrans):
  # procedimiento que aplica la propiedad de la integral, teniendo como
    parámetros la funcion y el valor inicial del limite de la integral.
  LinT:= proc(f,a)
          (laplace(f,t,s)-int(f,t=0..a))/s;
          end;
```

$$LinT := \textbf{proc}(f, a)\ (\text{laplace}(f, t, s) - \text{int}(f, t = 0\, ..\, a))/s\ \textbf{end proc}$$

Ejemplo 17: Determine la transformada de: $\int_\pi^t \cos(2u)\, du$

Con Maple directamente:

```
> f:=t->cos(2*t):
  `f(t) ` = f(t);
  Laplace(Int(f(u),u=Pi..t),t,s) = laplace(int(f(u),u=Pi..t),t,s);
```

$$f(t) = \cos(2\, t)$$

$$\text{Laplace}\left(\int_\pi^t \cos(2\, u)\, du, t, s\right) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

Con nuestro procedimiento:

```
> Laplace(Int(f(u),u=Pi..t),t,s) = LinT(f(t),Pi);
```

$$\mathrm{Laplace}\left(\int_{\pi}^{t}\cos(2\,u)\,du,\,t,\,s\right)=\frac{1}{s^2+4}$$

Ejemplo 18: $L\left[\int_0^t ue^u\,du\right]$

```
> g:=t->int(u*exp(u),u=0..t):
  `G(s) ` = L(g(t));
   simplify(%);
```

$$G(s)\;=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}$$

$$G(s)\;=\frac{1}{(s-1)^2\,s}$$

Transformada de Laplace de la multiplicación por t^n:

Por propiedades, Maple tiene la expresión que la calcula:

```
> with(inttrans):
  laplace(t*f(t),t,s);
```

$$-\left(\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{laplace}(\mathrm{f}(t),\,t,\,s)\right)$$

```
> 'laplace'(t^2*f(t),t,s) = laplace(t^2*f(t),t,s);
```

$$\mathrm{laplace}(t^2\,\mathrm{f}(t),\,t,\,s)=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\,\mathrm{laplace}(\mathrm{f}(t),\,t,\,s)$$

```
> 'laplace'(t^3*f(t),t,s) = laplace(t^3*f(t),t,s);
```

$$\mathrm{laplace}(t^3\,\mathrm{f}(t),\,t,\,s)=-\left(\frac{\partial^3}{\partial s^3}\,\mathrm{laplace}(\mathrm{f}(t),\,t,\,s)\right)$$

Ejemplo 19: L[t sen(t)]

Definamos un procedimiento, donde se pase como parámetro la función y el exponente de t

```
> with(inttrans):
  ML:=proc(f,n)
        # calcula la transformada de Laplace de f
        laplace(f,t,s):
        # deriva n veces a F(s) y multiplica por (-1)^n
        (-1)^n*diff(%,s$n):
        # simplifica
        simplify(%)
     end;
```

$$ML := \textbf{proc}(f, n)\ \text{laplace}(f, t, s);\ (-1)\char`^n\times\text{diff}(\%, s\ \$\ n);\ \text{simplify}(\%)\ \textbf{end proc}$$

```
> f:=t->sin(t):
  Laplace(t*sin(t),t,s) = ML(f(t),1);
```

$$\text{Laplace}(t \sin(t), t, s) = \frac{2\,s}{(s^2+1)^2}$$

Ejemplo 20: L $[t^2\,\mathrm{e}^{(2\,t)}]$

```
> g:=t->exp(2*t):
  Laplace(t^2*exp(2*t),t,s) = ML(g(t),2);
```

$$\text{Laplace}(t^2\,\mathrm{e}^{(2\,t)}, t, s) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

Directamente con la función de Maple:

```
> laplace(t*sin(t),t,s);
```

$$\frac{2\,s}{(s^2+1)^2}$$

```
> laplace(t^2*exp(2*t),t,s);
```

$$\frac{2}{(s-2)^3}$$

Transformada de Laplace de la división por t^n:

La expresión directa usando la función de Maple viene dada por:

```
> laplace(h(t)/t,t,s);
```

$$\int_{s}^{\infty} \text{laplace}(\text{h}(t), t, \_U1)\, d\_U1$$

```
> laplace(h(t)/t^2,t,s);
```

$$\int_{s}^{\infty} \int_{\_U2}^{\infty} \text{laplace}(\text{h}(t), t, \_U1)\, d\_U1\, d\_U2$$

Ejemplo 21: L $\left[\frac{\sin(t)}{t} \right]$

```
> h:=t->sin(t):
  # chequeamos si podemos aplicar la propiedad
  Limit(h(t)/t,t=0) = limit(h(t)/t,t=0);
  Laplace(h(t)/t,t,s) = laplace(h(t)/t,t,s);
```

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$\text{Laplace}\left(\frac{\sin(t)}{t}, t, s \right) = \arctan\left(\frac{1}{s} \right)$$

Por pasos:

```
> H:=w->laplace(sin(t),t,w):
  `H(w) ` = H(w);
  Int(H(w),w=s..infinity) = int(H(w),w=s..infinity);
```

$$H(w) = \frac{1}{w^2+1}$$

$$\int_{s}^{\infty} \frac{1}{w^2+1}\, dw = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$$

Ejemplo 22: L $\left[\frac{e^{(2\,t)} - e^{t}}{t}\right]$

```
> g:=t->exp(2*t)-exp(t):
  # chequeamos si podemos aplicar la propiedad
  Limit(g(t)/t,t=0) = limit(g(t)/t,t=0);
  G:=w->laplace(g(t),t,w):
  `G(w) ` = G(w);
  Int(G(w),w=s..infinity) = int(G(w),w=s..infinity);
  combine(%,ln,symbolic);
```

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{(2\,t)} - e^{t}}{t} = 1$$

$$G(w) \; = \frac{1}{w-2} - \frac{1}{w-1}$$

$$\int_{s}^{\infty} \frac{1}{w-2} - \frac{1}{w-1}\, dw = -\ln(s-2) + \ln(s-1)$$

$$\int_{s}^{\infty} \frac{1}{w-2} - \frac{1}{w-1}\, dw = \ln\left(\frac{s-1}{s-2}\right)$$

Directamente con Maple:

```
> Laplace((exp(2*t)-exp(t))/t,t,s) = laplace((exp(2*t)-exp(t))/t,t,s);
  combine(%,ln,symbolic);
```

$$\mathrm{Laplace}\left(\frac{e^{(2\,t)} - e^{t}}{t}, t, s\right) = -\ln(s-2) + \ln(s-1)$$

$$\mathrm{Laplace}\left(\frac{e^{(2\,t)} - e^{t}}{t}, t, s\right) = \ln\left(\frac{s-1}{s-2}\right)$$

Funciones Especiales

Función de Heaviside:

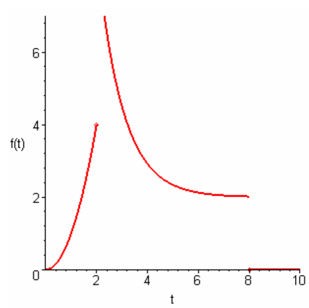
En la aplicación de la segunda propiedad de traslación de la transformada de Laplace, se utilizó ésta función de librería, mostraremos ahora el uso de la función de Heaviside en la obtención de la transformada de Laplace de funciones seccionalmente continuas.

Una función seccionalmente continua se puede definir en Maple, mediante el comando *piecewise*, por ejemplo:

```
> with(plots):
  f:=t->piecewise(t<=2,t^2,t<8,2+50*exp(-t)):
  `f(t) ` = f(t);

plot(f(t),t=0..10,y=0..7,color=red,ytickmarks=3,discont=true,labels=[t,`f(t)`]);
```

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & t \le 2 \\ 2 + 50\,\mathrm{e}^{(-t)} & t < 8 \end{cases}$$



Esta función, para determinarle su transformada de Laplace la escribimos en términos de la función de Heaviside:

```
> g:=t->t^2*(Heaviside(t)-Heaviside(t-2))+(2+50*exp(-t))*(Heaviside(t-2)-Heaviside(t-8)) ;
```

$$g := t \to t^2\,(\mathrm{Heaviside}(t) - \mathrm{Heaviside}(t-2)) \\ + (2 + 50\,\mathrm{e}^{(-t)})\,(\mathrm{Heaviside}(t-2) - \mathrm{Heaviside}(t-8))$$

Aunque esta función es diferente (en los puntos de discontinuidad) a la anterior, su transformada de Laplace es la misma (teorema de Lerch). También podemos hacer uso indirecto de la función de Heaviside para definir una función escalón unitario más fácil de manipular, por ejemplo:

