Problemas Resueltos de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Alberto Cabada Fernández

14 de diciembre de 2011.

Índice general

Introducción

En esta memoria se recopilan una serie de problemas de la materia de quinto curso de la licenciatura de Ciencias matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela denominada **Ecuaciones en Derivadas Parciales**.

La intención es proporcionar al alumnado interesado en esta materia problemas relacionados con los distintos tipos de problemas abordados a lo largo de la materia. Así pues resolveremos en el primer capítulo problemas de primer orden, tanto cuasilineales como no lineales. En el primer caso, la resolución se basará tanto en el método de las curvas características como en el de las integrales primeras. El cálculo de las generatrices del cono de Monge serán las herramientas usadas para la resolución de las ecuaciones no lineales.

El segundo tema está dedicado a la clasificación de ecuaciones cuasilineales y a la resolución de ecuaciones hiperbólicas y parabólicas. En el primer caso se reducirán a su forma canónica por medio de las curvas características y, cuando ello sea posible, se obtendrá la solución explícita del problema tratado. Para la resolución efectiva de las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas, usaremos la expresión de la solución general obtenida en el desarrollo de las clases teóricas. En buena parte de los casos la resolución directa de las integrales involucradas no va a ser posible, por lo que se recurrirá a las propiedades cualitativas de las funciones que aparecen en la expresión de la solución tratada en los problemas parabólicos y a los resultados clásicos del análisis vectorial en los hiperbólicos.

Si bien en muchos casos estas integrales pueden ser resueltas directamente por medio de programación matemática, se han realizado los cálculos con detalle, por considerar que el desarrollo del cálculo vectorial es fundamental en la formación del alumnado al que va dirigido esta materia.

Todas las superficies solución de los problemas resueltos son representados en el propio ejercicio.

Las distintas secciones finalizan con problemas propuestos, aportándose la expresión de la solución buscada.

También se han realizado programas informáticos en lenguaje MAPLE que pueden ser utilizados en la resolución de varios de los problemas tratados.

Capítulo 1

Ecuaciones de primer orden

1.1. Método de las bandas características

Cuando los sistemas característicos considerados sean lineales la resolución es inmediata. La expresión vendrá dada del cálculo efectivo de la matriz exponencial correspondiente.

A continuación presentamos una serie de problemas que se resuelven de este modo.

1.1.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1.1 *Resolver la siguiente ecuación:*

$$(6\,x - 2\,y - 3\,u)\,u_x - 9\,u\,u_y = 4\,y\,; \quad u(x,0) = 1.$$

Solución: En este caso

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 6\,x - 2\,y - 3\,z, \\ f_2(x,y,z) &= -9\,z, \\ f(x,y,z) &= 4\,y \end{aligned}$$

y

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv (s, 0, 1).$$

Dado que

$$\det \begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6\,s - 3 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = 9 \neq 0,$$

sabemos que hay una única solución entorno a la condición inicial.

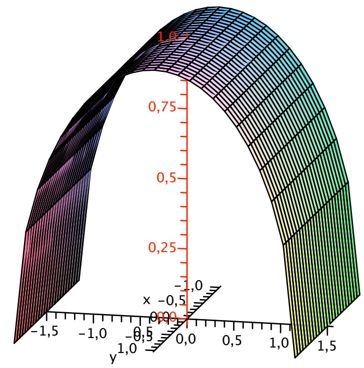

Figura 1.1: Solución del Ejercicio 1.1.1

El sistema característico resulta ser:

$$\left\{\begin{array}{lcll} x' & = & 6\,x - 2\,y - 3\,z, & x(0) = s, \\ y' & = & -9\,z, & y(0) = 0, \\ z' & = & 4\,y, & z(0) = 1, \end{array}\right.$$

y su solución viene dada por

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = e^{A\,t} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$\begin{array}{rcl} x(t,s) & = & s\,e^{6\,t} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,6\,t, \\ y(t,s) & = & -\dfrac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,6\,t, \\ z(t,s) & = & \cos 6t. \end{array}$$

A partir de esta expresión vemos que la superficie solución está sobre el cilindro elíptico $9\,z^2 + 4\,y^2 = 9$. De la condición inicial deducimos que (ver figura 1.1)

$$u(x,y) \equiv z(t(x,y), s(x,y)) = \sqrt{1 - 4\,y^2/9}.$$

□

Nota 1.1.1 *El problema anterior, al igual que todos aquellos en los que el sistema característico es un sistema lineal, puede ser resuelto directamente mediante programación en lenguajes de cálculo simbólico. En este caso concreto la programación en lenguaje MAPLE sería:*

with(linalg):

```
with(plots):

A := array( [[6,-2,-3],[0,0,-9],[0,4,0]] );

DD:=exponential(A, t);

C:=vector([s, 0,1]);

SS := multiply(DD, C);
```

Ejercicio 1.1.2 *Resolver la siguiente ecuación*

$$(y-x)\,u_x + 2\,y\,u_y = 3\,x - y + 2\,u\,; \quad u(0,x) = -x.$$

Solución:
Los datos del problema considerado son

$$\begin{array}{rcl} f_1(x,y,z) & = & y-x, \\ f_2(x,y,z) & = & 2\,y, \\ f(x,y,z) & = & 3\,x - y + 2\,z \end{array}$$

y

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv (0, s, -s).$$

Dado que

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s & 0 \\ 2\,s & 1 \end{pmatrix} = s,$$

la condición de transversalidad se verifica siempre que $s \neq 0$.

El sistema característico a resolver es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x' & = & -x+y, & x(0)=0, \\ y' & = & 2\,y, & y(0)=s, \\ z' & = & 3\,x - y + 2\,z, & z(0) = -s, \end{array} \right.$$

y su solución viene dada por

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = e^{A\,t}\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix}, \qquad \text{siendo } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual

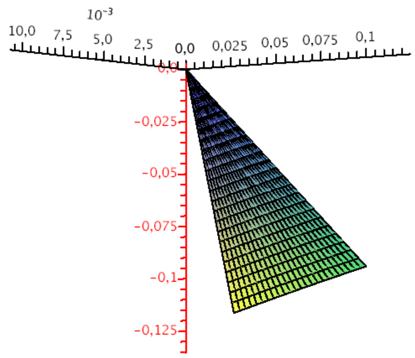

Figura 1.2: Solución en forma paramétrica del Ejercicio 1.1.3

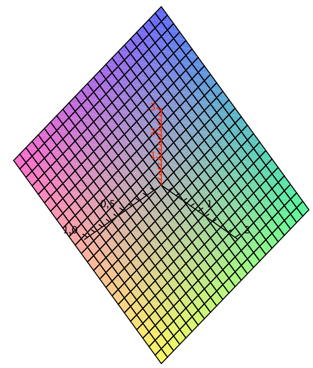

Figura 1.3: Plano $z = -x - y$

$$
\begin{aligned}
x(t,s) &= \left(e^{2t} - e^{-t}\right) \frac{s}{3}, \\
y(t,s) &= e^{2t}\, s, \\
z(t,s) &= \left(-4\, e^{2t} + e^{-t}\right) \frac{s}{3}.
\end{aligned}
$$

Nótese que la parametrización de la superficie solución se reduce al origen cuando $s = 0$ (véase la figura 1.2). Ello se debe a que la curva inicial no es trasversal al flujo en $(0,0,0)$, con lo cual el método de las curvas características no permite garantizar la existencia de solución en ese punto. Sin embargo, usando esa misma expresión, no es difícil comprobar que la solución del problema considerado viene dada explícitamente por la expresión (ver figura 1.3)

$$u(x,y) \equiv z(t(x,y), s(x,y)) = -x - y.$$

Lo cual pone de manifiesto que la condición de trasversalidad es una condición suficiente para garantizar la existencia y unicidad de solución que no ha de verificarse necesariamente en todos los puntos de la curva inicial. □

Ejercicio 1.1.3 *Resolver la siguiente ecuación:*

$$(x + y - 4\,u)\, u_x - (y + x)\, u_y = -3\, u\,; \quad u(x,x) = -x^2.$$

Solución: En este caso los datos del problema vienen dados por

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y,z) &= x + y - 4\, z, \\
f_2(x,y,z) &= -x - y, \\
f(x,y,z) &= -3\, z
\end{aligned}
$$

y

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv (s, s, -s^2).$$

Dado que

$$\det \begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2\,s + 4\,s^2 & 1 \\ -2\,s & 1 \end{pmatrix} = 4\,(s + s^2),$$

deducimos que el problema tiene solución única para los valores del parámetro $s \neq 0$ y $s \neq -1$.

