Método de las características
EDP II

Dr. Miguel Angel Uh Zapata

En este documento desarrollaremos el método de las características para un ejemplo particular de la ecuación general de una EDP de primer orden

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u + d(x,y) = 0$$

con condiciones iniciales dadas.

Ejemplo

Usando el método de las características, resolveremos problemas de valor inicial que consiste de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathcal{R}, y > 0$$

el cual representa un movimiento de ondas unidireccional en $\mathcal{R}$ y la condición inicial

$$u(x,0) = F(x) = sen(x), \quad x \in \mathcal{R}.$$

SOLUCIÓN:

- **Curva inicial.**

  Para hallar la expresión de $u = u(x,t)$ suponemos dada una curva inicial C de parámetro τ, que será la condición inicial dada. Sea C la curva inicial dada paramétricamente por

  $$\begin{aligned} x &= x(\tau) \\ y &= y(\tau) \\ u &= u(\tau) \end{aligned}$$

  donde τ es un parámetro. En nuestro caso particular tomando la correspondiente condición inicial tenemos

  $$\begin{aligned} x(\tau) &= \tau \\ y(\tau) &= 0 \\ u(\tau) &= F(\tau) = sen(\tau) \end{aligned} \tag{1}$$

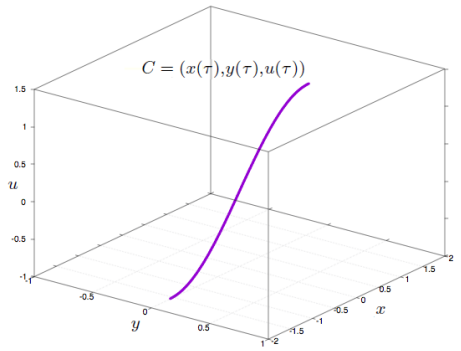

Figura 1. *Curva parametrizada C obtenida usando $F(\tau) = sen(\tau)$ y los valores del parámetro τ en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.*

- **Superficie a partir de la curva inicial.**

Si por cada punto de C podemos trazar otra curva de parámetro s, entonces la superficie S así determinada será la solución buscada. Para cada valor de τ tenemos un punto de C por el cual pasa una curva característica. La familia de curvas determinadas por los puntos de C está dada por:

$$\begin{aligned} x &= x(s,\tau) \\ y &= y(s,\tau) \\ u &= u(s,\tau) \end{aligned}$$

representando la superficie en el espacio, tal que cuando $s = 0$ tenemos C, es decir

$$\begin{aligned} x(0,\tau) &= x(\tau) \\ y(0,\tau) &= y(\tau) \\ u(0,\tau) &= u(\tau) \end{aligned}$$

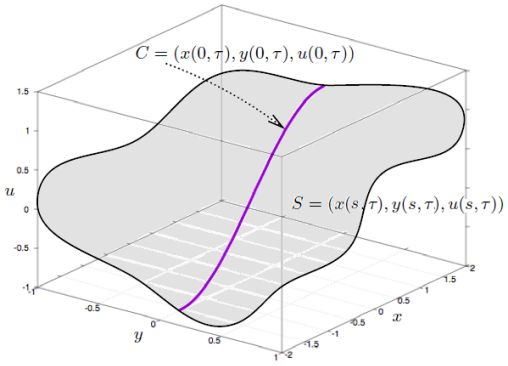

***Figura 2**. En la figura podemos observar la curva parametrizada C y una posible superficie S definida con los parámetros (τ, s).*

- **Ecuaciones características.**

Ahora deseamos cambiar nuestra EDP en términos de nuestros nuevos parámetros. Así usando el hecho que

$$u(s,\tau) = u(x(s,\tau), y(s,\tau))$$

y la derivada de u sobre s tenemos que

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

Así usando nuestra nueva parametrización, la ecuación diferencial parcial puede ser cambiado al siguiente sistema de EDO

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a(x,y), \\ \frac{dy}{ds} &= b(x,y), \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -(c(x,t)u + d(x,t)). \end{aligned}$$

Para nuestro problema particular tenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= c, \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \\ \frac{du}{ds} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

DEFINICIONES:
Este sistema de EDO es llamado **ecuaciones características**. Las soluciones de este sistema son familias de curvas: $x = x(s)$, $t = t(s)$, $u = u(s)$, llamadas **curvas características**. Estas curvas en el plano (x, y) son llamadas **curvas características básicas**.