```
> u := a -> (t -> Heaviside(t-a));
  h:=t->t^2*(u(0)(t)-u(2)(t))+(2+50*exp(-t))*(u(2)(t)-u(8)(t))
```

$$u := a \to t \to \mathrm{Heaviside}(t-a)$$

$$h := t \to t^2\,(\mathrm{u}(0)(t) - \mathrm{u}(2)(t)) + (2 + 50\,\mathrm{e}^{(-t)})\,(\mathrm{u}(2)(t) - \mathrm{u}(8)(t))$$

Ahora, podemos calcular su transformada de Laplace:

```
> with(inttrans):
  'F(s) ' = laplace(g(t),t,s);
```

$$\mathrm{F}(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{2\,\mathrm{e}^{(-2\,s)}}{s} - \frac{4\,\mathrm{e}^{(-2\,s)}}{s^2} - \frac{2\,\mathrm{e}^{(-2\,s)}}{s^3} - \frac{2\,\mathrm{e}^{(-8\,s)}}{s} + \frac{50\,\mathrm{e}^{(-2\,s-2)}}{s+1} - \frac{50\,\mathrm{e}^{(-8\,s-8)}}{s+1}$$

```
> 'H(s) ' = laplace(h(t),t,s);
```

$$\mathrm{H}(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{2\,\mathrm{e}^{(-2\,s)}}{s} - \frac{4\,\mathrm{e}^{(-2\,s)}}{s^2} - \frac{2\,\mathrm{e}^{(-2\,s)}}{s^3} - \frac{2\,\mathrm{e}^{(-8\,s)}}{s} + \frac{50\,\mathrm{e}^{(-2\,s-2)}}{s+1} - \frac{50\,\mathrm{e}^{(-8\,s-8)}}{s+1}$$

Función Delta de Dirac:

Esta "función", viene directamente definida en la librería de Maple, como:

```
> Dirac(t-a);
```

$$\mathrm{Dirac}(t-a)$$

También puede ser obtenida, en términos de la derivada de la función de Heaviside:

```
> diff(Heaviside(t-a),t);
```

$$\mathrm{Dirac}(t-a)$$

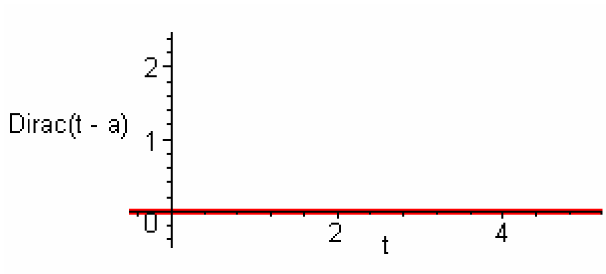
Con a = 2, podemos escribir la función Delta de Dirac utilizando la expresión *piecewise*:

```
> a:=2;
  Dirac(t-a) = convert(Dirac(t-a),piecewise,t);
```

$$a := 2$$

$$\mathrm{Dirac}(t-2) = \begin{cases} \mathit{undefined} & t = 2 \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

```
> plot (Dirac(t-a), t= -0.5..5.2, H = -0.5..2.5, tickmarks = [3,3], labels
= [t,"Dirac(t - a)"],
  discont=true, thickness=3, color = red);
```



Integración de la función Delta de Dirac:

```
> Int(Dirac(t-a), t = -infinity .. infinity) = int(Dirac(t-a), t = -
infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Dirac}(t-2)\, dt = 1$$

Transformada de Laplace de la función Delta de Dirac:

```
> with(inttrans):
  Laplace(Dirac(t-a),t,s) = laplace(Dirac(t-a),t,s);
```

$$\mathrm{Laplace}(\mathrm{Dirac}(t-2), t, s) = \mathbf{e}^{(-2\,s)}$$

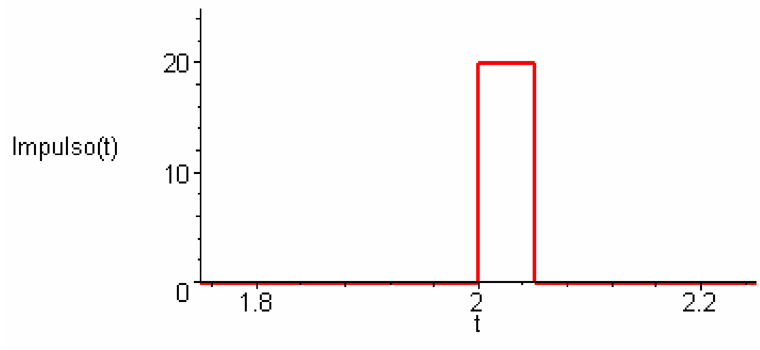
Definición de una función Impulso:

```
>epsilon:=0.05; Digits :=3 :
  Impulso:=t->(1/epsilon)*(Heaviside(t-2)- Heaviside(t-2-epsilon));
  plot(Impulso(t), t = 2-5*epsilon..2+5*epsilon,  Impulso =
0..5+1/epsilon,
  tickmarks=[3,3], labels=[t,"Impulso(t))"], discont = true, thickness =
2, color = red);
  Impulso(t-2) = convert(Impulso(t), piecewise, t);
  Int(Impulso(t), t = -infinity..infinity) = int(Impulso(t), t = -
infinity..infinity);
```

$$\varepsilon := 0.05$$

$$Digits := 3$$

$$Impulso := t \rightarrow \frac{\text{Heaviside}(t-2) - \text{Heaviside}(t-2-\varepsilon)}{\varepsilon}$$



$$\begin{cases} 0. & t < 2 \\ undefined & t = 2 \\ 20.0 & t < 2.05 \\ undefined & t = 2.05 \\ 0. & 2.05 < t \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 20.0\ \text{Heaviside}(t-2) - 20.0\ \text{Heaviside}(t-2.05)\, dt = 1.$$

<u>Función Gamma</u>:

La transformada de Laplace de la función potencia t^n es a menudo expresada en términos de la función Gamma, la cual se define mediante la integral:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad x > 0$$

Para $x = 1$, tenemos:

```
> Int(exp(-t),t=0..infinity)= int(exp(-t),t=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \mathbf{e}^{(-t)}\, dt = 1$$

Para mostrar la fórmula de recursión $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, Maple integra por partes:

```
> assume(x>0):
  Int(exp(-t)*t^x,t=0..infinity) = int(exp(-t)*t^x,t=0..infinity);
  x:='x':
```

$$\int_0^\infty e^{(-t)}\, t^x\, dt = \Gamma(x)\, x$$

La aplicación directa de esta función:

```
> GAMMA(1);
  GAMMA(3);
  GAMMA(1/2);
  GAMMA(5/2);
```

$$1$$
$$2$$
$$\sqrt{\pi}$$
$$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

Para calcular la transformada de Laplace de la función t^x, con x real:

```
> with(inttrans):
> laplace(t^(1/2),t,s);
```

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\, s^{(3/2)}}$$

```
> laplace(t^(3/2),t,s);
```

$$\frac{3\sqrt{\pi}}{4\, s^{(5/2)}}$$

```
> laplace(t^(7/3),t,s);
  evalf(%);
```

$$\frac{56}{81}\frac{\pi\sqrt{3}}{s^{(10/3)}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\frac{2.778158483}{s^{(10/3)}}$$

Funciones Periódicas:

Antes de calcular la transformada de Laplace de funciones periódicas, mostraremos una forma simple para definir y graficar una función periódica a través de la función de librería *floor*. Esta función determina para una constante real cualquiera x el mayor entero, menor o igual a esa constante. Por ejemplo:

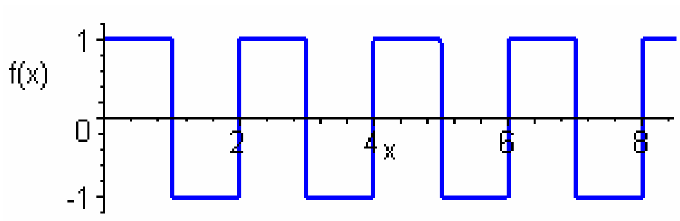
```
> floor(1.67);
  floor(sqrt(8));
  floor(-Pi);
```

$$1$$
$$2$$
$$-4$$

Ejemplo 23: Onda Cuadrada, T = 2

```
> f := x -> (-1)^floor(x);
  plot(f(x),x=0..8.5,-
1.2..1.2,color=blue,labels=[x,`f(x)`],ytickmarks=3);
```

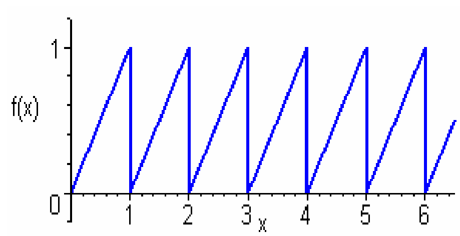
$$f := x \rightarrow (-1)^{\text{floor}(x)}$$



Ejemplo 24: Onda Diente de Sierra, T = 1