El sistema característico será:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x' & = & x + y - 4\,z, & x(0) = s \\ y' & = & -x - y, & y(0) = s \\ z' & = & -3\,z, & z(0) = -s^2. \end{array} \right.$$

La única solución de este problema viene dada por la expresión

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = e^{A\,t} \begin{pmatrix} s \\ s \\ -s^2 \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es decir

$$\begin{array}{rcl} x(t,s) & = & (1 + 2\,t)\,s - \left(-\dfrac{4}{3}t - \dfrac{8}{9} + \dfrac{8}{9}e^{-3\,t} \right) s^2, \\ y(t,s) & = & (1 - 2\,t)\,s - \left(\dfrac{4}{3}t - \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9}e^{-3\,t} \right) s^2, \\ z(t,s) & = & -e^{-3\,t} s^2. \end{array}$$

La superficie solución $\Gamma(t,s) \equiv (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$ se representa en las figuras 1.4 y 1.5, pudiendo observarse en la segunda de ellas como la solución verifica la condición inicial. Nótese que, al igual que en el ejercicio 2.3.1, en el origen la superficie parametrizada se reduce al $(0,0,0)$ dado que la curva inicial no es trasversal al flujo en ese punto. □

Ejercicio 1.1.4 *Resolver la ecuación*

$$(-12\,x + 8\,y - 8\,u)\,u_x + 3\,(y + u)\,u_y = -y + 7\,u\,; \quad u(x,0) = -x.$$

Solución: Los datos del problema considerado son

$$\begin{array}{rcl} f_1(x,y,z) & = & -12\,x + 8\,y - 8\,z, \\ f_2(x,y,z) & = & 3\,y + 3\,z, \\ f(x,y,z) & = & -y + 7\,z \end{array}$$

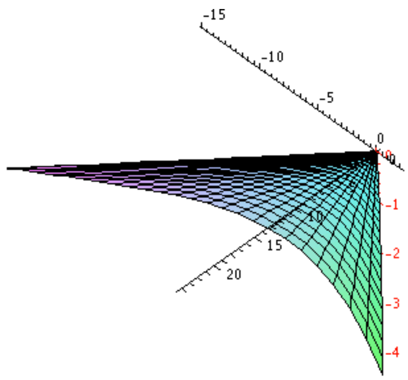

Figura 1.4: Solución del Ejercicio 1.1.3

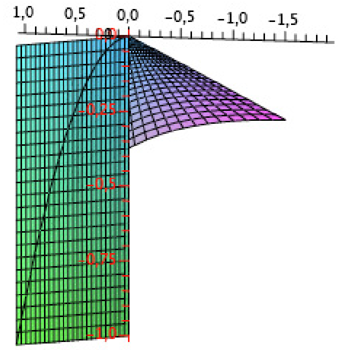

Figura 1.5: Condición inicial

y

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv (s, 0, -s).$$

La condición de transversalidad se verifica siempre que

$$\det \begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -4\,s & 1 \\ -3\,s & 0 \end{pmatrix} = 3\,s \neq 0.$$

El sistema característico a resolver es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x' & = & -12\,x + 8\,y - 8\,z, & x(0) = s, \\ y' & = & 3\,y + 3\,z, & y(0) = 0, \\ z' & = & -y + 7\,z, & z(0) = -s, \end{array} \right.$$

y su solución viene dada por

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = e^{A\,t} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix}, \text{ con } \quad A = \begin{pmatrix} -12 & 8 & -8 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual

$$\begin{array}{rcl} x(t,s) & = & \dfrac{1}{2}\left(e^{4\,t} + e^{-12\,t}\right)\,s, \\ y(t,s) & = & \dfrac{3}{2}\left(e^{4\,t} - e^{6\,t}\right)\,s, \\ z(t,s) & = & \dfrac{1}{2}\left(e^{4t} - 3\,e^{6t}\right)\,s. \end{array}$$

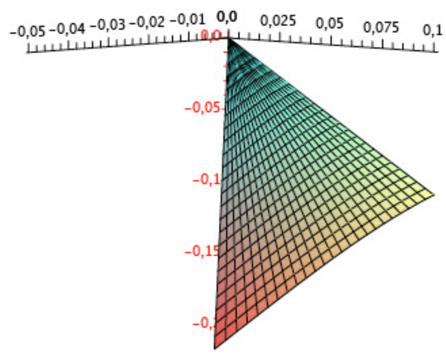

Figura 1.6: Solución del Ejercicio 1.1.4

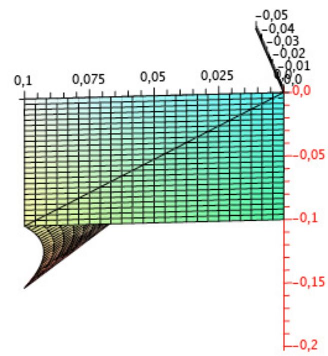

Figura 1.7: Condición inicial

La superficie solución se representa en las figuras 1.6 y 1.7. Al igual que ocurre en el ejercicio 1.1.3 la curva inicial no es trasversal al flujo en el origen y la superficie parametrizada se reduce a un punto en ese caso. $\square$

Ejercicio 1.1.5 *Resolver la ecuación*

$$(-2\,x+y-u)\,u_x+3\,(3\,u-y)\,u_y=9\,u-3\,y\,;\quad u(x^2,x)=-x^2.$$

Solución: Los datos del problema considerado son

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= -2\,x+y-z,\\ f_2(x,y,z) &= -3\,y+9\,z,\\ f(x,y,z) &= -3\,y+9\,z \end{aligned}$$

y

$$\gamma(s)=(\alpha_1(s),\alpha_2(s),\beta(s))\equiv(s^2,s,-s^2).$$

La condición de transversalidad se verifica siempre que

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s)\\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s)\end{pmatrix}=s\,(18\,s^2+5\,s+1)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad s\neq 0.$$

El sistema característico a resolver es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcll} x' &=& -2\,x+y-z, & x(0)=s^2,\\ y' &=& -3\,y+9\,z, & y(0)=s,\\ z' &=& -3\,y+9\,z, & z(0)=-s^2, \end{array}\right.$$

y su solución viene dada por

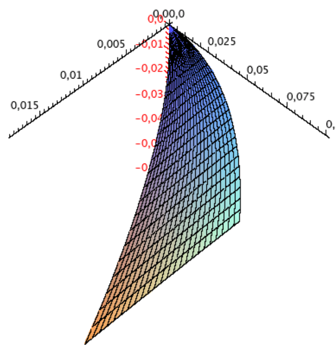

Figura 1.8: Solución del Ejercicio 2.2.1

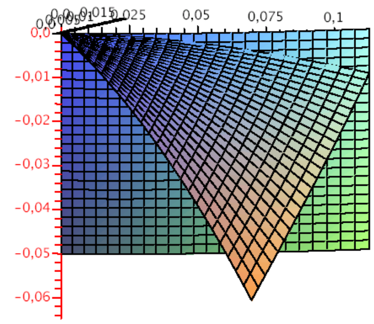

Figura 1.9: Condición inicial

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = e^{A\,t} \begin{pmatrix} s^2 \\ s \\ -s^2 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} x(t,s) &= \frac{1}{2}\left((s^2-s)\,e^{-2t}) + s + s^2\right), \\ y(t,s) &= \frac{1}{2}\left((3-e^{6\,t})\,s + 3(1-e^{6\,t})\,s^2\right), \\ z(t,s) &= \frac{1}{2}\left((1-e^{6\,t})\,s + (1-3\,e^{6\,t})\,s^2\right). \end{aligned}$$

La superficie solución se representa en las figuras 1.8 y 1.9. Nuevamente vemos que en el origen la superficie solución se reduce a un punto. □

En el último ejercicio de este apartado se presenta un ejemplo en el que el sistema característico no es lineal. A pesar de ello es posible obtener la solución explícita del mismo, si bien es necesario un análisis más sofisticado que el realizado en los ejercicios anteriores. Este problema pone de manifiesto la necesidad de desarrollar nuevos métodos de resolución de ecuaciones cuasilineales que permitan evitar el tener que resolver el sistema característico. Uno de estos métodos consistirá en la búsqueda de integrales primeras de la ecuación y se desarrollará en la siguiente sección.

Ejercicio 1.1.6 *Resolver*

$$(x\,y-u)\,u_x + (y^2-1)\,u_y = y\,u - x\,, \qquad u^2(x,0) = x^2-1.$$

Solución: En este caso, dado que si $x>0$,

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv (\cosh s, 0, \operatorname{senh} s)$$

es una parametrización de la hipérbola

$$\begin{cases} z^2 = x^2 - 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

la condición de transversalidad se verifica siempre que

$$\det \begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \operatorname{senh} s \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \neq 0.$$

El sistema característico viene dado por el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = x\,y - z\,, & x(0) = \cosh s, \\ y' = y^2 - 1\,, & y(0) = 0, \\ z' = y\,z - x\,, & z(0) = \operatorname{senh} s. \end{cases}$$

De la segunda ecuación deducimos:

$$t = \int_0^t 1\,ds = \int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s) - 1}\,ds = \int_0^{y(t)} \frac{dr}{r^2 - 1} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 - y(t)}{1 + y(t)}\right).$$

Por lo tanto, $y(t) = \dfrac{1 - e^{2\,t}}{1 + e^{2\,t}} = -\tanh t.$

Multiplicando las dos restantes ecuaciones por el factor integrante

$$e^{-\int_0^t y(s)\,ds} = \cosh t,$$

y denotando por $\bar{x}(t) = x(t)\,\cosh t$ y $\bar{z}(t) = z(t)\,\cosh t$, el sistema estudiado se transforma en:

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = -\bar{z}(t)\,, & \bar{x}(0) = \cosh s, \\ \bar{z}'(t) = -\bar{x}(t)\,, & \bar{z}(0) = \operatorname{senh} s. \end{cases}$$

Con lo cual

$$\bar{x}'' = -\bar{z}' = \bar{x}.$$

Por consiguiente

$$\bar{x}(t) = c_1(s)\,e^t + c_2(s)\,e^{-t}$$

y

$$\bar{z}(t) = -\bar{x}'(t) = -c_1(s)\,e^t + c_2(s)\,e^{-t}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcccl} \cosh s & = & \bar{x}(0) & = & c_1(s) + c_2(s), \\ \operatorname{senh} s & = & \bar{z}(0) & = & -c_1(s) + c_2(s). \end{array}$$

De este modo probamos que la solución del problema considerado viene dada en forma paramétrica por la siguiente expresión:

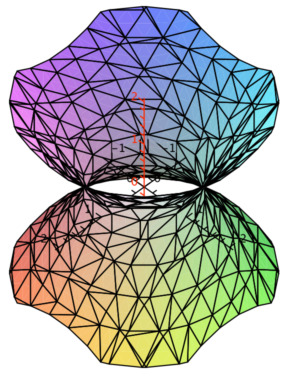

Figura 1.10: Solución del Ejercicio 1.1.6

$$
\begin{aligned}
x(t,s) &= \frac{\cosh(t-s)}{\cosh t},\\
y(t,s) &= -\tanh t,\\
z(t,s) &= -\frac{\operatorname{senh}(t-s)}{\cosh t}.
\end{aligned}
$$

Si $x<0$, la condición inicial viene parametrizada por

$$\gamma(s) = (-\cosh s, 0, \operatorname{senh} s).$$

Repitiendo los mismos argumentos que en el caso anterior, llegamos a que la solución en forma paramétrica se escribe del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
x(t,s) &= -\frac{\cosh(t+s)}{\cosh t},\\
y(t,s) &= -\tanh t,\\
z(t,s) &= \frac{\operatorname{senh}(t+s)}{\cosh t}.
\end{aligned}
$$

En ambos casos podemos obtener una expresión explícita de la solución. Realizaremos los cálculos para $x>0$, como veremos si x es negativo los razonamientos son análogos.

$$\begin{aligned}
-z^2(t,s)+x^2(t,s) &= \frac{\cosh^2(t-s)-\operatorname{senh}^2(t-s)}{\cosh^2 t}\\
&= \frac{1}{\cosh^2 t}\\
&= \frac{y^2(t,s)}{\operatorname{senh}^2 t}\\
&= \frac{y^2(t,s)}{-1+\cosh^2 t}\\
&= \frac{y^2(t,s)}{-1+\frac{1}{x^2(t,s)-z^2(t,s)}}.
\end{aligned}$$

Con lo cual, la solución viene dada en forma implícita por la expresión del hiperboloide parabólico de una hoja

$$x^2+y^2-z^2=1,$$

representado en la figura 1.10.

Nótese que en los puntos $(\pm 1,0,0)$ la curva inicial no es transversal al flujo, sin embargo existe solución pasando por ambos puntos. □

1.1.2. Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales:

1. $(9x-2y+3u)u_x+9(x+u)u_y=15x-6y+9u, \quad u(0,x)=0.$

   Solución: $\Gamma(t,s)=-e^{6\,t}\,s\left(2\,t\,(3\,t-1),(18\,t^2+6\,t-1),6\,t\,(t+1)\right).$

2. $(-2x+y-u)u_x+2(x-u)u_y=-5u, \quad u(0,-x)=-2.$

   Solución: $\Gamma(t,s)\equiv(x(t,s),y(t,s),z(t,s))$, con

$$\begin{aligned}
x(t,s) &= -e^{-t}\left(s+\frac{22}{17}\right)\operatorname{sen} t-\frac{14}{17}e^{-5\,t}+\frac{14}{17}\,e^{-t}\cos t,\\
y(t,s) &= -e^{-t}\,s\,(\cos t+\operatorname{sen} t)+\frac{8}{17}\left(e^{-5\,t}-\,e^{-t}\,\cos t\right)-\frac{36}{17}\,e^{-t}\,\operatorname{sen} t,\\
z(t,s) &= -2\,e^{-5\,t}.
\end{aligned}$$

3. $(-2\,x+y-u)u_x+(y+2\,u)\,u_y=-2\,u, \quad u(x^2,-x)=x^3-1.$

   Solución: $\Gamma(t,s)\equiv(x(t,s),y(t,s),z(t,s))$, con

$$\begin{aligned}
x(t,s) &= e^{-t}\,s^2-s\,\operatorname{senh} t+\frac{1}{3}\left(e^t-6\,e^{-t}+5\,e^{-2\,t}\right)(s^3-1)\\
y(t,s) &= -e^t s+\frac{2}{3}\left(e^t-e^{-2\,t}\right)(s^3-1)\\
z(t,s) &= e^{-2\,t}(s^3-1)
\end{aligned}$$

4. $(2x+3y)u_x+(-3x+2y)\,u_y=6\,u, \quad u(-x^2,x^2)=1.$

   Solución: $\Gamma(t,s)=e^{2\,t}\,\left(s^2\,\left(\operatorname{sen}3\,t-\cos 3\,t\right),s^2\,\left(\operatorname{sen}3\,t+\cos 3\,t\right),e^{4\,t}\right)$.

1.2. Método de las Integrales Primeras

Como ha quedado de manifiesto en el Ejercicio 1.1.6, si los sistemas característicos considerados son no lineales la resolución de los mismos puede ser muy complicada y, en general, prácticamente imposible de resolver explícitamente.

El método de las integrales primeras permite salvar el escollo de la resolución directa del sistema característico asociado. La dificultad consistirá en este caso en la propia búsqueda de las integrales primeras apropiadas.

A continuación presentamos varios problemas resueltos por esta técnica.

1.2.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.2.1 *Obtener la expresión de una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación*

$$x\,u_x-u_y=u.$$

Solución: La transformada de Jacobi viene dada en este caso por

$$x\,w_x-w_y+z\,w_z=0.$$

Consideramos los siguientes factores integrantes (para $x\neq 0$ y $z\neq 0$):

$$a_1=\frac{1}{x}, \qquad a_2=0, \qquad a_3=-\frac{1}{z}.$$

Buscamos $w:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una solución del sistema:

$$w_x=a_1, \quad w_y=a_2, \quad w_z=a_3. \tag{1.1}$$

Al ser $w_y=0$ obtenemos que $w=f(x,z)$. Por consiguiente $\frac{1}{x}=w_x=\frac{\partial f}{\partial x}$, de lo que deducimos que $f(x,z)=\log|x|+g(z)$. Finalmente, al ser $-\frac{1}{z}=w_z=g'(z)$, deducimos que $g(z)=-\log|z|$, con lo cual

$$w(x,y,z)=\log\left|\frac{x}{z}\right|.$$

La solución $u:V\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ viene dada implícitamente por la expresión $w=K\in\mathbb{R}$, es decir

$$K=\log\left|\frac{x}{u(x,y)}\right|$$

o, lo que es lo mismo,

$$u_c(x,y)=c\,x, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

□

Nota 1.2.1 *Fijémonos en que*

$$a_1 = z, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -x,$$

son factores integrantes de la ecuación anterior. Sin embargo no existe ninguna integral primera que resuelva el sistema (1.1) con estos factores.

Para comprobarlo, es suficiente tener en cuenta que, al igual que en la elección anterior, $w = f(x,z)$*. Por lo tanto* $z = w_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ *implica que* $f(x,z) = z\,x + g(z)$*, lo cual, junto con la igualdad* $-x = w_z$*, nos lleva a la siguiente contradicción*

$$g'(z) = -2\,x.$$

Este hecho pone de manifiesto que para cada elección de factores integrantes no está garantizada la existencia de una integral primera asociada y, como consecuencia, no es posible obtener una familia de soluciones de la ecuación considerada.

Ejercicio 1.2.2 *Obtener la expresión de una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación*

$$u_x + u\,u_y = x + u.$$

Solución: La transformada de Jacobi es, en este caso,

$$w_x + z\,w_y + (x+z)\,w_z = 0.$$

Los factores integrantes elegidos son

$$a_1 = x, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = -1.$$

Así pues la solución del sistema asociado (1.1) se obtiene del siguiente modo:

Al ser $-1 = w_z$ tenemos que $w = -z + f(x,y)$. Del hecho de que $1 = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ deducimos que $f(x,y) = y + g(x)$. La última ecuación $x = w_x = g'(x)$ nos dice que

$$w(x,y,z) = -z + y + \frac{x^2}{2}$$

es la integral primera buscada.

Por lo tanto

$$u_K(x,y) = y + \frac{x^2}{2} + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

es una familia uniparamétrica de soluciones del problema considerado. □

Ejercicio 1.2.3 *Obtener la expresión de una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación*

$$(x\,y - u^2)\,u_x + x\,u_y = u.$$

Solución: La transformada de Jacobi es igual a

$$(x\,y - z^2)\,w_x + x\,w_y + z\,w_z = 0.$$

Tomemos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -y, \qquad a_3 = z.$$

La solución del sistema (1.1) se obtiene, en este caso, del siguiente modo:

Dado que $w_x = 1$ sabemos que $w = x + f(y,z)$. Por otro lado, de la igualdad $-y = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ deducimos que $f(y,z) = -\frac{y^2}{2} + g(z)$. Finalmente, del hecho de que $z = w_z$, llegamos a que la integral primera buscada viene dada por la siguiente expresión:

$$w(x,y,z) = x - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}.$$

Por consiguiente, para $K \in \mathbb{R}$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en dominios convenientes,

$$u_K(x,y) = \sqrt{-2\,x + y^2 + K}$$

es una familia uniparamétrica de soluciones del problema dado. □

Ejercicio 1.2.4 *Obtener la expresión de una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación*

$$\operatorname{sen} x\,u_x + (x^3 - y)\,u_y = \operatorname{sen} 2\,x.$$

Solución: La transformada de Jacobi es igual a

$$\operatorname{sen} x\;w_x + (x^3 - y)\,w_y + \operatorname{sen} 2\,x\;w_z = 0.$$

Tomando los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = -2\,\cos x, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = 1,$$

la solución del sistema (1.1) se obtiene como sigue:

Al ser $-2\,\cos x = w_x$, deducimos que $w = -2\,\operatorname{sen} x + f(y,z)$. De la segunda igualdad obtenemos $f(y,z) = g(z)$. Como consecuencia de la expresión $1 = w_z = g'(z)$ concluimos que

$$w(x,y,z) = z - 2\,\operatorname{sen} x.$$

Así

$$u_K(x,y) = 2\,\operatorname{sen} x + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

es una de las familias buscadas. □

Ejercicio 1.2.5 *Calcular la única solución de la siguiente ecuación:*

$$x\,(u^2 - y^2)\,u_x + y\,(x^2 - u^2)\,u_y = u\,(y^2 - x^2), \qquad u(x,x) = \frac{1}{x^2},\; x > 1.$$

Solución: En este caso los datos del problema son

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x\,(z^2-y^2), \\ f_2(x,y,z) &= y\,(x^2-z^2), \\ f(x,y,z) &= z\,(y^2-x^2) \end{aligned}$$

y

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = \left(s, s, \frac{1}{s^2}\right).$$

Dado que

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s\,\left(\frac{1}{s^4}-s^2\right) & 1 \\ -s\,\left(\frac{1}{s^4}-s^2\right) & 1 \end{pmatrix} = 2\,s\,\left(\frac{1}{s^4}-s^2\right),$$

tenemos que la condición inicial es transversal al flujo siempre que $s \neq 0, \pm 1$, con lo cual este problema tiene solución única.

