CUADRATURA GAUSSIANA

Este método de basa en muestrear el integrando de la función cuya integral se desea encontrar, a valores que representan raíces de *polinomios ortogonales*. Los más populares de éstos son los *polinomios de Legendre*.
En general un conjunto de funciones $\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ se conocen como **ortogonales** en un intervalo $a \le x \le b$, si

$$\int_a^b w(x)\,\phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0, \quad m \ne n \tag{1}$$

Donde $w(x)$ es una función de ponderación no negativa en $[a \quad b]$.

Si las funciones $\phi_m(x)$ son polinomios, estos se designan como **polinomios ortogonales**.

POLINOMIOS DE LEGENDRE.

Los primeros cinco polinomios de **Legendre** son:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1)\\
P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)\\
P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned} \tag{2}$$

El polinomio de Legendre de grado *n* se puede obtener por medio d la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

O bien a partir de la fórmula recursiva:

$$(n+1)\cdot P_{n+1}(x) - (2n+1)\cdot x \cdot P_n(x) + n \cdot P_{n-1}(x) = 0$$

Las relaciones de ortogonalidad y normalización, con las funciones de ponderación (peso) igual a 1, son:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \qquad (3)$$

Todas las raíces de cada $P_n(x) = 0$ son reales y distintas, además están contenidas en el intervalo $\left[-1 \quad 1\right]$.

CUADRATURA GAUSSIANA.

El propósito es discutir la fórmula de integración Gaussiana que aproxima

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \qquad (4)$$

y mostrar que con un simple cambio de variable se pueden extender los límites de integración a valores distintos a $\left[-1 \quad 1\right]$.
La aproximación d la integral definida se puede definir como

$$\int_{-1}^{1} f(x) = w_0\ f(x_0) + w_1\ f(x_1) + w_2\ f(x_2) + \cdots + w_n\ f(x_n) = \sum_{k=0}^{n} w_k\ f(x_k) \qquad (5)$$

$w_0, w_1, \cdots, w_n$ son los coeficientes ponderados ó pesos.

El problema consiste en encontrar las $(2n+2)$ constantes $(w_i, f(x_i))$. Para encontrar las mencionadas constantes, partimos de la suposición básica de que la fórmula (2) representa sin aproximación, es decir, exactamente un polinomio de orden $2n+1$ ó menor.

Primero mostramos que los puntos x_k $(k = 0, \cdots, n)$, son iguales a las raíces del polinomio de Legendre $P_{n+1}(x)$.

Tomemos un polinomio arbitrario $g_n(x)$ de grado *n*. En términos de polinomios de Legendre $g_n(x)$ puede expresarse como

$$g_n(x) = \beta_0\, P_0(x) + \beta_1\, P_1(x) + \cdots + \beta_n\, P_n(x) \qquad (6)$$

Como ejemplo supongamos

$$g_2(x) = 1 + 2x + x^2 .$$

De la ecuación (6) y (2) obtendremos:

$$g_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \frac{\beta_2}{2}(3x^2 - 1) = \left(\beta_0 - \frac{\beta_2}{2}\right) + \beta_1 x + \tfrac{3}{2}\beta_2 x^2$$

Comparando esta última expresión con la $g_2(x)$ inicial obtenemos:

$$\beta_0 - \frac{\beta_2}{2} = 1, \quad \beta_1 = 2, \quad \tfrac{3}{2}\beta_2 = 1,$$

De donde obtenemos finalmente: $\beta_0 = \tfrac{4}{3}, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = \tfrac{2}{3}$.
Sustituyendo esto en (6), obtenemos

$$g_2(x) = \tfrac{4}{3}P_0(x) + 2P_1(x) + \tfrac{2}{3}P_2(x).$$

Este simple ejemplo muestra que cualquier polinomio $g_n(x)$ se puede escribir en términos de polinomios de Legendre.

A partir de la definición de ortogonalidad expresada en (3):

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} g_n(x)P_{n+1}(x)\,dx = \\ &\int_{-1}^{1} \beta_0 P_0(x)P_{n+1}(x) + \int_{-1}^{1} \beta_1 P_1(x)P_{n+1}(x) + \cdots + \int_{-1}^{1} \beta_n P_n(x)P_{n+1}(x) = 0\end{aligned} \tag{7}$$

Observamos que $g_n(x)P_{n+1}(x)$, es un polinomio de grado $2n+1$, y por tanto representa *exactamente* polinomios de grado $2n+1$ ó menos, lo cual constituye el requisito básico mencionado antes, en la definición de la ecuación (5), para la selección de w_k y $x_k \quad (k = 0, \cdots, n)$.

