y

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right|.$$

7. La ecuación diferencial

$$mu''(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t$$

describe un sistema de masa-resorte con una masa m, una constante de resorte k, y sin amortiguamiento. El término $F_0 \cos \omega t$ describe una fuerza externa periódica que se aplica al sistema. La solución de la ecuación cuando el sistema se encuentra inicialmente en reposo ($u'(0) = u(0) = 0$) es

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}[\cos \omega t - \cos \omega_0 t], \qquad \text{donde} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega.$$

Dibuja la gráfica de u cuando $m = 1$, $k = 9$, $F_0 = 1$, $\omega = 2$ y cuando $t \in [0, 2\pi]$. Aproxime $\int_0^{2\pi} u(t)\,dt$ con una exactitud de 10^{-4}.

8. Si agregamos el término $cu'(t)$ al extremo izquierdo de la ecuación de movimiento del ejercicio 7, la ecuación diferencial resultante describe un sistema de masa-resorte que está amortiguado, con una constante de amortiguamento $c \neq 0$. La solución de esta ecuación cuando el sistema se encuentra inicialmente en reposo es

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{c^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}[c\omega \operatorname{sen} \omega t + m(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \omega t],$$

donde

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m}.$$

a. Sean $m = 1$, $k = 9$, $F_0 = 1$, $c = 10$, y $\omega = 2$. Determinemos los valores de c_1 y c_2 de modo que $u(0) = u(1) = 0$.

b. Bosqueje la gráfica de $u(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$ y aproxime $\int_0^{2\pi} u(t)\,dt$ con una exactitud de 10^{-4}.

9. El estudio de la difracción de la luz en una apertura rectangular implica el uso de las integrales de Fresnel

$$c(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi}{2} w^2\,dw \qquad \text{y} \qquad s(t) = \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} w^2\,dw.$$

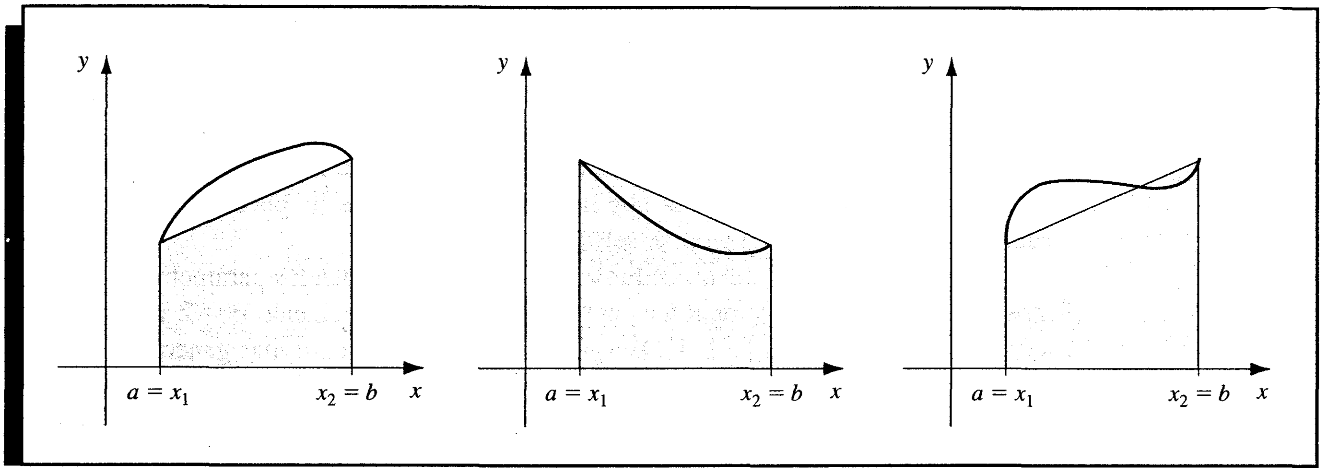
Construya una tabla de valores para $c(t)$ y $s(t)$ que tenga una exactitud de 10^{-4} para los valores de $t = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$.