```
> f := x -> x - floor(x);
   plot(f(x),x=0..6.5,-
0.2..1.2,numpoints=100,color=blue,labels=[x,`f(x)`],ytickmarks=2);
```

$$f := x \rightarrow x - \text{floor}(x)$$



Transformada de Laplace de funciones periódicas

Ejemplo 25: Transformada de Laplace de: Onda Cuadrada

```
> Int((-1)^floor(x)*exp(-s*x),x=0..2)/(1-exp(-2*s));
  value(%);
  combine(simplify(%));
```

$$\frac{1}{1-e^{(-2\,s)}}\int_0^2 (-1)^{\mathrm{floor}(x)}\, e^{(-s\,x)}\, dx$$

$$\frac{1+(e^s)^2-2\,e^s}{(e^s)^2\, s\,(1-e^{(-2\,s)})}$$

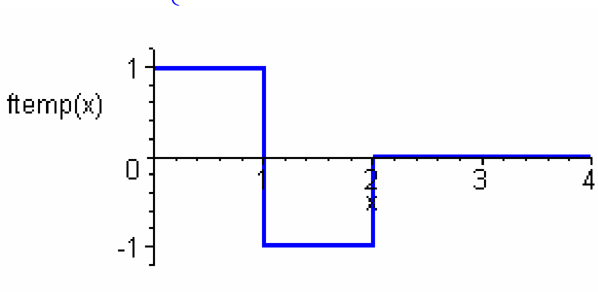
$$\frac{(-1-e^{(2\,s)}+2\,e^s)\,e^{(-2\,s)}}{s\,(-1+e^{(-2\,s)})}$$

Como alternativa definimos en un periodo a la función mediante la función de Heaviside, aplicamos la función de librería Laplace y la dividimos por la expresión $1-e^{-sT}$ de la definición de transformada de funciones periódicas.

```
> ftemp:= x -> 1 - 2*Heaviside(x-1) + Heaviside(x-2);
  convert(ftemp(x),piecewise);
  plot(ftemp(x),x=0..4,-
1.2..1.2,color=blue,ytickmarks=3,labels=[x,`ftemp(x)`]);
```

$$ftemp := x \rightarrow 1-2\,\mathrm{Heaviside}(x-1)+\mathrm{Heaviside}(x-2)$$

$$\begin{cases} 1 & x<1 \\ \mathit{undefined} & x=1 \\ -1 & x<2 \\ \mathit{undefined} & x=2 \\ 0 & 2<x \end{cases}$$



Ahora, aplicamos la función de librería, *laplace*:

```
> with(inttrans):
  laplace(ftemp(x),x,s)/(1-exp(-2*s));
  simplify(%);
```

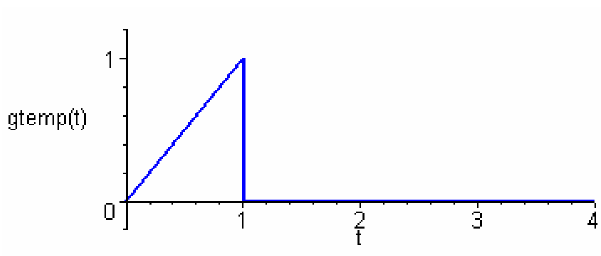
$$\frac{\frac{1}{s}-\frac{2\,e^{(-s)}}{s}+\frac{e^{(-2\,s)}}{s}}{1-e^{(-2\,s)}}$$

$$-\frac{e^{(-s)}-1}{(e^{(-s)}+1)\,s}$$

Ejemplo 26: Transformada de Laplace de: función diente de sierra

```
> gtemp := x -> x - x*Heaviside(x-1);
    plot(gtemp(x),x=0..4,-0.2..1.2,
color=blue,ytickmarks=2,labels=[t,`gtemp(t)`]);
```

$$gtemp := x \rightarrow x - x\,\mathrm{Heaviside}(x-1)$$



Aplicamos Laplace:

```
> laplace(gtemp(x),x,s)/(1-exp(-2*s));
  simplify(%);
```

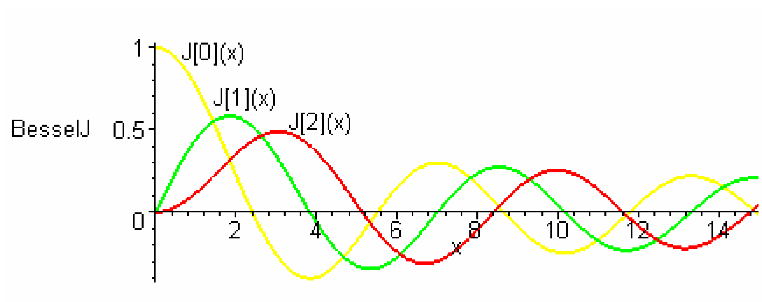
$$\frac{\frac{1}{s^2}-\frac{e^{(-s)}}{s^2}-\frac{e^{(-s)}}{s}}{1-e^{(-2\,s)}}$$

$$\frac{-1+e^{(-s)}+e^{(-s)}\,s}{s^2\,(-1+e^{(-2\,s)})}$$

Funciones de Bessel:

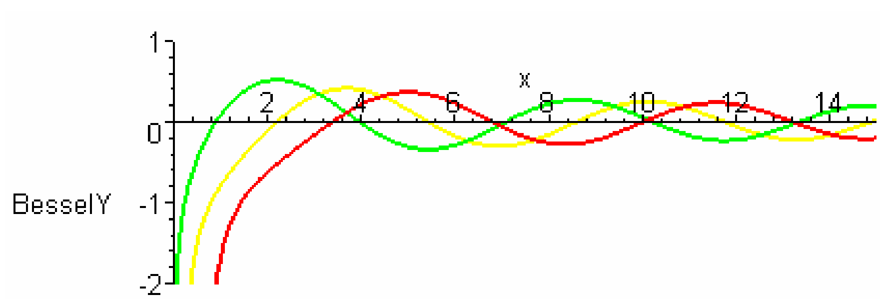
Maple se refiere a las funciones de Bessel de primera clase como *BesselJ(n,arg)*, donde n es el orden y *arg* es el argumento. La función de Bessel de primera clase de orden cero $J_0(x)$,se escribe en Maple como $BesselJ(0,x)$. La gráfica de las funciones de Bessel de primera clase de orden 0, 1 y 2 son:

```
> with(plots):
  g1:=plot({seq(BesselJ(n,x),n=0..2)},x=0..15,ytickmarks=3,labels=[x,
BesselJ]):
  t1:=textplot([1.45,0.98,`J[0](x)`]):
  t2:=textplot([2.25,0.7,`J[1](x)`]):
  t3:=textplot([4.1,0.55,`J[2](x)`]):
  display(g1,t1,t2,t3);
```



Las funciones de Bessel de segunda clase, Maple las define como: *BesselY(n,arg)*. La grafica de las funciones de Bessel de segunda clase de oren 0,1 y 2 son:

```
> plot({seq(BesselY(n,x),n=0..2)},x=0..15,-2..1,numpoints=100,labels=[x,
BesselY],ytickmarks=3);
```



Para determinar un valor particular de estas funciones, escribimos:

```
> BesselJ(0,0.0);
  BesselJ(0,2.0);
  BesselY(0,1.0);
  BesselY(1,3.0);
```

$$1.$$
$$0.2238907791$$
$$0.08825696422$$
$$0.3246744248$$

Las raíces de la función de Bessel de primera clase de orden 0 pueden ser localizadas numéricamente con Maple mediante:

```
> fsolve(BesselJ(0,x)=0,x=0..4);
```

$$2.404825558$$

En el comando anterior el rango $x = 0..4$ es el intervalo donde la función *fsolve* ubica la solución de $BesselJ(0, x) = 0$, aquí es importante tener la gráfica de la función porque podemos especificar el rango en el cual vamos a encontrar la raíz. Por ejemplo la raíz de *BesselJ(1,x)* ubicada entre $x = 6..8$, viene dada por:

```
> fsolve(BesselJ(1,x)=0,x=6..8);
```

$$7.015586670$$

Utilizando la función *series* de Maple, podemos expresar las funciones de Bessel por medio de un desarrollo en serie, por ejemplo:

```
> J[0](x):=series(BesselJ(0,x),x,10);
  J[1](x):=series(BesselJ(1,x),x,10);
```

$$J_0(x) := 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2304}x^6 + \frac{1}{147456}x^8 + O(x^{10})$$

$$J_1(x) := \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{384}x^3 - \frac{1}{18432}x^7 + \frac{1}{1474560}x^9 + O(x^{10})$$

La transformada de Laplace de las funciones de Bessel, las calculamos con Maple mediante:

```
> with(inttrans):
> laplace(BesselJ(0,x),x,s);
  laplace(BesselJ(0,2*x),x,s);
  laplace(BesselJ(1,x),x,s);
```

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}\,(s+\sqrt{s^2+1}\,)}$$

También aplicando la identidad $J_1(x) = -J_0'(x)$, podemos obtener el último resultado:

```
> laplace(-diff(BesselJ(0,x),x),x,s);
```

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}\,(s+\sqrt{s^2+1}\,)}$$

<u>Función Error</u>

La función error es definida en Maple mediante la expresión $erf(x)$ y su complementaria como $erfc(x)$, algunos valores vienen dados como:

```
> erf(0);
  erf(3.);
  erfc(0);
  erf(3.0)+erfc(3.0);
```

$$0$$

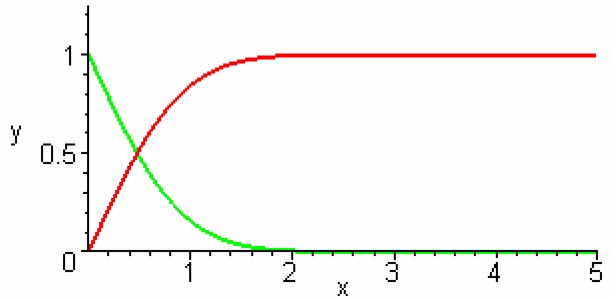
$$0.9999779095$$

$$1$$

$$1.000000000$$

La gráfica de estas funciones la podemos obtener mediante:

```
> plot({erf(x),erfc(x)}, x=0..5,y=0..1.25,ytickmarks=3,thickness=1);
```



La expansión en serie de la función $erf(x)$, la obtenemos como:

```
> erf(x)=series(erf(x),x,10);
```

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\,x^3 + \frac{1}{5\sqrt{\pi}}\,x^5 - \frac{1}{21\sqrt{\pi}}\,x^7 + \frac{1}{108\sqrt{\pi}}\,x^9 + \mathrm{O}(x^{10})$$

La transformada de Laplace, de esta función la calculamos como:

```
> with(inttrans):
> Laplace(erf(sqrt(x)),x,s) = laplace(erf(sqrt(x)),x,s);
  Laplace(erf(sqrt(2*x)),x,s) = laplace(erf(sqrt(2*x)),x,s);
  Laplace(erf(2*sqrt(x)),x,s) = laplace(erf(2*sqrt(x)),x,s);
  Laplace(erfc(sqrt(x)),x,s) = laplace(erfc(sqrt(x)),x,s);
```

$$\mathrm{Laplace}(\operatorname{erf}(\sqrt{x}), x, s) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

$$\mathrm{Laplace}(\operatorname{erf}(\sqrt{2}\,\sqrt{x}), x, s) = \frac{\sqrt{2}}{s\sqrt{2+s}}$$

$$\mathrm{Laplace}(\operatorname{erf}(2\,\sqrt{x}), x, s) = \frac{2}{s\sqrt{4+s}}$$

$$\mathrm{Laplace}(\operatorname{erfc}(\sqrt{x}), x, s) = \frac{\sqrt{s+1}-1}{s\sqrt{s+1}}$$

Transformada Inversa

Al igual que la transformada de Laplace, Maple tiene una función contenida en el paquete transformaciones integrales (*inttrans*), que permite determinar la transformada inversa de Laplace. Esta función llamada *invlaplace*, requiere de tres argumentos para las variables involucradas y escritas en orden inverso al usado en la función *laplace*. La sintaxis viene dada por *invlaplace(F, s,t)*. Por ejemplo:

```
> with(inttrans):
  F:=s->2/s^3:
  `F(s) ` = F(s);
  f:=t->invlaplace(F(s),s,t):
  `f(t) ` = f(t);
```

$$F(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$f(t) = t^2$$

```
> F:=s->1/(s^2+1):
  `F(s) ` = F(s);
  f:=t->invlaplace(F(s),s,t):
  `f(t) ` = f(t);
```

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$f(t) = \sin(t)$$

```
> F:=s->1/(s-3):
  `F(s) ` = F(s);
  f:=t->invlaplace(F(s),s,t):
  `f(t) ` = f(t);
```

$$F(s) = \frac{1}{s-3}$$

$$f(t) = \mathrm{e}^{(3\,t)}$$

```
> F:=s->s/(s^2+4):
  `F(s) ` = F(s);
  f:=t->invlaplace(F(s),s,t):
  `f(t) ` = f(t);
```

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$f(t) = \cos(2\,t)$$

```
> F:=s->(s+2)/(s^2+4):
  `F(s) ` = F(s);
  f:=t->invlaplace(F(s),s,t):
```

```
  `f(t) ` = f(t);
```

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+4}$$
$$f(t) = \cos(2\,t) + \sin(2\,t)$$

```
> F:=s->exp(-2*s)/s^2:
  `F(s) ` = F(s);
  f:=t->invlaplace(F(s),s,t):
 `f(t) ` = f(t);
```

$$F(s) = \frac{\mathbf{e}^{(-2\,s)}}{s^2}$$
$$f(t) = \mathrm{Heaviside}(t-2)\,(t-2)$$

```
> F:=s->2/(s^2+2*s+5):
  `F(s) ` = F(s);
  f:=t->invlaplace(F(s),s,t):
  `f(t) ` = f(t);
```

$$F(s) = \frac{2}{s^2+2\,s+5}$$
$$f(t) = \mathbf{e}^{(-t)}\sin(2\,t)$$

```
> F:=s->(3*s+5)/(s*(s^2+4)):
  `F(s) ` = F(s);
  f:=t->invlaplace(F(s),s,t):
  `f(t) ` = f(t);
```

$$F(s) = \frac{3\,s+5}{s\,(s^2+4)}$$
$$f(t) = -\frac{5}{4}\cos(2\,t) + \frac{3}{2}\sin(2\,t) + \frac{5}{4}$$

<u>Método de inversión por integración directa</u>

Existe una formula de integración directa para calcular la transformada inversa de Laplace, definida por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{st}F(s)ds \quad , \quad t>0$$

Esta integral puede resolverse usando el método de los residuos aplicando la expresión:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum \text{Res}\left[e^{st}F(s)\right] \text{ en todos los polos de } F(s)$$

Maple puede aplicar este método para calcular la transformada inversa, ya que posee una función que le permite determinar el valor de los residuos (*residue*) en los polos de una función.

Ejemplo 27: Aplicando el método de los residuos determine la transformada inversa de:

$$F(s) = \frac{s^2+1}{s^4 - s^3 - 2s^2}$$

```
> F:=s->(s^2+1)/(s^4-s^3-2*s^2): `F(s) ` = F(s);
  # determinamos las singularidades de F(s), colocándolas en una lista
  SingF:=[solve(denom(F(s))=0, s)];
  #calculamos los residuos en cada una de las singularides
  r1:=residue(exp(s*t)*F(s),s=0);
  r2:=residue(exp(s*t)*F(s),s=2);
  r3:=residue(exp(s*t)*F(s),s=-1);
  #sumamos los residuos obtenidos
  `f(t) ` = r1+r2+r3;
```

$$F(s) = \frac{s^2+1}{s^4 - s^3 - 2\,s^2}$$

$$SingF := [0, 0, 2, -1]$$

$$r1 := -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

$$r2 := \frac{5}{12}(\mathbf{e}^t)^2$$

$$r3 := -\frac{2}{3}\frac{1}{\mathbf{e}^t}$$

$$f(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}(\mathbf{e}^t)^2 - \frac{2}{3}\frac{1}{\mathbf{e}^t}$$

Como se observa, todo el procedimiento realizado es manual, esto es, se debe ir escribiendo todas las instrucciones requeridas. Por supuesto Maple puede programarse para realizar estas instrucciones secuencialmente, mediante la definición de un procedimiento que realice todos los pasos requeridos.