Comparando (7) con (5) obtenemos:

$$w_0 g_n(x_0)P_{n+1}(x_0) + w_1 g_n(x_1)P_{n+1}(x_1) + \cdots + w_n g_n(x_n)P_{n+1}(x_n) = 0 \tag{8}$$

Como $g_n(x)$ es un polinomio arbitrario, $g_n(x_k) \quad (k = 0, \cdots, n)$ no es cero en general. Así mismo las $n+1$ funciones de ponderación ó pesos $w_k \quad (k = 0, \cdots, n)$ no pueden ser todos cero, de lo contrario la ecuación (5) será igual a cero, lo cual constituye el caso trivial.

Dado lo anterior la única condición para la ecuación (8) será:

$$P_{n+1}(x_0) = 0$$
$$P_{n+1}(x_1) = 0$$
.

.

.
$$P_{n+1}(x_n) = 0$$

Lo anterior implica que $x_0, x_1, \cdots, x_n$ son las *raíces del polinomio de Legendre* $P_{n+1}(x) = 0$.

Para $P_{n+1}(x) \in \left[-1 \quad +1\right]$ existen *n+1* raíces distintas.

Como ejemplo, para *n=1*,

$$P_{n+1}(x) = P_2(x) = \tfrac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) = 0$$

por lo que las raíces son $x = \pm 1/\sqrt{3}$.

Mientras que para el caso *n=2*,

$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) = \tfrac{1}{2}\,x\left(5x^2 - 3x\right) = 0\,,$$

por lo que las raíces son $x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3/5}$.

Para la determinación de los coeficientes $w_k \;\; (k = 0, \cdots, n)$ de nuevo tomamos en consideración el requisito establecido en (5), esto es, que si el integrando *f(x)* es un polinomio de grado *n+1* ó menos, dicha ecuación no involucra una aproximación.

Por definición, el polinomio de Lagrange para aproximar cualquier polinomio $h_n(x)$ de grado *n*, que pasa por *n+1* puntos $x_k \;\; (k = 0, \cdots, n)$ se puede expresar como

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} h(x_k) L_k(x)$$

Por lo que

$$\int_{-1}^{+1} h_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \sum_{k=0}^{n} h(x_k) L_k(x)\,.$$

Dado que $h(x_k)$ es una constante

$$\int_{-1}^{+1} h_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} h(x_k) \int_{-1}^{+1} L_k(x) \qquad (9)$$

Comparando (5) con (9) tenemos

$$w_k = \int_{-1}^{+1} L_k(x) \qquad k = 0, \cdots, n \qquad (10).$$

Es común encontrar la definición de L_k y por tanto de w_k en términos de polinomios de Legendre. Esto se obtiene como sigue.

El polinomio $\dfrac{P_{n+1}(x)}{x - x_k}$ es igual a cero para todo $x = x_j$, $j = 0, \cdots, n$, pero $j \neq k$.
De acuerdo a la regla de L'Hopital

$$\lim_{x \to x_k} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k} = \left[\frac{\dfrac{dP_{k+1}(x)}{dx}}{\dfrac{d\left(x - x_k\right)}{dx}} \right]_{x = x_k} = \frac{dP_{k+1}(x_k)}{dx} = P^{'}_{n+1}(x_k)$$

(Dado que la derivada del denominador es igual a 1), donde x_k es una de las raíces del polinomio de Legendre $P_{n+1}(x) = 0$.