4.7 Cuadratura gaussiana

Las fórmulas de Newton-Cotes de la sección 4.3 se dedujeron integrando los polinomios interpolantes. Puesto que el término de error en el polinomio interpolante de grado n contiene la $(n + 1)$-ésima derivada de la función a aproximar, una fórmula de este tipo será exacta cuando aproxime cualquier polinomio de un grado menor o igual que n.

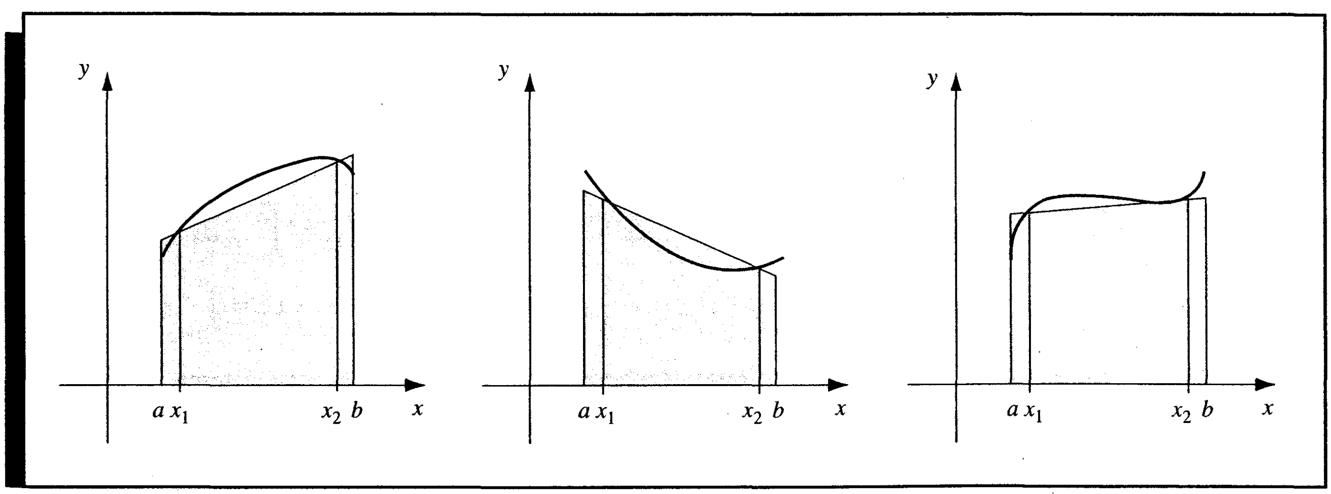
En todas las fórmulas de Newton-Cotes se emplean valores de la función en puntos equidistantes. Esta práctica es adecuada cuando las fórmulas se combinan para formar las reglas compuestas que ya explicamos en la sección 4.4; pero esta restricción puede afectar considerablemente la exactitud de la aproximación. Por ejemplo, tomemos el caso de la regla del trapecio con que se determinan las integrales de las funciones de la figura 4.14.

Figura 4.14



La regla del trapecio aproxima la integral de la función al integrar la función lineal que une los extremos de la gráfica de la función. Pero sin duda ésta no es la mejor línea para aproximar la integral. Las líneas como las que se muestran en la figura 4.15 seguramente producirán, en la generalidad de los casos, mucho mejores aproximaciones.

Figura 4.15



La cuadratura gaussiana selecciona los puntos de la evaluación de manera óptima y no en una forma igualmente espaciada. Se escogen los nodos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el intervalo

$[a, b]$ y los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, para reducir en lo posible el error esperado que se obtiene al efectuar la aproximación

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

Si queremos medir esta exactitud, supondremos que la selección óptima de estos valores es la que dé el resultado exacto de la clase más numerosa de polinomios, es decir, la selección que ofrezca el máximo grado de precisión.