La transformada de Jacobi será

$$x\,(z^2-y^2)\,w_x + y\,(x^2-z^2)\,w_y + z\,(y^2-x^2)w_z = 0.$$

En un primer momento elegimos los siguientes factores integrantes

$$a_1 = x, \qquad a_2 = y, \qquad a_3 = z.$$

La integral primera asociada a estos valores se obtiene teniendo en cuenta que $x = w_x$, con lo cual $w = \frac{x^2}{2} + f(y,z)$ y, como consecuencia, la igualdad $y = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}(y,z)$ implica que $f(y,z) = \frac{y^2}{2} + g(z)$. Finalmente, $z = w_z = g'(z)$ implica que

$$w(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

es una integral primera de esta ecuación.

Dado que

$$w(\gamma(s)) = s^2 + \frac{1}{2\,s^4}$$

no es una función constante, debemos encontrar una segunda integral primera funcionalmente independiente de ésta. Para ello consideramos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = \frac{1}{x}, \qquad a_2 = \frac{1}{y}, \qquad a_3 = \frac{1}{z}.$$

La solución del sistema (1.1) se obtiene para estos valores del siguiente modo:

Al ser $\frac{1}{x} = w_x$, deducimos que $w = \log|x| + f(y,z)$. De la segunda igualdad obtenemos que $f(y,z) = \log|y| + g(z)$. De la última expresión concluimos que

$$w(x,y,z) = \log(|x\,y\,z|).$$

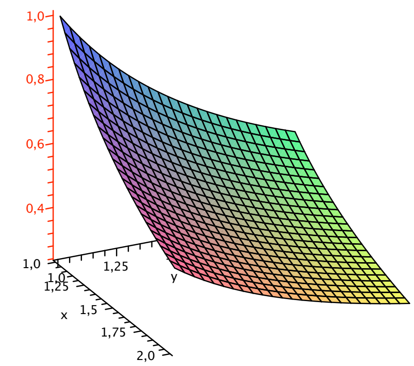

Figura 1.11: Solución del Ejercicio 1.2.5

Ahora bien, dado que

$$w(\gamma(s)) = \log 1 = 0,$$

la función definida implícitamente al igualar esta segunda función a cero nos da la solución buscada, es decir:

$$u(x,y) = \frac{1}{x\,y},$$

representada en la figura 1.11. □

Ejercicio 1.2.6 *Calcular la única solución de la siguiente ecuación:*

$$(y-u)\,u_x + (x-y)\,u_y = u - x\,, \qquad u(1,y) = 1,\; y<0.$$

Solución: En este caso los datos del problema son

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= y - z, \\ f_2(x,y,z) &= x - y, \\ f(x,y,z) &= z - x \end{aligned}$$

y

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (1, s, 1)\,.$$

Dado que

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 1-s & 1 \end{pmatrix} = s - 1,$$

tenemos que la condición inicial es transversal al flujo cuando $s \neq 1$, con lo cual este problema tiene solución única.

En este caso la transformada de Jacobi viene dada por la siguiente expresión:

$$(y-z)\,w_x+(x-y)\,w_y+(z-x)\,w_z=0.$$

En primer lugar consideramos los factores integrantes

$$a_1=a_2=a_3=1.$$

Evidentemente $w=z+f(x,y)$. Del hecho de que $1=w_y=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, se deduce que $f(x,y)=y+g(x)$, con lo cual $1=w_x=g'(x)$. De este modo, probamos que

$$w_1(x,y,z)=x+y+z$$

es una integral primera de la ecuación.

En este caso, al no ser $w_1(\gamma(s))$ una función constante, necesitamos encontrar unha segunda integral primera funcionalmente independente de w_1.

Probemos ahora con los factores integrantes

$$a_1=x,\ a_2=z,\ a_3=y.$$

La integral primera asociada a estos factores viene dada al resolver el sistema (1.1) como sigue:

Dado que $x=w_x$, deducimos que $w=\frac{x^2}{2}+f(y,z)$, con lo cual $z=w_y=\frac{\partial f}{\partial y}(y,z)$. Así pues, $f(y,z)=z\,y+g(z)$. Del hecho de que $y=w_z=y+g'(z)$ se deduce que

$$w_2(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+z\,y$$

es la integral primera buscada.

Al igual que en el caso anterior, $w_2(\gamma(s))$ no es una función constante, por lo tanto la solución buscada no está definida implícitamente al igualar w_2 a una constante.

Por otro lado, dado que

$$\operatorname{rango}\left(\frac{\partial(w_1,w_2)}{\partial(x,y,z)}\right)=\operatorname{rango}\begin{pmatrix}1&1&1\\x&y&z\end{pmatrix}=1\qquad\Leftrightarrow\qquad x=y=z,$$

sabemos que en los puntos exteriores a la recta $x=y=z$ las integrales primeras w_1 y w_2 son funcionalmente independientes. En nuestro caso, para $y<0$ estamos fuera de esa recta. Por consiguiente toda solución de la ecuación de Jacobi, será una combinación funcional de w_1 y w_2:

$$w(x,y,z)=Z(w_1(x,y,z),w_2(x,y,z)).$$

Para calcular la expresión de la función Z es suficiente tener en cuenta que

$$w_1(\gamma(s))-w_2(\gamma(s))=\frac{3}{2}.$$

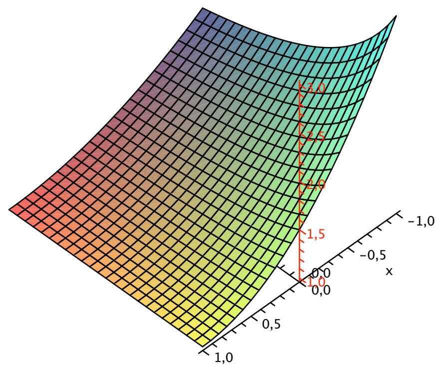

Figura 1.12: Solución del Ejercicio 1.2.6

De este modo, definiendo

$$Z(p,q) = p - q - \frac{3}{2},$$

llegamos a que

$$w(x,y,z) = w_1(x,y,z) - w_2(x,y,z) - \frac{3}{2} = x + y + z - \frac{x^2}{2} - z\,y - \frac{3}{2},$$

es la única solución de la ecuación de Jacobi que se anula a lo largo de la curva γ.

Dado que $w_z = 1 - y \neq 0$ siempre que $y \neq 1$, sabemos que esta función define implícitamente la única solución del problema, la cual viene dada por la siguiente expresión (ver figura 1.12):

$$u(x,y) = \frac{2\,x + 2\,y - x^2 - 3}{2\,y - 2}.$$

□

Ejercicio 1.2.7 *Calcular la única solución de la siguiente ecuación:*

$$x^2\,u_x + y^2\,u_y - u^2 = 0, \qquad u(x, 2\,x) = 1,\ x > 0.$$

Solución: En este caso los datos del problema vienen dados por

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x^2, \\ f_2(x,y,z) &= y^2, \\ f(x,y,z) &= -z^2 \end{aligned}$$

y

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s, 2\,s, 1).$$

Dado que

$$\det \begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} s^2 & 1 \\ 4\,s^2 & 2 \end{pmatrix} = -2\,s^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \neq 0,$$

tenemos que la condición inicial es transversal al flujo, con lo cual este problema tiene solución única.

La transformada de Jacobi viene dada por la siguiente expresión:

$$x^2\,w_x + y^2\,w_y + z^2\,w_z = 0.$$

La primera elección de factores integrantes es

$$a_1 = \frac{1}{x^2}, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\frac{1}{z^2}.$$

La solución del sistema (1.1) se obtiene del siguiente modo:

Al ser $\frac{1}{x^2} = w_x$, tenemos que $w = -\frac{1}{x} + f(y,z)$. De la ecuación $0 = w_y$ deducimos que $f(y,z) = g(z)$. Finalmente $-\frac{1}{z^2} = w_z$ implica que $g(z) = \frac{1}{z}$, con lo cual tenemos la integral primera

$$w_1(x,y,z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

Dado que $w_1(\gamma(s))$ no es constante debemos encontrar otra integral primera funcionalmente independiente de w_1. Para ello tomamos

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = \frac{1}{y^2}, \qquad a_3 = -\frac{1}{z^2}.$$

Con lo cual, dado que $0 = w_x$, sabemos que $w = f(y,z)$. De la segunda igualdad $\frac{1}{y^2} = w_y$, deducimos que $f(y,z) = -\frac{1}{y} + g(z)$. Con lo cual, al ser $-\frac{1}{z^2} = w_z$, obtenemos la segunda integral primera

$$w_2(x,y,z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}.$$

Claramente w_2 no es constante a lo largo de la curva inicial γ, por lo tanto debemos encontrar la solución general de la ecuación de Jacobi. Para ello, dado que

$$\operatorname{rango}\left(\frac{\partial(w_1,w_2)}{\partial(x,y,z)}\right) = \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{siempre que} \qquad x\,y\,z \neq 0,$$

la solución general viene dada por una combinación funcional de ambas funciones.