```
> # Definición de un procedimiento para aplicar el método de los residuos
  MetRes:=proc(F)

    local SingF,Res,i,r;
    # se determinan las raices diferentes del denominador
    SingF:={solve(denom(F)=0, s)};
    # Se inicializa el residuo
    Res:=0:

    # calculamos los residuos en cada una de las singularidades
    for i from 1 to nops(SingF)
        do
            r[i]:=residue(exp(s*t)*F,s=SingF[i]);
```

```
            print(`Res[F(s)`,s=SingF[i],`] ` = r[i]);
            Res:=Res+r[i];
        end do;
    end:
```

Ejemplo 28: Use este procedimiento para calcular la transformada inversa anterior

```
> F:=s->(s^2+1)/(s^4-s^3-2*s^2):
  `F(s) ` = F(s);
  `f(t) ` = MetRes(F(s));
```

$$F(s) = \frac{s^2+1}{s^4-s^3-2\,s^2}$$

$$Res[F(s), s=\text{-}1,] = -\frac{2}{3}\frac{1}{e^t}$$

$$Res[F(s), s=0,] = -\frac{t}{2}+\frac{1}{4}$$

$$Res[F(s), s=2,] = \frac{5}{12}(e^t)^2$$

$$f(t) = -\frac{2}{3}\frac{1}{e^t}-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}(e^t)^2$$

Ejemplo 29: Determine la transformada inversa de: $G(s)=\dfrac{3s^2-7s+4}{(s-2)^3(s+4)}$

```
> G:=s->(3*s^2-7*s+4)/((s-2)^3*(s+4)):
  `G(s) ` = G(s);
  `g(t) ` = MetRes(G(s));
```

$$G(s) = \frac{3\,s^2-7\,s+4}{(s-2)^3\,(s+4)}$$

$$Res[F(s), s=\text{-}4,] = -\frac{10}{27}\frac{1}{(e^t)^4}$$

$$Res[F(s), s=2,] = \frac{10}{27}(e^t)^2+\frac{7}{9}t\,(e^t)^2+\frac{1}{6}t^2\,(e^t)^2$$

$$g(t) = -\frac{10}{27}\frac{1}{(e^t)^4}+\frac{10}{27}(e^t)^2+\frac{7}{9}t\,(e^t)^2+\frac{1}{6}t^2\,(e^t)^2$$

Podemos comprobar este resultado, utilizando la función directa de Maple:

```
> `g(t) ` = invlaplace(G(s),s,t);
```

$$g(t) = \left(\frac{10}{27} + \frac{1}{6}t^2 + \frac{7}{9}t\right)e^{(2t)} - \frac{10}{27}e^{(-4t)}$$

Ejemplo 30: Determine la transformada inversa de: $H(s) = \dfrac{5s^3 - 6s - 3}{s^3(s^2+1)^2}$

```
> H:=s->(5*s^3-6*s-3)/(s^3*(s+1)^2):
  `H(s) ` = H(s);
  `h(t) ` = MetRes(H(s));
```

$$H(s) = \frac{5s^3 - 6s - 3}{s^3(s+1)^2}$$

$$Res[F(s), s = -1,] = -\frac{3-2t}{e^t}$$

$$Res[F(s), s = 0,] = -\frac{3t^2}{2} + 3$$

$$h(t) = -\frac{3-2t}{e^t} - \frac{3t^2}{2} + 3$$

Método de inversión por descomposición en fracciones parciales

Dada una función racional, podemos mediante la aplicación de este método descomponer la función mediante una suma de fracciones parciales, donde cada denominador de estas fracciones corresponde a un factor lineal o a un factor cuadrático irreducible. Maple puede determinar estas fracciones mediante el comando *convert(funcion, parfrac,var*).

Ejemplo 31: Exprese en suma de fracciones parciales las funciones dadas y determine su transformada de Laplace:

```
> F:=s->(s^2+1)/(s^4-s^3-2*s^2):
  FP:=s-> convert(F(s),parfrac,s):
  F(s) = FP(s);
  `f(t) ` = invlaplace(FP(s),s,t);
```

$$\frac{s^2+1}{s^4 - s^3 - 2s^2} = -\frac{2}{3(s+1)} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4s} + \frac{5}{12(s-2)}$$

$$f(t) = -\frac{2}{3}e^{(-t)} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}e^{(2t)}$$

```
> G:=s->(3*s^2-7*s+4)/((s-2)^3*(s+4)):
  GP:=s-> convert(G(s),parfrac,s):
  G(s) = GP(s);
  `g(t) ` = invlaplace(GP(s),s,t);
```

$$\frac{3\,s^2-7\,s+4}{(s-2)^3\,(s+4)}=\frac{7}{9\,(s-2)^2}+\frac{10}{27\,(s-2)}+\frac{1}{3\,(s-2)^3}-\frac{10}{27\,(s+4)}$$

$$g(t)\ =\left(\frac{10}{27}+\frac{1}{6}t^2+\frac{7}{9}t\right)\mathrm{e}^{(2\,t)}-\frac{10}{27}\mathrm{e}^{(-4\,t)}$$

```
> H:=s->(5*s^3-6*s-3)/(s^3*(s+1)^2):
  HP:=s-> convert(H(s),parfrac,s):
  H(s) = HP(s);
  `h(t) ` = invlaplace(HP(s),s,t);
```

$$\frac{5\,s^3-6\,s-3}{s^3\,(s+1)^2}=-\frac{3}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{3}{s^3}+\frac{3}{s}$$

$$h(t)\ =-\frac{3\,t^2}{2}+3+(2\,t-3)\,\mathrm{e}^{(-t)}$$

Si se quiere involucrarse en el procedimiento para la determinación de los coeficientes en la expansión de sumas parciales, Maple nos proporciona el comando *solve/identity*. Para ello debemos proporcionar la suma en fracciones parciales con sus coeficientes simbólicos. Por ejemplo:

```
> F:=1/(s^3*(s^2+4))=a/s^3+b/s^2+c/s+(d*s+e)/(s^2+4);
```

$$F:=\frac{1}{s^3\,(s^2+4)}=\frac{a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}+\frac{d\,s+e}{s^2+4}$$

El comando *solve/identity* se aplica para la determinación de los coeficientes:

```
> Sol:=solve(identity(F,s),{a,b,c,d,e});
```

$$Sol:=\{b=0,\ e=0,\ d=\frac{1}{16},\ c=\frac{-1}{16},\ a=\frac{1}{4}\}$$

Sustituimos estos valores en la expresión original, obteniéndose las sumas de fracciones parciales buscada:

```
> FP:=subs(Sol,rhs(F));
```

$$FP:=\frac{1}{4\,s^3}-\frac{1}{16\,s}+\frac{s}{16\,(s^2+4)}$$

Luego, podemos aplicar el operador de transformada inversa:

```
> `f(t) ` = invlaplace(FP,s,t);
```

$$f(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\cos(2\,t)$$

Si queremos aún mas involucrarnos, podemos proceder como sigue. Multiplicamos ambos lados por el denominador común:

```
> F1:=simplify(F*denom(lhs(F)));
```

$$F1 := 1 = a\,s^2 + 4\,a + b\,s^3 + 4\,b\,s + c\,s^4 + 4\,c\,s^2 + s^4\,d + s^3\,e$$

Ahora agrupamos y colocamos todos los términos de un solo lado de la igualdad:

```
> F2:=collect(lhs(F1)-rhs(F1),s);
```

$$F2 := (-c - d)\,s^4 + (-b - e)\,s^3 + (-a - 4\,c)\,s^2 - 4\,b\,s + 1 - 4\,a$$

Este polinomio es idénticamente igual cero, por lo que nos proporciona las ecuaciones necesarias para determinar los coeficientes buscados. Para extraer los coeficientes hacemos:

```
> COEF:={coeffs(F2,s)};
```

$$COEF := \{-c - d, -4\,b, 1 - 4\,a, -b - e, -a - 4\,c\}$$

La función *solve*, asume que se requieren los valores de a, b, c, d y e de estas expresiones que están igualadas a 0, de donde:

```
> SOLN:=solve(COEF);
```

$$SOLN := \{b = 0, e = 0, d = \frac{1}{16}, c = \frac{-1}{16}, a = \frac{1}{4}\}$$

Sustituyendo estos valores, tenemos la expresión de las sumas de fracciones parciales:

```
> `F(s) ` = subs(SOLN,rhs(F));
```

$$F(s) = \frac{1}{4\,s^3} - \frac{1}{16\,s} + \frac{s}{16\,(s^2 + 4)}$$

Método de inversión por convolución

El método de inversión por convolución, nos dice: si $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de Laplace de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ seccionalmente continuas en cualquier intervalo $0 \le t \le T$ y de orden exponencial, entonces la transformada inversa del producto $F(s)G(s)$ viene dado por:

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = (f * g)(t) = (g * f)(t)$$

donde:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x) \cdot g(t-x)dx$$

$$(g * f)(t) = \int_0^t g(x) \cdot f(t-x)dx$$

La implementación de este método en Maple nos lleva a la formulación directamente del teorema de convolución.

Ejemplo 32: Determine la transformada de Laplace de: $H(s) = \dfrac{4}{s^2(s-2)}$

```
> with(inttrans):

> H:=s->1/(s^2*(s-2)):
  `H(s) ` = H(s);
  # definamos H(s)=F(s).G(s), donde:
  F:=s->1/s^2:
  `F(s) ` = F(s);
  G:=s->1/(s-2):
  `G(s) ` = G(s);
  # determinemos la transformada inversa a F(s) y G(S)
  f:=t->invlaplace(F(s),s,t):
 `f(t) ` = f(t);
  g:=t->invlaplace(G(s),s,t):
  `g(t) ` = g(t);
  # definamos las funciones de la integral de convolución
  `f(u) ` = f(u);
  `g(t-u) ` = g(t-u);
  # obtengamos la integral de convolución
  Int(f(u)*g(t-u),u=0..t) = int(f(u)*g(t-u),u=0..t);
  # la transformada inversa de H(s), es:
  `h(t) ` = rhs(%);
```

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s-2)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$f(t) = t$$

$$g(t) = e^{(2\,t)}$$

$$f(u) = u$$

$$g(t\text{-}u) = e^{(2\,t-2\,u)}$$

$$\int_0^t u\, e^{(2\,t-2\,u)}\, du = -\frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} e^{(2\,t)}$$

$$h(t) = -\frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} e^{(2\,t)}$$

La definición de un procedimiento que ejecute secuencialmente todos los pasos, donde se le pase como parámetros solo los valores de $F(s)$ y $G(s)$ nos simplificará la utilización de Maple en la aplicación de este método. Este procedimiento puede definirse, como:

```
> MetConv:=proc(F,G)
    local f,g;
    with(inttrans):
    # calcula la transformada inversa
    f:=t->invlaplace(F,s,t):
    g:=t->invlaplace(G,s,t):
    # muestra las funciones de la integral de convolución
    print(`f(u) ` = f(u));
    print(`g(t-u) ` = g(t-u));
    # muestra la integral de convolución y su resultado
    print(Int(f(u)*g(t-u),u=0..t)=int(f(u)*g(t-u),u=0..t));
    # devuelve el valor de la transformada inversa de F(s)H(s)
    return(int(f(u)*g(t-u),u=0..t));
end:
```

Para el ejemplo anterior, solo escribimos:

```
> `h(t) ` = MetConv(1/s^2,1/(s-2));
```

$$f(u) = u$$

$$g(t\text{-}u) = e^{(2\,t-2\,u)}$$

$$\int_0^t u\, e^{(2\,t-2\,u)}\, du = -\frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} e^{(2\,t)}$$

$$h(t) = -\frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}e^{(2\,t)}$$

Ejemplo 33: Determine la transformada inversa por convolución de: $H(s) = s/(s^2+1)^2$. Utilizando, el procedimiento anterior y definiendo: $F(s) = s/s^2+1$ y $G(s) = 1/s^2+1$, tenemos:

```
> `h(t) ` = MetConv(s/(s^2+1),1/(s^2+1));
```

$$f(u) = \cos(u)$$
$$g(t\text{-}u) = \sin(t-u)$$
$$\int_0^t \cos(u)\sin(t-u)\,du = \frac{1}{2}\sin(t)\,t$$
$$h(t) = \frac{1}{2}\sin(t)\,t$$

Aplicaciones de la transformada de Laplace

Una de las principales aplicaciones de la transformada de Laplace es su utilización en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. Esta teoría se considera modernamente como parte integrante y básica del cálculo operacional, el cual consiste en trabajar no con la función incógnita sino con su transformada mediante una serie de operaciones elementales.

Resolución de ecuaciones diferenciales lineales

Ejemplo 34: Utilizando transformada de Laplace, determine la solución de la ecuación diferencial: $y''(t)+4y(t)=9t$; $y(0)=0,\ y'(0)=7$.

Paso por paso, las instrucciones de Maple, son:

```
> with(inttrans):
> # PASO 1; definicion de la EDO y sus condiciones iniciales
  ed1:=diff(y(t),t,t)+4*y(t)=9*t;  y(0)=0; D(y)(0)=7;
  # PASO 2: aplicamos transformada de laplace a la ed
  et1:=laplace(ed1,t,s);
  # PASO 3: para simplificar llamamos laplace(y(t),t,s)=Y y sustituimos
condiciones iniciales
  et2:=subs({laplace(y(t),t,s)=Y,y(0)=0,D(y)(0)=7},et1);
  # PASO 4: resolvemos la ecuacion algebraica para Y
  `Y(s)`  = solve(et2,Y);
  # PASO 5: la solucion la obtenemos aplicando transformada inversa
  `y(t) ` = invlaplace(%,s,t);
```

$$ed1 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) + 4\,\mathrm{y}(t) = 9\,t$$

$$\mathrm{y}(0) = 0$$

$$\mathrm{D}(y)(0) = 7$$

$$et1 := s\,(s\,\mathrm{laplace}(\mathrm{y}(t), t, s) - \mathrm{y}(0)) - \mathrm{D}(y)(0) + 4\,\mathrm{laplace}(\mathrm{y}(t), t, s) = \frac{9}{s^2}$$

$$et2 := s^2\,Y - 7 + 4\,Y = \frac{9}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{7\,s^2 + 9}{s^2\,(s^2 + 4)}$$

$$y(t) = \frac{9\,t}{4} + \frac{19}{8}\sin(2\,t)$$

Maple tiene una función (*dsolve*) para resolver estas ecuaciones, como se mencionó en el capitulo 4. Para comprobar el resultando anterior, escribimos:

```
> dsolve({ed1,y(0)=0,D(y)(0)=7});
```

$$\mathrm{y}(t) = \frac{9\,t}{4} + \frac{19}{8}\sin(2\,t)$$

Como lo que se quiere es utilizar la transformada de Laplace para resolver estas ecuaciones diferenciales, podemos escribir un procedimiento donde se ejecute paso a paso el método usando Laplace para resolverlas:

```
> # procedimiento para resolver EDO lineales
   SolLaplace:=proc(ed,c1,c2)
    local temp1,temp2,temp3,temp4;

    # aplicacion de transformada de Laplace
    temp1:=laplace(ed,t,s):
    # sustitucion de condiciones iniciales
    temp2:=subs({laplace(y(t),t,s)=Y,y(0)=c1,D(y)(0)=c2},temp1):
    print(`Aplicación de Laplace y sustitución de cond. iniciales.`);
    print(temp2);
    # solucion de la ecuacion algebraica para Y(S)
    temp3:=solve(temp2,Y):
    print(`Y(s) ` = temp3);
    # aplicacion de transformada inversa
    temp4:=invlaplace(temp3,s,t):
 end:
```

Una vez definido el procedimiento se le hace una llamada pasando como parámetros la EDO a resolver y las condiciones iniciales de la forma *SolLaplace(edo,y(0),y'(0))*.

```
> `y(t) ` = SolLaplace(ed1,0,7);
```

Aplicación de Laplace y sustitución de cond. iniciales

$$sY - 7 + 4Y = \frac{9}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{7\,s^2 + 9}{s^2\,(s^2 + 4)}$$

$$y(t) = \frac{9\,t}{4} + \frac{19}{8}\sin(2\,t)$$

Ejemplo 35: Resuelva: $y''(t) + 4y(t) = f(t);\qquad y(0^+) = 1,\ y'(0^+) = 0$ y $f(t) = \begin{cases} 4t & 0 < t < 1 \\ 4 & t > 1 \end{cases}$

Se define en Maple la ecuación a resolver:

```
> ed2:=diff(y(t),t,t)+4*y(t)=4*t-4*(t-1)*Heaviside(t-1);
  y(0)=1;
  D(y)(0)=0;
```

$$ed2 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) + 4\,\mathrm{y}(t) = 4\,t - 4\,(t-1)\,\mathrm{Heaviside}(t-1)$$

$$\mathrm{y}(0) := 1$$

$$\mathrm{D}(y)(0) := 0$$

Empleando el procedimiento anterior, tenemos:

```
> `y(t) ` = SolLaplace(ed2,1,0);
```

Aplicación de Laplace y sustitución de cond. iniciales

$$s(sY - 1) + 4Y = \frac{4}{s^2} - \frac{4e^{(-s)}}{s^2}$$

$$Y(s) = -\frac{-s^3 - 4 + 4\,\mathrm{e}^{(-s)}}{s^2\,(s^2 + 4)}$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}\sin(2\,t - 2) - t + 1\right)\mathrm{Heaviside}(t-1) + \cos(2\,t) - \frac{1}{2}\sin(2\,t) + t$$

<u>Resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables</u>

Para la resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, debemos modificar el procedimiento anterior ya que la aplicación de la transformada de Laplace hace que la ecuación se transforme en una ecuación diferencial lineal en $Y(s)$ cuyos coeficientes son polinomios de la variable s.