- **Solución de las ecuaciones características.**
  Las dos primeras ecuaciones se pueden resolver independientemente de la tercera. Para nuestro ejemplo, el sistema de EDO con condiciones iniciales no es difícil de resolver. Las soluciones de estos tres problemas están dados por:

$$\frac{dx}{ds} = c, \qquad \Longrightarrow \qquad x(s,\tau) = cs + \tau, \tag{3}$$
$$x(0,\tau) = \tau$$
$$\frac{dy}{ds} = 1, \qquad \Longrightarrow \qquad y(s,\tau) = s \tag{4}$$
$$y(0,\tau) = 0$$
$$\frac{du}{ds} = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad u(s,\tau) = sen(\tau) \tag{5}$$
$$u(0,\tau) = sen(\tau)$$

OBSERVACIONES:
Las curvas características $(x(s), y(s), u(s)$ en el espacio y las curvas características básicas $(x(s), y(s)$ en el plano pueden ser obtenidas seleccionando valores τ. Por ejemplo para $c = 2$ y $\tau = -1, -0{,}5, 0, 0{,}5, 1$ tenemos las siguientes gráficas. Notar que en este caso particular, las curvas características son líneas rectas.

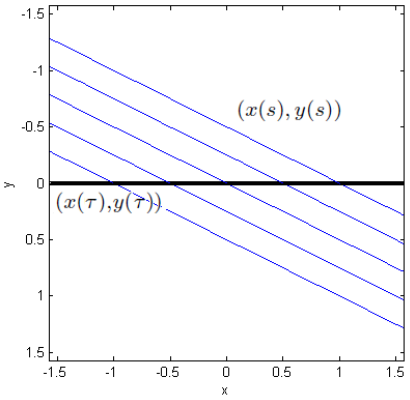

Figura 3. *Curva parametrizada $(x(\tau), y(\tau))$ y curvas características básicas $(x(s), y(s))$ en el plano.*

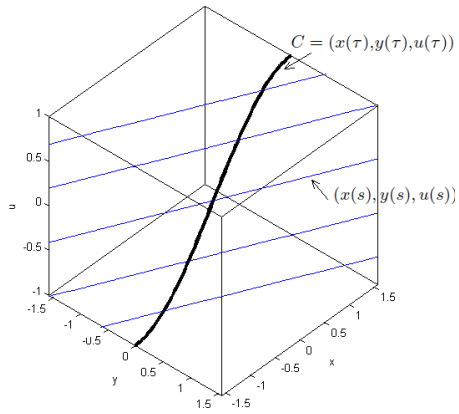

Figura 4. *Curva parametrizada C y curvas características $(x(s), y(s), u(s))$ en el espacio.*

- **Solución final.**

Finalmente despejando τ y s en función de x y y en las dos primeras expresiones

$$s = y, \qquad \tau = x - cy$$

y sustituyendo en $u(s,\tau)$, obtenemos

$$\boxed{u(x,t) = F(x - cy) = sen(x - y).} \tag{6}$$

Notar que la solución está determinada sólo en términos del dato inicial.

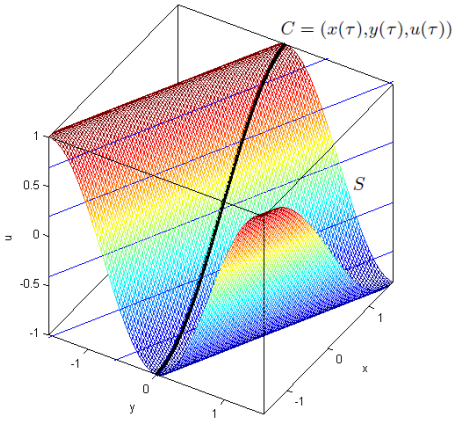

Figura 5. *Superficie S correspondiente a la solución del problema para $c = 2$.*