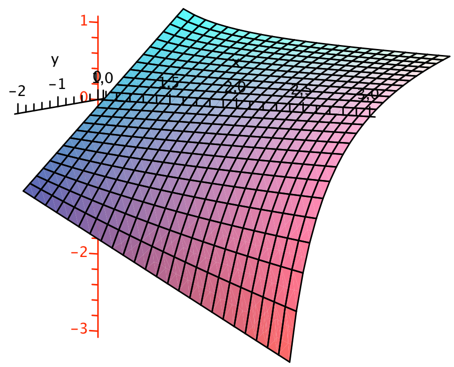

Figura 1.13: Solución del Ejercicio 1.3.7

La solución única vendrá dada por la que sea constante a lo largo de la curva inicial. Así pues, dado que

$$w_1(\gamma(s)) - 2\,w_2(\gamma(s)) = -1,$$

obtenemos que la solución de la ecuación de Jacobi viene dada por

$$w(x,y,z) = w_1(x,y,z) - 2\,w_2(x,y,z) + 1 = -\frac{1}{z} - \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + 1,$$

de la que deducimos la expresión de la solución del problema considerado como

$$u(x,y) = \frac{x\,y}{x\,y - y + 2\,x},$$

y que se representa en la figura 1.13. □

Ejercicio 1.2.8 *Calcular la única solución de la siguiente ecuación:*

$$y\,z\,u_x + z\,x\,u_y + x\,y\,u_z = -x\,y\,z, \qquad u(x,y,0) = y^2 - \frac{x^2}{2},\ x > 0,\ y > 0.$$

Solución: En este caso debemos encontrar una función

$$u : D \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x > 0,\ y > 0\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

siendo D un entorno del plano $z = 0$.

Los datos del problema vienen dados por

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z,p) &= y\,z,\\
f_2(x,y,z,p) &= x\,z,\\
f_3(x,y,z,p) &= x\,y,\\
f(x,y,z,p) &= -x\,y\,z
\end{aligned}$$

y

$$\gamma(s_1,s_2) \equiv (\alpha_1(s_1,s_2),\alpha_2(s_1,s_2),\alpha_3(s_1,s_2),\beta(s_1,s_2)) = \left(s_1, s_2, 0, s_2^2 - \frac{s_1^2}{2}\right).$$

Dado que

$$\det \begin{pmatrix} f_1(\gamma(s_1,s_2)) & \dfrac{\partial\,\alpha_1}{\partial s_1}(s_1,s_2) & \dfrac{\partial\,\alpha_1}{\partial s_2}(s_1,s_2) \\ f_2(\gamma(s_1,s_2)) & \dfrac{\partial\,\alpha_2}{\partial s_1}(s_1,s_2) & \dfrac{\partial\,\alpha_2}{\partial s_2}(s_1,s_2) \\ f_3(\gamma(s_1,s_2)) & \dfrac{\partial\,\alpha_3}{\partial s_1}(s_1,s_2) & \dfrac{\partial\,\alpha_3}{\partial s_2}(s_1,s_2) \end{pmatrix} = s_1\, s_2,$$

la superficie es transversal al flujo siempre que $x\,y \neq 0$, con lo cual este problema tiene solución única.

La Transformada de Jacobi sigue la expresión

$$y\,z\,w_x + z\,x\,w_y + x\,y\,w_z - x\,y\,z\,w_p = 0.$$

Buscamos una función $w : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ que resuelva la ecuación anterior y que se anule a lo largo de la condición inicial γ. Para ello debemos encontrar la solución general de la ecuación. Ésta vendrá dada como combinación funcional de tres integrales primeras funcionalmente independientes.

En un primer momento elegimos los factores integrantes

$$a_1 = x, \qquad a_2 = -y, \qquad a_3 = z, \qquad a_4 = 1.$$

Para calcular, si existe, la integral primera asociada, debemos resolver el sistema

$$w_x = a_1, \quad w_y = a_2, \quad w_z = a_3, \quad w_p = a_4. \tag{1.2}$$

Para ello, de la expresión $w_x = x$ deducimos que $w = \frac{x^2}{2} + f(y,z,p)$. Dado que $-y = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}(y,z,p)$, sabemos que $f(y,z,p) = -\frac{y^2}{2} + g(z,p)$. La tercera igualdad nos dice que $g(z,p) = \frac{z^2}{2} + h(p)$. Por último, al ser $1 = w_p = h'(p)$, obtenemos la expresión de una integral primera como

$$w_1(x,y,z,p) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + p.$$

Debido a que $w_1(\gamma(s_1,s_2)) = \dfrac{s_2^2}{2}$ no es una función constante, debemos encontrar una segunda solución de la ecuación de Jacobi. En este caso probamos con los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = -x, \qquad a_2 = y, \qquad a_3 = z, \qquad a_4 = 1.$$

Procediendo como en el caso anterior, llegamos a que

$$w_2(x,y,z,p) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + p$$

es una integral primera de la ecuación de Jacobi.

Al igual que w_1, tenemos que $w_2(\gamma(s_1, s_2)) = -s_1^2 + \frac{3}{2}\, s_2^2$ no es una función constante y, por consiguiente, necesitamos una tercera solución de la ecuación de Jacobi. Para ello tomamos como factores integrantes

$$a_1 = x, \qquad a_2 = y, \qquad a_3 = -z, \qquad a_4 = 1.$$

La solución del sistema (1.2) viene dada por

$$w_3(x, y, z, p) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} + p,$$

que tampoco es constante a lo largo de γ.

Teniendo en cuenta que

$$\text{rango}\left(\frac{\partial(w_1, w_2, w_3)}{\partial(x, y, z, p)}\right) = \text{rango}\begin{pmatrix} x & -y & z & 1 \\ -x & y & z & 1 \\ x & y & -z & 1 \end{pmatrix} = 3$$

siempre que $x > 0$ e $y > 0$.

La solución general de la ecuación de Jacobi será

$$w(x, y, z, p) = Z(w_1(x, y, z, p), w_2(x, y, z, p), w_3(x, y, z, p)),$$

siendo $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$.

No es difícil verificar que la única solución de la ecuación de Jacobi que se anula en γ se obtiene definiendo

$$Z(a, b, c) \equiv c - 3\, a,$$

es decir

$$w(x, y, z, p) = -x^2 + 2\, y^2 - 2\, z^2 - 2\, p.$$

Dado que $w_p \neq 0$, al igualar esta expresión a cero obtenemos la expresión de la solución buscada:

$$u(x, y, z) = \frac{-x^2 + 2\, y^2 - 2\, z^2}{2}.$$

□

1.2.2. Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales:

1. $y\, u_x - x\, u_y = 0, \quad u(x, x) = x^2.$

   Solución: $u(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}.$

2. $\operatorname{sen} y\, u_x + 2 \operatorname{sen} x\, u_y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad u(0,y) = \cos y.$

   Solución: $u(x,y) = -3 \cos x + \cos y + 3.$

3. $\cos^2\!\left(\dfrac{y}{2}\right) u_x + u_y = \cos y, \quad u(x,x) = x.$

   Solución: $u(x,y) = 2\,x - y.$

4. $(e^u + \cos u)\ u_x + (-e^u + \cos u)\, u_y = e^u \cos u, \quad u(x,x) = -\log|x|, \quad x < 0,\ y < 0.$

   Solución: $u(x,y) = \log\left(\dfrac{2}{|x+y|}\right).$

1.3. Ecuaciones de Primer Orden No Lineales

Si la ecuación de primer orden no es cuasilineal no tenemos garantizada la unicidad de solución. Por supuesto las técnicas que han resultado tan útiles en las dos secciones anteriores no pueden ser ahora aplicadas con lo cual debemos usar la herramienta desarrollada por Monge y la construcción del cono que lleva su nombre.

En lo que sigue se resuelven problemas no lineales con esta técnica.

1.3.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.3.1 *Obtener la expresión de todas las soluciones del siguiente problema*

$$\begin{cases} u_x^2 - u_y^2 = 1, \\ \\ u(x,0) = 1. \end{cases}$$

Solución: La función que define la ecuación es, en este caso

$$F(x,y,z,p,q) = p^2 - q^2 - 1.$$

La condición inicial viene parametrizada por la expresión

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s, 0, 1).$$

El sistema característico viene dado por la siguiente expresión

$$\begin{cases} x' = F_p = 2\,p, & x(0) = \alpha_1(s) = s, \\ y' = F_q = 2\,q, & y(0) = \alpha_2(s) = 0, \\ z' = p\,F_p + q\,F_q = 2\,p^2 - 2\,q^2, & z(0) = \beta(s) = 1, \\ p' = -F_x - p\,F_z = 0, & p(0) = p_0(s), \\ q' = -F_y - q\,F_z = 0, & q(0) = q_0(s), \end{cases}$$

junto con la condición adicional

$$F(x(t,s), y(t,s), z(t,s), p(t,s), q(t,s)) = 0 = p^2(t,s) - q^2(t,s) - 1.$$

Para la elección de $p_0(s)$ y $q_0(s)$ necesitamos completar la curva dato a una banda inicial. Para ello se debe verificar en un primer momento la condición de banda

$$p_0(s)\,\alpha_1'(s) + q_0(s)\,\alpha_2'(s) = \beta'(s),$$

la cual, obviamente, se reescribe como $p_0(s) = 0$.