```
> # procedimiento para resolver edo con coeficientes variables
  SolEDCofV:=proc(ed,c1,c2)
    local temp1,temp2,temp3,temp4;

    # aplicacion de transformada de Laplace
    temp1:=laplace(ed,t,s):
    # sustitucion de condiciones iniciales
    temp2:=subs({laplace(y(t),t,s)=Y(s),y(0)=c1,D(y)(0)=c2},temp1):
    print(`Aplicación de Laplace y sustitución de cond. iniciales.`);
    print(temp2);
    # solución de la ec. diferencial lineal de Y(s)
    dsolve(temp2,Y(s));
    temp3:=rhs(%):
    print(`Solución de la ed. lineal en Y(s)`);
    print(`Y(s) ` = temp3);
    # aplicacion de transformada inversa
    temp4:=invlaplace(temp3,s,t):
  end:
```

Ejemplo 36: Resuelva la ecuación: $ty''(t) + y'(t) + 4ty(t) = 0, \quad y(0^+) = 3, y'(0^+) = 0$

```
> ed3:=t*diff(y(t),t,t)+diff(y(t),t)+4*t*y(t)=0;
  y(0)=3;D(y)(0)=0;
```

$$ed3 := t\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right) + 4\,t\,\mathrm{y}(t) = 0$$

$$\mathrm{y}(0) = 3$$

$$\mathrm{D}(y)(0) = 0$$

Aplicando, el procedimiento definido para este tipo de ecuaciones con coeficientes variables, tenemos:

```
> y:= SolEDCofV(ed3,3,0);
```

Aplicación de Laplace y sustitución de cond. iniciales

$$-s\left(\mathrm{Y}(s) + s\left(\frac{d}{ds}\,\mathrm{Y}(s)\right)\right) - 4\left(\frac{d}{ds}\,\mathrm{Y}(s)\right) = 0$$

Solución de la ed. lineal en Y(s)

$$Y(s) \;= \frac{\_C1}{\sqrt{s^2+4}}$$

$$y := \_C1\ \mathrm{BesselJ}(0,\, 2\,t)$$

La constante $\_C1$ puede determinarse, usando las condiciones del problema. Definimos una función con el resultado obtenido y luego evaluando una condición dada:

```
> f:=unapply(y,t);
  f(0)=3;
```

$$f := t \to \_C1 \operatorname{BesselJ}(0, 2\, t)$$
$$\_C1 = 3$$

Ejemplo 37: Resuelva: $ty''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)=0, \quad y(0^+)=1, y'(0^+)=2$

```
> ed4:=t*diff(y(t),t,t)+(1-2*t)*diff(y(t),t)-2*y(t)=0;
  y(0)=1 ; D(y)(0)=2 ;
```

$$ed4 := t\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t)\right)+(1-2\,t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\right)-2\,\mathrm{y}(t)=0$$
$$\mathrm{y}(0)=1$$
$$\mathrm{D}(y)(0)=2$$

```
> y:=SolEDCofV(ed4,1,2);
```

Aplicación de Laplace y sustitución de cond. iniciales

$$-s\left(\mathrm{Y}(s)+s\left(\frac{d}{ds}\mathrm{Y}(s)\right)\right)+2\,s\left(\frac{d}{ds}\mathrm{Y}(s)\right)=0$$

Solución de la ed. lineal en Y(s)

$$Y(s) = \frac{\_C1}{s-2}$$
$$y := \_C1\, \mathbf{e}^{(2\,t)}$$

Para determinar la constante, hacemos:

```
> f:=unapply(y,t);
   f(0)=1;
```

$$f := t \to \_C1\, \mathbf{e}^{(2\,t)}$$
$$\_C1 = 1$$

Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciables lineales

Para resolver este sistema de EDOs lineales, definimos un procedimiento donde se realizan secuencialmente todos los pasos necesarios para obtener la solución pedida:

```
> # procedimiento para la solución de sistema de edo(s) lineales
  SolSistEDO:=proc(ed1,ed2,c11,c12,c21,c22)

    local temp1,temp12,temp2,temp21,temp3,temp41,temp42,temp5;
    # aplicacion de transformada de Laplace a la edo 1
    temp1:=laplace(ed1,t,s):
    #sustitucion de condiciones iniciales
    temp12:=subs({laplace(x(t),t,s)=X,laplace(y(t),t,s)=Y,x(0)=c11,D(x)(0)
    =c12,y(0)=c21,D(y)(0)=c22},temp1):
    # aplicacion de transformada de Laplace a la edo 2
    temp2:=laplace(ed2,t,s):
    #sustitucion de condiciones iniciales
    temp21:=subs({laplace(x(t),t,s)=X,laplace(y(t),t,s)=Y,x(0)=c11,D(x)(0)
    =c12,y(0)=c21,D(y)(0)=c22},temp2):
    print(`Ecuaciones transformadas`);
    print(temp12,`     `,temp21);
    # solucion de la ecuacion algebraica para X(s) y Y(s)
    temp3:=solve({temp12,temp21},{X,Y}):
    temp41:=eval(X,temp3);
    temp42:=eval(Y,temp3);
    print(`Solución del sistema lineal de X(s) y Y(s)`);
    print(`X(s) ` = temp41,`     `,`Y(s) ` = temp42);
    # aplicacion de transformada inversa
    temp5[1]:=invlaplace(temp41,s,t):
    temp5[2]:=invlaplace(temp42,s,t):
    return(temp5);
  end:
```

Ejemplo 38: Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciables lineales:

$$\begin{cases} y'(t)+2x(t)=1 \\ y''(t)+x'(t)=e^{-t} \end{cases} \qquad y(0^+)=y'(0^+)=0,\ x(0^+)=1$$

Definición de las ecuaciones diferenciales en Maple con sus condiciones iniciales y llamado al procedimiento:

```
> ed1:= diff(y(t),t)+2*x(t)=1;
  ed2:= diff(y(t),t,t)+diff(x(t),t)=exp(-t);
  x(0)=1,D(x)(0)=0;y(0)=0,D(y)(0)=0;
```

$$ed1 := \left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right)+2\,\mathrm{x}(t)=1$$

$$ed2 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t)\right)=\mathbf{e}^{(-t)}$$

$$x(0)=1,\ D(x)(0)=0$$
$$y(0)=0,\ D(y)(0)=0$$

```
> Sols:=SolSistEDO(ed1,ed2,1,0,0,0):
  print(`Solución del sistema de EDOs`);
  x(t):=Sols[1];
  y(t):=Sols[2];
```

Ecuaciones transformadas

$$s\,Y+2\,X=\frac{1}{s},\quad ,\ s^2\,Y-1+s\,X=\frac{1}{1+s}$$

Solución del sistema lineal de X(s) y Y(s)

$$X(s)\ =-\frac{1}{s\,(1+s)},\quad ,\ Y(s)\ =\frac{3+s}{s^2\,(1+s)}$$

Solución del sistema de EDOs

$$x(t):=-2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\sinh\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$y(t):=3\,t-4\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\sinh\left(\frac{t}{2}\right)$$

Ejemplo 39: Resuelva: $\begin{cases} x''(t)+5x(t)-3y(t)=sen2t \\ y''(t)-3x(t)+5y(t)=0 \end{cases}\qquad x(0^+)=x'(0^+)=y(0^+)=y'(0^+)=0$

```
> # definición de ecuaciones
  ed1:=diff(x(t),t,t)+5*x(t)-3*y(t)=sin(2*t);
  ed2:=diff(y(t),t,t)-3*x(t)+5*y(t)=0;
  x(0)=0,D(x)(0)=0;y(0)=0,D(y)(0)=0;

  # llamado al procedimiento
  Sols:=SolSistEDO(ed1,ed2,0,0,0,0):
  print(`Solución del sistema de EDOs`);
  x(t):=Sols[1];
  y(t):=Sols[2];
```

$$ed1:=\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)+5\,x(t)-3\,y(t)=\sin(2\,t)$$

$$ed2:=\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)-3\,x(t)+5\,y(t)=0$$

$$x(0)=0,\ D(x)(0)=0$$
$$y(0)=0,\ D(y)(0)=0$$

Ecuaciones transformadas

$$s^2 X + 5 X - 3 Y = \frac{2}{s^2+4}, \quad , s^2 Y - 3 X + 5 Y = 0$$

Solución del sistema lineal de X(s) y Y(s)

$$X(s) = \frac{2\,(s^2+5)}{56\,s^2 + 64 + s^6 + 14\,s^4}, \quad , Y(s) = \frac{6}{56\,s^2 + 64 + s^6 + 14\,s^4}$$

Solución del sistema de EDOs

$$\mathrm{x}(t) := -\frac{1}{8}\sin(2\,t) - \frac{1}{16}\sqrt{2}\,\sin(2\,\sqrt{2}\,t) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\,t)$$

$$\mathrm{y}(t) := -\frac{3}{8}\sin(2\,t) + \frac{1}{16}\sqrt{2}\,\sin(2\,\sqrt{2}\,t) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\,t)$$

Resolución de otros tipos de ecuaciones

La solución de otros tipos de ecuaciones tales como ecuaciones integro-diferenciales o ecuaciones de tipo convolutorio, la podemos obtener usando un procedimiento similar al que se utilizó con las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, ya que Maple tiene definida todas sus propiedades en su función *laplace*.