En la fórmula de aproximación los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son arbitrarios, y los nodos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están restringidos sólo por la especificación de que se encuentren en $[a, b]$, el intervalo de la integración. Esto nos da $2n$ parámetros de donde elegir. Si los coeficientes de un polinomio se consideran parámetros, la clase de polinomios de grado máximo $2n - 1$ también contiene $2n$ parámetros. Así pues, éste es el tipo de polinomios más amplio en que es posible esperar que la fórmula sea exacta. Se puede lograr la exactitud cuando los valores y constantes se seleccionan bien.

Para dar un ejemplo del procedimiento con que se escogen los parámetros apropiados, mostraremos cómo seleccionar los coeficientes y los nodos cuando $n = 2$ y cuando el intervalo de integración es $[-1, 1]$. Después explicaremos el caso más general de una elección arbitraria de los nodos y coeficientes, indicando cómo modificar el método cuando se integra en un intervalo arbitrario.

Supóngase que queremos determinar c_1, c_2, x_1 y x_2 de modo que la fórmula de integración

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

dé el resultado exacto siempre que $f(x)$ sea un polinomio de grado $2(2) - 1 = 3$ o menor, es decir, cuando

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

para algún conjunto de constantes a_0, a_1, a_2 y a_3. Dado que

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)\,dx = a_0 \int 1\,dx + a_1 \int x\,dx + a_2 \int x^2\,dx + a_3 \int x^3\,dx,$$

esto equivale a demostrar que la fórmula produce resultados exactos cuando $f(x)$ es 1, x, x^2 y x^3. Por tanto, necesitamos c_1, c_2, x_1 y x_2, de modo que

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2, \qquad c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0,$$
$$c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}, \qquad \text{y} \qquad c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0.$$

Con unas cuantas operaciones algebraicas demostramos que este sistema de ecuaciones tiene solución única

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = 1, \qquad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

con que se obtiene la fórmula de aproximación

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right). \tag{4.41}$$

Esta fórmula tiene un grado de precisión tres, esto es, produce el resultado exacto con cada polinomio de grado tres o menor.

Con esta técnica podríamos determinar los nodos y coeficientes de las fórmulas que proporcionan resultados exactos con los polinomios de grado superior, pero también podemos aplicar un método alterno para obtenerlos más fácilmente. En las secciones 8.2 y 8.3 estudiaremos varios grupos de polinomios ortogonales, que son funciones que tienen la propiedad de que una integral definida del producto de dos de ellos cualesquiera es cero. El conjunto relacionado con nuestro problema es el de los polinomios de Legendre, un conjunto $\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots,\}$ con las siguientes propiedades:

1. Para cada n, $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.
2. $\int_{-1}^{1} P(x)\, P_n(x)\, dx = 0$ siempre que $P(x)$ sea un polinomio de un grado menor que n.

Los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \qquad \text{y} \qquad P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}.$$

Las raíces de estos polinomios son diferentes, se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$ tienen simetría con respecto del origen y, lo más importante de todo, es la opción correcta para determinar los parámetros que resuelven nuestro problema.

Los nodos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ necesarios para producir una fórmula de la aproximación a la integral, que proporcione resultados exactos para cualquier polinomio de un grado menor que $2n$ son las raíces del polinomio de Legendre de grado n. Esto se establece por medio del siguiente resultado.

Teorema 4.7 Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las raíces del polinomio de Legendre $P_n(x)$ de n-ésimo grado y que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, los números c_i están definidos por

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx.$$

Si $P(x)$ es un polinomio cualquiera de un grado menor que $2n$, entonces

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i). \qquad \blacksquare$$

Demostración Tomemos primero el caso de un polinomio $P(x)$ de un grado menor que n. Reescribimos $P(x)$ como un polinomio de Lagrange de $(n-1)$-ésimo grado, con nodos en las raíces del polinomio de Legendre $P_n(x)$. Esta representación de $P(x)$ es exacta, ya que el término de error contiene la n-ésima derivada de P y esa derivada es cero. Por tanto,

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P(x_i) \right] dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx \right] P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, P(x_i),$$

con esto verificamos el resultado de los polinomios de un grado menor que n.