Por lo tanto, la condición de compatibilidad se reduce a

$$q_0^2(s) = -1,$$

lo cual es imposible.

Por consiguiente esta curva nunca puede completarse a una banda y, como consecuencia, el problema no tiene ninguna solución. □

Ejercicio 1.3.2 *Obtener todas las soluciones del siguiente problema*

$$\begin{cases} u_x^2 - u_y^2 - 2\,u = 0, \\ \\ u(0,y) = (1+y)^2. \end{cases}$$

Solución: En este caso la función que define la ecuación viene dada por la expresión

$$F(x,y,z,p,q) = p^2 - q^2 - 2\,z.$$

La curva inicial está parametrizada por

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (0, s, (1+s)^2).$$

El sistema característico será:

$$\begin{cases} x' = 2\,p, & x(0) = 0, \\ y' = -2\,q, & y(0) = s, \\ z' = 2\,p^2 - 2\,q^2, & z(0) = (1+s)^2, \\ p' = 2\,p, & p(0) = p_0(s), \\ q' = 2\,q, & q(0) = q_0(s). \end{cases} \tag{1.3}$$

La condición de compatibilidad resulta ser

$$p^2(t,s) - q^2(t,s) = 2\,z(t,s). \tag{1.4}$$

La condición de banda nos dice que

$$q_0(s) = 2\,(1+s).$$

Por consiguiente, será compatible si y sólo si

$$p_0(s) = \pm\sqrt{6}\,(1+s).$$

Así pues tenemos únicamente dos bandas iniciales compatibles con el problema considerado. Veamos si cada una de ellas nos da lugar a una solución. Para ello las bandas deben ser transversales al flujo. Ésto ocurre si y sólo si

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2\,p_0(s) & 0 \\ -2\,q_0(s) & 1 \end{pmatrix} = 2\,p_0(s) = \pm 2\sqrt{6}\,(1+s).$$

Con lo cual ambas bandas son transversales siempre que $s \neq -1$ o, lo que es lo mismo, la curva no pase por el punto $(0,-1,0)$.

Para obtener la expresión de las soluciones debemos resolver los correspondientes sistemas asociados.

Tratemos en un primer momento el caso

$$p_0(s) = \sqrt{6}\,(1+s).$$

De la igualdad (1.4) y denotando por

$$R(t,s) = \begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \\ p(t,s) \\ q(t,s) \end{pmatrix}$$

deducimos que el sistema (1.3) es equivalente al siguiente problema lineal de valor inicial

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t,s) = B\,R(t,s) + b(t,s), \quad R(0,s) = C(s). \tag{1.5}$$

Siendo, en este caso,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b(t,s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ (1+s)^2 \\ \sqrt{6}\,(1+s) \\ 2\,(1+s) \end{pmatrix}.$$

Dado que la única solución del problema (1.5) viene dada por la fórmula de Lagrange:

$$R(t,s) = e^{B\,t}\,C(s) + \int_0^t e^{B\,(t-r)}\,b(r,s)\,dr, \tag{1.6}$$

obtenemos que la única solución de (1.3) viene dada por

$$x(t,s) = \sqrt{6}\,(1+s)\,(e^{2\,t}-1),$$

$$y(t,s) = s - 2\,(1+s)\,(e^{2\,t}-1),$$

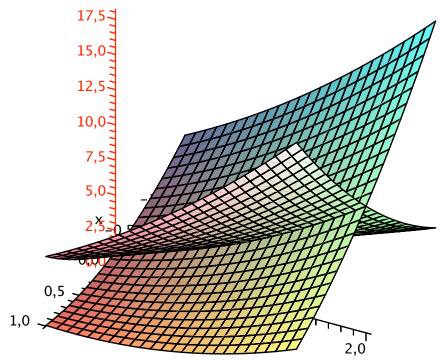

Figura 1.14: Solución del Ejercicio 1.3.1

$$z(t,s) = (1+s)^2\, e^{4\,t},$$

$$p(t,s) = \sqrt{6}\,(1+s)\, e^{2\,t}$$

y

$$q(t,s) = 2\,(1+s)\, e^{2\,t}.$$

Así pues, la superficie solución viene dada, en forma paramétrica, por:

$$\Gamma(t,s) = \left(\sqrt{6}\,(1+s)\,(e^{2\,t}-1), s - 2\,(1+s)\,(e^{2\,t}-1), (1+s)^2\, e^{4\,t}\right).$$

Para obtener la expresión de la solución en coordenadas cartesianas, es suficiente tener en cuenta que

$$s = \frac{2}{\sqrt{6}}\, x + y,$$

y

$$e^{2\,t} = \frac{x}{\sqrt{6}\,(1+s)} + 1.$$

De este modo, llegamos a

$$u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y)) = \frac{(\sqrt{6}\,(1+y) + 3\,x)^2}{6}.$$

La segunda solución se obtiene al considerar $p_0(s) = -\sqrt{6}\,(1+s)$ en el sistema característico.

Siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior, deducimos que la superficie solución viene parametrizada por la expresión

$$\Gamma(t,s) = \left(-\sqrt{6}\,(1+s)\,(e^{2\,t}-1), s-2\,(1+s)\,(e^{2\,t}-1), (1+s)^2\,e^{4\,t}\right).$$

De donde se deduce que

$$u(x,y) = \frac{(\sqrt{6}\,(1+y)-3\,x)^2}{6}.$$

Ambas soluciones se representan en la Figura 1.14. En la que se puede observar como ambas funciones y sus derivadas parciales respecto de x coinciden a lo largo de la condición inicial. Además los valores de las respectivas derivadas respecto de y a lo largo de la curva son opuestos. □

Nota 1.3.1 *Dado que las tres últimas ecuaciones del sistema (1.3) sólo interviene una variable, es posible resolverlas directamente por la fórmula de Lagrange unidimensional (1.6). Claramente, una vez que se obtiene la expresión de p y q, es inmediato calcular x e y sin más que integrar.*

Nota 1.3.2 *El problema anterior, al igual que todos aquellos en los que el sistema característico es un sistema lineal, puede programarse en programas de cálculo simbólico. A continuación se presentan los comandos correspondientes al lenguaje MAPLE que resolverían este ejercicio:*
with(linalg):

with(Student[VectorCalculus]):

B := array([[0,0,0,2,0],[0,0,0,0,-2],[0,0,4,0,0],[0,0,0,2,0],[0,0,0,0,2]]);

DD:=exponential(B, t);

CC:=exponential(B, t-r);

C0 := vector($[0, s, (1+s)^2, sqrt(6)*(1+s), 2+2*s]$**)**

BB := vector([0, 0, 2, 0, 0])

SS := multiply(DD, C0);

RR := multiply(CC, BB);

TT := int(<RR>, r = 0 .. t);

LL := <SS>+TT;

Ejercicio 1.3.3 *Resolver el siguiente problema*

$$\left\{\begin{array}{l} x\,u_x + y\,u_y + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) - u = 0, \\ \\ u(x,0) = \dfrac{1-x^2}{2}. \end{array}\right.$$

Solución: En este caso

$$F(x,y,z,p,q) = x\,p + y\,q + \frac{1}{2}(p^2+q^2) - z,$$

y

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s, 0, \frac{1-s^2}{2}), \qquad s \in \mathbb{R},$$

son los datos del problema considerado.

El sistema característico a considerar será, en este caso

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = x + p, & x(0) = s \\ y' = y + q, & y(0) = 0 \\ z' = p\,x + q\,y + p^2 + q^2, & z(0) = \frac{1}{2}\,(1-s^2), \\ p' = 0, & p(0) = p_0(s), \\ q' = 0, & q(0) = q_0(s), \end{array}\right. \tag{1.7}$$

conjuntamente con la ecuación adicional

$$x(t,s)\,p(t,s) + y(t,s)\,q(t,s) + \frac{1}{2}\,(p^2(t,s) + q^2(t,s)) = z(t,s). \tag{1.8}$$

La condición de banda se verifica si y sólo si

$$p_0(s) = -s.$$

Con lo cual la condición de compatibilidad es equivalente a que $q_0(s) = \pm 1$.

La condición de transversalidad se verifica siempre que

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_0(s) & 0 \end{pmatrix} = -\,q_0(s).$$

Por consiguiente el problema considerado tiene dos soluciones. Cada una de ellas se obtiene resolviendo el sistema (1.7) junto con la ecuación (1.8) para cada banda inicial correspondiente.