```
> # procedimiento para resolver por Laplace otros tipos de ecuaciones
  SolLaplaceOT:=proc(ed,c1)
    local temp1,temp2,temp3,temp4;
     # aplicacion de transformada de Laplace
    temp1:=laplace(ed,t,s):
    temp2:=subs({laplace(y(t),t,s)=Y, y(0)=c1},temp1):
    print(`la ecuación transformada es:`);
    print(temp2);
    # solucion de la ecuacion algebraica para Y(S)
    temp3:=solve(temp2,Y):
    print(`Y(s) ` = temp3);
    # aplicacion de transformada inversa
    temp4:=invlaplace(temp3,s,t):
  end:
```

Ejemplo 40: Resuelva la ecuación de tipo convolutorio:

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(u).sen(t-u)du$$

```
> ed:= y(t)=t^2+int(y(u)*sin(t-u),u=0..t);
```

$$ed := \mathrm{y}(t) = t^2 + \int_0^t -\mathrm{y}(u)\,\sin(-t+u)\,du$$

```
> `y(t) ` = SolLaplaceOT(ec1,0);
```

la ecuación transformada es:

$$Y = \frac{2}{s^3} + \frac{Y}{s^2+1}$$

$$Y(s) \ = \frac{2\,(s^2+1)}{s^5}$$

$$y(t) \ = \frac{1}{12}\,t^4 + t^2$$

Ejemplo 41: Resuelva la ecuación integro-diferencial:

$$y'(t) - 3y(t) + 2\int_0^t y(x)(t-x)\,dx = e^{2t}, \quad y(0^+) = 0$$

```
> ed:=diff(y(t),t)-3*y(t)+2*int(y(x)*(t-x),x=0..t)=exp(2*t);
  y(0)=0;
```

$$ed := \left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right) - 3\,\mathrm{y}(t) + 2\int_0^t \mathrm{y}(x)\,(t-x)\,dx = \mathrm{e}^{(2\,t)}$$

$$\mathrm{y}(0) = 0$$

```
> `y(t) ` = SolLaplaceOT(ed,0);
```

la ecuación transformada es:

$$sY - 3Y + \frac{2Y}{s^2} = \frac{1}{s-2}$$

$$Y(s) \ = \frac{s^2}{(s-2)\,(s^3 - 3\,s^2 + 2)}$$

$$y(t) \ = \left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{e}^{(-(\sqrt{3}-1)\,t)} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{6}\right)\mathrm{e}^{((\sqrt{3}+1)\,t)} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{t} - 2\,\mathrm{e}^{(2\,t)}$$

Solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs)

Para la solución de ecuaciones de este tipo al igual que las anteriores definiremos un procedimiento que nos permita resolverla usando transformada de Laplace paso a paso. Este procedimiento los llamaremos:

SolLapEDP(pde,c_inicial1,c_inicial2,x_inicial,x_final,c_borde1,c_borde2)

```
> with(inttrans);
> SolLapEDP:=proc(pde,c1,c2,x0,x1,u1,u2)
    # procedimiento para resolver EDPs, usando transformada de Laplace
    local pdetemp1,pdetemp2,pdetemp3,SolEDO;
    # aplicación de transformada de Laplace para la variable t
    pdetemp1:=laplace(pde,t,s);
    print(`La EDP transformada: `,pdetemp1);
    # sustitución de condiciones iniciales
    pdetemp2:=subs({laplace(u(x,t),t,s)=U(x),u(x,0)=c1,D[2](u)(x,0)=c2},pd
etemp1);
    print(`La edo en función de x : `,pdetemp2);
    pdetemp3:=dsolve({pdetemp2,U(x0)=u1,U(x1)=u2},U(x));
    SolEDO:=rhs(pdetemp3);
    print(`La solución de la EDO: `,SolEDO);
    # aplicación de transformada inversa
    return(invlaplace(SolEDO,s,t));
  end:
```

Ejemplo 42: Resuelva la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{sujeto a:} \qquad \begin{array}{l} u(x,0^+) = 3sen2\pi x \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ 0 < x < 1, \quad t > 0 \end{array}$$

Esta ecuación en derivadas parciales la resolvemos usando el procedimiento definido anterior mente de la forma:

Definimos la EDPs sus condiciones iniciales y sus condiciones de borde:

```
> pde:=diff(u(x,t),t)=3*diff(u(x,t),x,x);
  u(x,0)=3*sin(2*Pi*x),D[2](u)(x,0)=0,u(0,t)=0,u(1,t)=0:
```

$$pde := \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{u}(x,t) = 3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,t)\right)$$

Llamada al procedimiento:

```
> print(`La solución de la PDE es:    u(x,t)` =
SolLapEDP(pde,3*sin(2*Pi*x),0,0,1,0,0));
```

$$\textit{La EDP transformada es: },\ s\ \mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s)-\mathrm{u}(x,0)=3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s)\right)$$

$$\textit{La edo en función de x es : },\ s\ \mathrm{U}(x)-3\sin(2\pi x)=3\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{U}(x)\right)$$

$$\textit{La solución de la EDO es : },\ \frac{3\sin(2\pi x)}{s+12\pi^2}$$

$$\textit{La solución de la PDE es:}\quad \textit{u(x,t)}=3\sin(2\pi x)\,\mathrm{e}^{(-12\pi^2 t)}$$

Ejemplo 43: Resuelva la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\qquad \text{sujeto a:}\qquad \begin{aligned}&u(x,0^+)=20sen2\pi x-10sen5\pi x\\&u_t(x,0^+)=0\\&u(0,t)=u(2,t)=0\end{aligned}$$

```
> pde:=diff(u(x,t),t,t)=9*diff(u(x,t),x,x);
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{u}(x,t)=9\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,t)\right)$$

```
> print(`La solución de la PDE es:    u(x,t)` =
SolLapEDP(pde,20*sin(2*Pi*x)-
       10*sin(5*Pi*x),0,0,2,0,0));
```

La EDP transformada: ,

$$s\,(s\ \mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s)-\mathrm{u}(x,0))-\mathrm{D}_2(u)(x,0)=9\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s)\right)$$

$$\textit{La edo en función de x: },\ s\,(s\ \mathrm{U}(x)-20\sin(2\pi x)+10\sin(5\pi x))=9\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{U}(x)\right)$$

$$\textit{La solución de la EDO: },\ \frac{-10\,s\,(s^2+36\pi^2)\sin(5\pi x)+20\,s\sin(2\pi x)\,(s^2+225\pi^2)}{s^4+261\,s^2\pi^2+8100\pi^4}$$

$$\textit{La solución de la PDE es:}\quad \textit{u(x,t)}=20\sin(2\pi x)\cos(6\pi t)-10\sin(5\pi x)\cos(15\pi t)$$

Resolución de algunas integrales impropias:

La solución usando Laplace para este tipo de integrales se basa en que:

$$\int_0^\infty e^{-at} f(t)\,dt = L[f(t)]\Big|_{s=a} = F(a)$$

Ejemplo 44: Evalué: $\int_0^\infty e^{-t}\dfrac{1-\cos 3t}{t}\,dt$

```
> f:=(1-cos(3*t))/t;
```

$$f := \frac{1-\cos(3\,t)}{t}$$

```
> F:=laplace(f,t,s);
  Int(exp(-t)*f,t=0..infinity)=subs(s=1,F);
```

$$F := \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{9}{s^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathbf{e}^{(-t)}\,(1-\cos(3\,t))}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln(10)$$

Ejemplo 45: Evalué: $\int_0^\infty e^{-2t}t\left[\int_0^t senhx.\cos(t-x)dx\right]dt$

```
> G:=laplace(t*int(sinh(x)*cos(t-x),x=0..t),t,s);
  Int(exp(-2*t)*g,t=0..infinity)=subs(s=2,G);
```

$$G := \frac{1+\frac{(s-1)^2}{2}}{2\,(s-1)^2\,((s-1)^2+4)} + \frac{1+\frac{(s-1)^2}{2}}{((s-1)^2+4)^2} - \frac{1}{2\,((s-1)^2+4)}$$
$$+ \frac{1}{2\,(s-1)^2\,((s-1)^2+4)} + \frac{1}{((s-1)^2+4)^2} + \frac{1+\frac{(s+1)^2}{2}}{2\,(s+1)^2\,((s+1)^2+4)}$$

$$+\frac{1+\frac{(s+1)^2}{2}}{\left((s+1)^2+4\right)^2}-\frac{1}{2\left((s+1)^2+4\right)}+\frac{1}{2\,(s+1)^2\left((s+1)^2+4\right)}+\frac{1}{\left((s+1)^2+4\right)^2}$$
$$-\frac{-1+s^2}{2\,(s^2+1)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(-2\,t)}\left(\frac{1}{4}\,t\cos(t)^2\,\mathrm{e}^{t}+\frac{1}{4}\,t\sin(t)^2\,\mathrm{e}^{t}+\frac{1}{4}\,t\cos(t)^2\,\mathrm{e}^{(-t)}+\frac{1}{4}\,t\sin(t)^2\,\mathrm{e}^{(-t)}-\frac{1}{2}\,t\cos(t)\right)dt$$
$$=\frac{49}{225}$$