Si el polinomio $P(x)$ de un grado menor que $2n$ se divide entre el polinomio de Legendre de n-ésimo grado $P_n(x)$, entonces dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ de un grado menor que n se producen por medio de

$$P(x) = Q(x)\, P_n(x) + R(x).$$

Ahora recurrimos a la potencia única de los polinomios de Legendre. Primero, el grado del polinomio $Q(x)$ es menor que n; por tanto (de acuerdo con la propiedad 2),

$$\int_{-1}^{1} Q(x)\, P_n(x)\, dx = 0.$$

Después, como x_i es una raíz de $P_n(x)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$P(x_i) = Q(x_i)\, P_n(x_i) + R(x_i) = R(x_i).$$

Finalmente, como $R(x)$ es un polinomio de grado menor que n, el argumento inicial implica que

$$\int_{-1}^{1} R(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i R(x_i).$$

Al combinar estos hechos, verificamos que la fórmula es exacta para el polinomio $P(x)$:

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \int_{-1}^{1} [Q(x)\, P_n(x) + R(x)]\, dx = \int_{-1}^{1} R(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \, R(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, P(x_i)$$

■ ■ ■

Las constantes c_i necesarias para que la cuadratura funcione, puede generarse a partir de la ecuación del teorema 4.7, pero ambas constantes y las raíces de los polinomios de Legendre se tabulan ampliamente. La tabla 4.11 contiene estos valores para $n = 2, 3, 4$ y 5. Podemos encontrar otras tablas en [StS],

Una integral $\int_a^b f(x)dx$ en un intervalo arbitrario $[a, b]$ se puede transformar, en otra en $[-1, 1]$ usando el cambio de variables (véase Fig. 4.16):

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b].$$

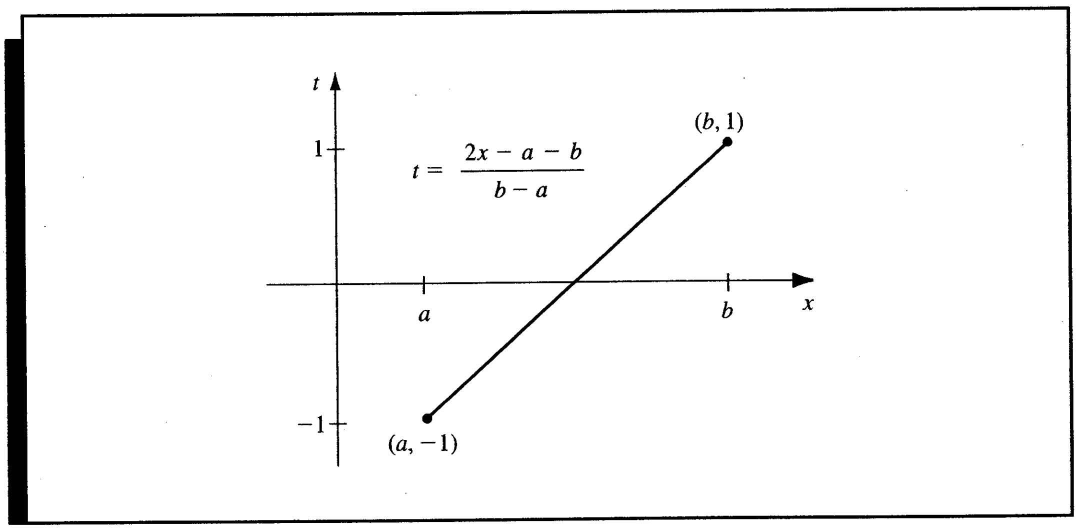
Esto nos permite aplicar la cuadratura gaussiana a cualquier intervalo $[a + b]$, ya que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b - a)t + (b + a)}{2} \right) \frac{(b - a)}{2}\, dt. \tag{4.42}$$

Tabla 4.11

n	Raíces $r_{n,i}$	Coeficientes $c_{n,i}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	−0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	−0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	−0.3399810436	0.6521451549
	−0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	−0.5384693101	0.4786286705
	−0.9061798459	0.2369268850

Figura 4.16



EJEMPLO 1 Consideremos el problema de obtener aproximaciones a $\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx$. La tabla 4.12 contiene los valores de las fórmulas de Newton-Cotes que vienen en la sección 4.3. El valor exacto de la integral con siete decimales es 0.1093643.