Es evidente que la solución asociada al valor $q_0(s) = 1$ verifica que

$$p(t,s) = -s$$

y

$$q(t,s) = 1.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la igualdad (1.8), para obtener el valor de las restantes variables es suficiente con usar la expresión (1.6) para el caso tridimensional en el que

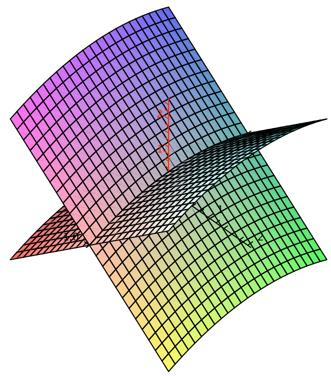

Figura 1.15: Solución del Ejercicio 1.3.3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b(t,s) = \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ \dfrac{1+s^2}{2} \end{pmatrix}, \qquad C(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \dfrac{1-s^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, obtenemos que

$$x(t,s) = s,$$

$$y(t,s) = e^t - 1,$$

y

$$z(t,s) = e^t - \frac{(1+s^2)}{2}.$$

La superficie parametrizada viene dada por la expresión

$$\Gamma(t,s) = \left(s, e^t - 1, e^t - \frac{1+s^2}{2} \right),$$

con lo cual, la solución en coordenadas cartesianas es igual a

$$u(x,y) = \frac{1-x^2}{2} + y.$$

Cuando $q_0(s) = -1$, haciendo los mismos razonamientos que en el caso anterior, obtenemos que la superficie solución viene parametrizada por la expresión

$$\Gamma(t,s) = \left(s, 1 - e^t, e^t - \frac{1+s^2}{2} \right),$$

de donde deducimos que

$$u(x,y) = \frac{1-x^2}{2} - y$$

es la segunda solución del problema considerado. Ambas soluciones se representan en la Figura 1.15. $\square$

Ejercicio 1.3.4 *Calcular la expresión de todas las soluciones del siguiente problema*

$$\begin{cases} x\,u_x - 2\,y\,u_y + u_x^2 - u_y^2 + 2\,u = 0, \\ \\ u(x,0) = 1\,-\,x^2. \end{cases}$$

Solución: La función que define la ecuación viene dada por

$$F(x,y,z,p,q) = x\,p - 2\,y\,q + p^2 - q^2 + 2\,z.$$

La curva inicial se parametriza del siguiente modo

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s, 0, 1-s^2).$$

Por consiguiente debemos resolver las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x + 2\,p, & x(0) = s, \\ y' = -2\,y - 2\,q, & y(0) = 0, \\ z' = p\,x + 2\,p^2 - 2\,y\,q - 2\,q^2, & z(0) = 1 - s^2, \\ p' = -3\,p, & p(0) = p_0(s), \\ q' = 0, & q(0) = q_0(s), \end{cases} \tag{1.9}$$

conjuntamente con la ecuación de compatibilidad

$$x(t,s)\,p(t,s) - 2\,y(t,s)\,q(t,s) + p^2(t,s) - q^2(t,s) + 2\,z(t,s) = 0. \tag{1.10}$$

En este caso p_0 y q_0 deben verificar las siguientes propiedades:

(i) Condición de banda inicial:

$$p_0(s)\,\alpha_1'(s) + q_0(s)\,\alpha_2'(s) = \beta'(s) \quad \Leftrightarrow \quad p_0(s) = -2\,s.$$

(ii) Condición de compatibilidad:

$$F(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s), p_0(s), q_0(s)) = 0 \Leftrightarrow s\,p_0(s) + p_0^2(s) - q_0^2(s) = 2(s^2-1).$$

(iii) Condición de transversalidad:

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s + 2\,p_0(s) & 1 \\ -2\,q_0(s) & 0 \end{pmatrix} = 2\,q_0(s).$$

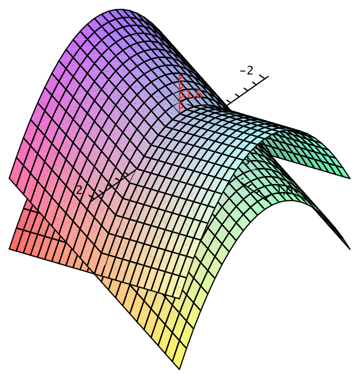

Figura 1.16: Solución del Ejercicio 1.3.4

Por lo tanto sabemos que este problema tiene exactamente dos soluciones que vienen dadas para los siguientes valores:

$$p_0(s) = -2\,s, \qquad q_0(s) = \pm\sqrt{2}.$$

Calculemos, en un primer momento, la solución asociada al valor $q_0(s) = \sqrt{2}$. De las dos últimas ecuaciones del sistema (1.9) obtenemos de inmediato que

$$q(t,s) = \sqrt{2},$$

y

$$p(t,s) = -2\,s\,e^{-3\,t}.$$

Por consiguiente, sin más que tener en cuenta la ecuación (1.10), las restantes variables se calculan como la solución del problema (1.5) para el caso particular de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b(t,s) = \begin{pmatrix} -4\,s\,e^{-3\,t} \\ -2\sqrt{2} \\ 4\,s^2\,e^{-6\,t} - 2 \end{pmatrix}, \qquad C(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 1 - s^2 \end{pmatrix}.$$

Así pues obtenemos que

$$x(t,s) = s\,e^{-3t},$$
$$y(t,s) = \sqrt{2}\,(e^{-2\,t} - 1)$$

y

$$z(t) = -s^2\,e^{-6\,t} - 1 + 2\,e^{-2\,t}.$$

Por lo tanto la superficie solución está parametrizada por la expresión

$$\Gamma(t,s) = \left(s\,e^{-3\,t}, \sqrt{2}\,(e^{-2\,t} - 1), -s^2\,e^{6\,t} - 1 + 2\,e^{-2\,t}, -2\,s\,e^{-3\,t}, \sqrt{2}\right).$$

De las expresiones de x e y no es difícil comprobar que

$$u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y)) = -x^2 + 1 + \sqrt{2}\, y.$$

Cuando $q_0(s) = -\sqrt{2}$, haciendo similares argumentaciones obtenemos que

$$u(x,y) = -x^2 + 1 - \sqrt{2}\, y,$$

Es la segunda solución buscada (ver Figura 1.16). $\square$

Ejercicio 1.3.5 *Obtener la expresión de todas las soluciones del siguiente problema*

$$\begin{cases} -x\, u_x - y\, u_y + \frac{1}{2}(u_x^2 - u_y^2) + u = 0, \\ \\ u(x,0) = \dfrac{1}{2}\,(x^2+1). \end{cases}$$

Solución: En este caso la ecuación viene definida por la función

$$F(x,y,z,p,q) = -x\,p - y\,q + \frac{1}{2}(p^2 - q^2) + z$$

y la condición inicial

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s, 0, \frac{1}{2}(s^2+1)).$$

Se comprueba con facilidad que las condiciones de banda y compatibilidad se verifican siempre que

$$p_0(s) = s \qquad \text{y} \qquad q_0(s) = \pm 1.$$

Dado que la condición de transversalidad se satisface siempre que

$$\det \begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q_0 & 0 \end{pmatrix} = q_0 \neq 0,$$

deducimos que este problema tiene únicamente dos soluciones. Éstas vendrán dadas al resolver los sistemas característicos asociados a cada banda inicial, los cuales siguen la siguiente expresión:

$$\begin{cases} x' = -x + p, & x(0) = s \\ y' = -y - q, & y(0) = 0 \\ z' = -x\,p + p^2 - y\,q - q^2, & z(0) = \dfrac{1}{2}(1+s^2), \\ p' = 0, & p(0) = s, \\ q' = 0, & q(0) = q_0(s), \end{cases} \tag{1.11}$$

conjuntamente con la ecuación adicional

$$z = x\,p + y\,q - \frac{1}{2}(p^2 - q^2). \tag{1.12}$$

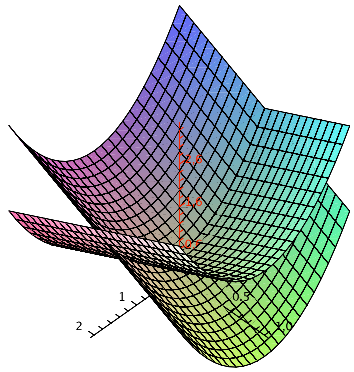

Figura 1.17: Solución del Ejercicio 2.3.3

Consideremos en un primer momento el caso $q_0 = 1$. De las dos últimas ecuaciones, es evidente que

$$p(t,s) = s$$

y

$$q(t,s) = 1.$$

Usando ahora la expresión (1.12), sabemos que las tres primeras variables son la única solución de la ecuación (1.3), tomando

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(t,s) = \begin{pmatrix} s \\ -1 \\ \dfrac{s^2-1}{2} \end{pmatrix}, \qquad C(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \dfrac{s^2+1}{2} \end{pmatrix}.$$

Con lo cual

$$x(t,s) = s,$$
$$y(t,s) = e^{-t} - 1$$

y

$$z(t,s) = e^{-t} + \frac{1}{2}\,(s^2 - 1).$$

La solución vendrá dada por la expresión

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(1 + x^2) + y.$$

Considerando $q_0 = -1$ obtenemos que

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(1 + x^2) - y$$

es la otra solución buscada (véase la figura 1.17). □

Ejercicio 1.3.6 *Resolver el siguiente problema*

$$\begin{cases} 2\,x\,u_x + y\,u_y + u_x^2 - u_y^2 - u = 0, \\ \\ u(x,x) = x^2, \quad x > 0. \end{cases}$$

Solución: La función que define la ecuación es

$$F(x,y,z,p,q) = 2\,x\,p + y\,q + p^2 - q^2 - z.$$

La condición inicial se parametriza del siguiente modo

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s, s, s^2).$$

Para completar la condición inicial a una banda inicial se debe verificar la condición de banda:

$$p_0 + q_0 = 2\,s,$$

y la de compatibilidad:

$$2\,s\,p_0 + s\,q_0 + p_0^2 - q_0^2 - s^2 = 0.$$

Es inmediato verificar que este sistema tiene una única solución dada por

$$p_0 = \frac{3}{5}\,s \qquad \text{y} \qquad q_0 = \frac{7}{5}\,s.$$

Dado que

$$\det \begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{16}{5}\,s & 1 \\ -\frac{9}{5}\,s & 1 \end{pmatrix} = 5\,s,$$

sabemos que el problema considerado tiene solución única.