Dado lo anterior, el polinomio de Lagrange puede expresarse como

$$L_k = \frac{1}{P^{'}_{n+1}(x_k)} \frac{P_{n+1}(x)}{\left(x - x_k\right)}$$

por tanto las funciones de ponderación (pesos) se definen alternativamente como

$$w_k = \frac{1}{P'_{n+1}(x_k)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_k)}\, dx \qquad (11).$$

Para ejemplificar consideremos *n=1*, $P_{n+1}(x) = P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$ cuyas raíces son $x_0 = 1/\sqrt{3}$, $x_1 = -1/\sqrt{3}$ y su derivada $P'_2(x) = \frac{1}{2}(6x) = 3x$. De aquí entonces

$$w_0 = \frac{1}{3\left(1/\sqrt{3}\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)}{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}\, dx$$

$$w_1 = \frac{1}{3\left(-1/\sqrt{3}\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)}{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}\, dx$$

Para *n=2*, $P_{n+1}(x) = P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$. Las raíces de $P_3(x)$ se determinaron previamente y resultaron $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ y la derivada de $P_3(x)$, $P'_3(x) = \frac{3}{2}\left(5x^2 - 1\right)$, por lo que obtenemos

$$w_0 = \frac{1}{\frac{3}{2}\left(5 \cdot \frac{3}{5} - 1\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)}{x + \sqrt{\frac{3}{5}}}\, dx = \frac{2}{3(3-1)} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}\left(x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}x\right) dx = \frac{5}{9}$$

$$w_1 = \frac{1}{\frac{3}{2}\left(5 \cdot 0 - 1\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)}{x - 0}\, dx = \frac{8}{9}$$

$$w_2 = \frac{1}{\frac{3}{2}\left(5 \cdot \frac{3}{5} - 1\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)}{x - \sqrt{\frac{3}{5}}}\, dx = \frac{2}{3(3-1)} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}\left(x^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}x\right) dx = \frac{5}{9}$$

El procedimiento descrito arriba puede extenderse para diferentes valores de *n*, es decir, para tres puntos, cuatro puntos, cinco puntos, etcétera. La siguiente tabla muestra algunos de estos casos, y en [1] se pueden encontrar una lista más grande.

Raíces de los polinomios de Legendre $P_{n+1}(z)$ y sus factores de ponderación para la cuadratura de Gauss-Legendre.

Raíces (z_i)	$\int_{-1}^{+1} F(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n} w_i\, F(z_i)$	Factores de ponderación (peso)
±0.57735 02691 89626	n = 1 fórmula de dos puntos	1.00000 00000 00000
0.00000 000000 ±0.77459 66692 41483	n = 2 fórmula de tres puntos	0.88888 88888 88889
±0.33998 10435 84856 ±0.86113 63115 94053	n = 3 fórmula de cuatro puntos	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454
0.00000 00000 000000 ±0.53846 93101 05683 ±0.90617 98459 38664	n = 4 fórmula de cinco puntos	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189

Límites de Integración. Dado que los límites de integración asociados con es te desarrollo son -1 y +1, en un problema de aplicación habrá que ajustar el procedimiento de la cuadratura Gaussiana a los límites de la aplicación particular. Lo anterior se logra mediante un simple cambio de variable.
Definimos una relación lineal con la nueva variable

$$x = \frac{(b-a)\,t + (b+a)}{2} \qquad dx = \frac{b-a}{2}\,dt$$

En este caso $\int_a^b f(x)\,dx$ se convertirá en

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{(b-a)\,t_k + (b+a)}{2}\right) dt$$

Dado que la cuadratura de Gauss-Legendre se define

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \; f(x_k)$$

La integral anterior se puede aproximar como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}\sum_{k=0}^{n} w_k \; f\left(\frac{(b-a)\,t_k + (b+a)}{2}\right)$$

Esta formulación es la apropiada para usarse en la programación de este método en computadora, en lugar de usar una transformación simbólica de *f (x)*. En este caso los puntos base t_k se transforman y los factores de ponderación w_k se modifican al multiplicarse por la constante $\left(\frac{b-a}{2}\right)$.

Por ejemplo, usamos la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre de dos puntos para calcular

$$\int_2^4 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \frac{26}{3}$$

La fórmula de cuadratura Gauss-Legendre será (para el método de dos puntos)

$$\int_2^4 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx =$$

$$= \frac{(4-2)}{2}\left[(1.0) * f\left(\frac{-0.577350269189626 * (4-2) + 4 + 2}{2}\right) + (1.0) * f\left(\frac{0.577350269189626 * (4-2) + 4 + 2}{2}\right)\right]$$

$$= 2.0239322565749 + 6.6427344100918$$

$$= 8.666666666667\,.$$