Tabla 4.12

n	0	1	2	3	4
Fórmulas cerradas		0.1183197	0.1093104	0.1093404	0.1093643
Fórmulas abiertas	0.1048057	0.1063473	0.1094116	0.1093971	

El procedimiento de la cuadratura gaussiana aplicado a este problema requiere transformar primero la integral en un problema cuyo intervalo de integración sea [−1, 1]. Al usar la ecuación (4.42) tenemos

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{(-t+5)^2/16)}\,dt.$$

Al utilizar los valores de la tabla 4.11, obtenemos mejores aproximaciones de la cuadratura gaussiana en este problema

***n* = 2:**

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4}\left[e^{-(5+0.5773502692)^2/16} + e^{-(5-0.5773502692)^2/16}\right] = 0.1094003;$$

***n* = 3:**

$$\begin{aligned}\int_1^{1.5} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4}&\left[(0.5555555556)e^{-(5+0.7745966692)^2/16} + (0.8888888889)e^{-(5)^2/16}\right.\\ &\left.+ (0.5555555556)e^{-(5-0.7745966692)^2/16}\right]\\ &= 0.1093642.\end{aligned}$$

Con el fin de facilitar la comparación, en la tabla 4.13 se incluyen los valores obtenidos al aplicar el procedimiento de Rombertg con $n = 4$. ■

Tabla 4.13

0.1183197			
0.1115627	0.1093104		
0.1099114	0.1093610	0.1093643	
0.1095009	0.1093641	0.1093643	0.1093643

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.7

1. Aproxime las siguientes integrales usando la cuadratura gaussiana con $n = 2$ y compare sus resultados con los valores exactos de las integrales.

   a. $\displaystyle\int_1^{1.5} x^2 \ln x\,dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^{1} x^2 e^{-x}\,dx$

   c. $\displaystyle\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\,dx$ **d.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

   e. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x\,dx$ **f.** $\displaystyle\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\,dx$

   g. $\displaystyle\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ **h.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2\,dx$

2. Repita el ejercicio 1 con $n = 3$.
3. Repita el ejercicio 1 con $n = 4$.
4. Repita el ejercicio 1 con $n = 5$.
5. Determine las constantes a, b, c y d que producirán una fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

   cuyo grado de precisión es 3.

Determine las constantes a, b, c y d que producirán una fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = a f(-1) + b f(0) + c f(1) + d f'(-1) + e f'(1)$$

cuyo grado de precisión es 4.

6. Verifique las entradas o datos para los valores de $n = 2$ y 3 en la tabla 4.11, obteniendo las raíces de los polinomios de Legendre respectivos y usando las ecuaciones anteriores a la tabla para calcular los coeficientes asociados a los valores.
7. Demuestre que la fórmula $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ no puede generar un grado de precisión mayor que $2n - 1$, sin importar la selección de $c_1, \ldots, c_n$ y $x_1, \ldots, x_n$. [*Sugerencia*: construya un polinomio que tenga una raíz doble en cada una de las x_i.]

4.8 Integrales múltiples

Podemos modificar abiertamente los métodos explicados en las secciones anteriores y utilizarlos para aproximar integrales múltiples. Consideremos la integral doble

$$\iint_R f(x, y)\, dA,$$

donde R es una región rectangular en el plano: $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, para algunas constantes, a, b, c y d (véase Fig. 4.17). Para dar un ejemplo del método de apro-

Figura 4.17