Para calcularla debemos resolver el sistema (1.3), el cual viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} x' = 2\,x + 2\,p, & x(0) = s \\ y' = y - 2\,q, & y(0) = s \\ z' = 2\,x\,p + 2\,p^2 + y\,q - 2\,q^2, & z(0) = s^2, \\ p' = -p, & p(0) = \frac{3}{5}\,s, \\ \\ q' = 0, & q(0) = \frac{7}{5}\,s, \end{cases} \tag{1.13}$$

conjuntamente con la ecuación adicional

$$z = 2\,x\,p + y\,q + p^2 - q^2. \tag{1.14}$$

De nuevo estamos ante un sistema no lineal, si bien de las dos últimas ecuaciones deducimos de inmediato que

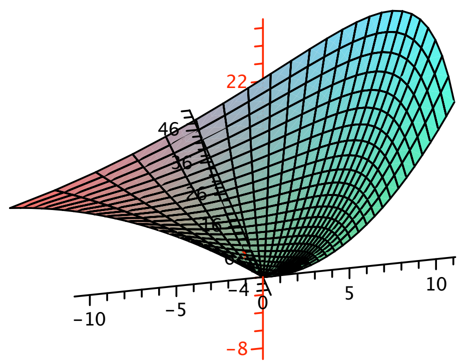

Figura 1.18: Solución del Ejercicio 2.2.3

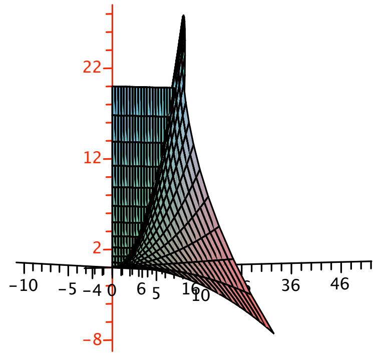

Figura 1.19: Condición inicial

$$p(t,s) = \frac{3}{5}\, s\, e^{-t}$$

y

$$q(t,s) = \frac{7}{5}\, s.$$

De la expresión (1.14), deducimos que las tres primeras variables son la única solución de la ecuación (1.3), con

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}\, s\, e^{-t} \\ -\frac{14}{5}\, s \\ -\frac{49}{25}\, s^2 + \frac{9}{25}\, s^2\, e^{-2\,t} \end{pmatrix}, \qquad C(s) = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$x(t,s) = \frac{7}{5}\, s\, e^{2\,t} - \frac{2}{5}\, s\, e^{-t},$$

$$y(t,s) = -\frac{9}{5}\, s\, e^{t} + \frac{14}{5}\, s$$

y

$$z(t,s) = -\frac{21}{25}\, s^2\, e^{t} - \frac{3}{25}\, s^2\, e^{-2\,t} + \frac{49}{25}\, s^2.$$

La superficie parametrizada sigue la expresión

$$\Gamma(t,s) = (\frac{7}{5}\, s\, e^{2\,t} - \frac{2}{5}\, s\, e^{-t}, -\frac{9}{5}\, s\, e^{t} + \frac{14}{5}\, s, -\frac{21}{25}\, s^2\, e^{t} - \frac{3}{25}\, s^2\, e^{-2\,t} + \frac{49}{25}\, s^2)$$

y se representa en las figuras 1.18 y 1.19. $\square$

Ejercicio 1.3.7 *Resolver el siguiente problema*

$$\begin{cases} u_x^2 + y^2\, u_y - 5\, y\, u = 0, \\ \\ u(x,1) = x^2, \quad x > 0. \end{cases}$$

Solución: En este caso

$$F(x,y,z,p,q) = p^2 + y^2\, q - 5\, y\, z$$

y

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s, 1, s^2).$$

La condición de banda nos dice que

$$p_0(s) = 2\, s,$$

con lo cual la condición de compatibilidad se reduce a

$$q_0(s) = s^2.$$

Dado que

$$\det \begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2\, p_0(s) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1,$$

sabemos que el problema considerado tiene una única solución.

Para obtener su expresión debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 2\, p, & x(0) = s \\ y' = y^2, & y(0) = 1 \\ z' = 2\, p^2 + y^2\, q, & z(0) = s^2, \\ p' = 5\, p\, y, & p(0) = s^2, \\ q' = 5\, z + 5\, q\, y, & q(0) = 2\, s, \end{cases} \tag{1.15}$$

conjuntamente con la ecuación adicional

$$5\, y\, z = p^2 + y^2\, q. \tag{1.16}$$

Es evidente que este sistema no lineal no puede ser reducido a una expresión del tipo (1.5), con lo cual debemos resolverlo directamente.

Comencemos por la segunda ecuación, en este caso tenemos

$$t = \int_0^t 1\, ds = \int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s)}\, ds = \int_1^{y(t)} \frac{dr}{r^2} = 1 - \frac{1}{y(t)}.$$

Por lo tanto

$$y(t,s) = \frac{1}{1-t}.$$

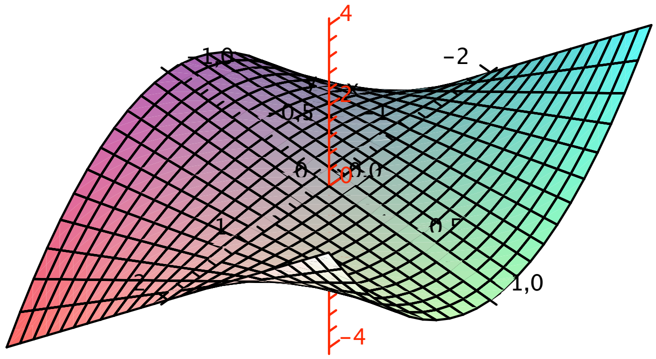

Figura 1.20: Solución del Ejercicio 1.3.7

Dado que conocemos el valor de y, la cuarta igualdad del sistema se transforma en la siguiente ecuación lineal con coeficientes variables

$$\frac{p'}{p} = \frac{5}{1-t}, \quad p(0) = 2\,s.$$

Sin más que integrar directamente, obtenemos que su única solución resulta ser

$$p(t,s) = \frac{2\,s}{(1-t)^5}.$$

Integrando ahora en la primera de las ecuaciones, llegamos a que

$$x(t,s) = \frac{s}{(1-t)^4}.$$

Finalmente, para calcular la expresión de z debemos resolver la tercera de las igualdades. En este caso, usando la igualdad (1.16) conjuntamente con las expresiones de y y p obtenidas previamente, debemos resolver la ecuación

$$z' = \frac{5}{1-t}\,z + \frac{4\,s^2}{(1-t)^{10}}, \quad z(0) = s^2.$$

Multiplicando en este caso por el factor integrante $(1-t)^5$, obtenemos que la única solución viene dada por

$$z(t,s) = \frac{s^2}{(1-t)^9}.$$

La superficie parametrizada es igual a

$$\Gamma(t,s) = \left(\frac{s}{(1-t)^4}, \frac{1}{1-t}, \frac{s^2}{(1-t)^9}\right).$$

Es evidente que esta superficie se corresponde con la expresión

$$u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y)) = x^2\, y$$

y que se representa en la figura 1.20. $\square$

Nota 1.3.3 *Nótese que en el ejercicio anterior no ha sido necesario calcular el valor de $q(t,s)$.*

1.3.2. Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales:

1. $u_x^2 + u_y^2 - 2\,u = 0, \quad u(x,x) = 1.$

   Solución: $u(x,y) = \dfrac{(x-y+2)^2}{4}, \qquad u(x,y) = \dfrac{(y-x+2)^2}{4}.$

2. $u_x\, u_y = 2, \quad u(x,x) = 3\,x.$

   Solución: $u(x,y) = 2\,x + y, \qquad u(x,y) = x + 2\,y.$

3. $u_x^3 - u_y = 0 \quad u(x,0) = \sqrt{x^3}, x \in [0,1].$

   Solución: $u(x,y) = 2\sqrt{\dfrac{x^3}{1-27\,y}}.$

4. $2\,u_x + u_y^2 = 2, \quad u(0,y) = y^2.$

   Solución: $u(x,y) = \dfrac{x + 2\,x^2 + y^2}{1+2\,x}.$

Capítulo 2

Ecuaciones de Segundo Orden

2.1. Clasificación de Ecuaciones Cuasilineales de Segundo Orden

En esta sección clasificaremos distintas ecuaciones cuasilineales de segundo orden bidimensionales según su carácter hiperbólico, parabólico o elíptico. Para ello, calcularemos sus curvas características y las reduciremos a su forma canónica. Finalmente calcularemos la expresión explícita de la única solución buscada.

2.1.1. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 2.1.1 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación*

$$u_{xx} - x^4\, u_{yy} - \frac{x^4 + 4\,x}{2\,x^2}\, u_x + \frac{x^4}{2}\, u_y = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{2.1}$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0\}$.

Denotando por n *al vector normal unitario exterior a la correspondiente curva, se consideran las siguientes condiciones iniciales:*

$$u\left(x, -\frac{x^3}{3}\right) = x, \qquad u_{\mathrm{n}}\left(x, \frac{x^3}{3}\right) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x > 0, \tag{2.2}$$

$$u(0,y) = y^3, \qquad u_{\mathrm{n}}(0,y) = 0 \quad \textit{para todo} \quad y \in \mathbb{R}\,. \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = x^3, \qquad u_{\mathrm{n}}(x,0) = 1 \quad \textit{para todo} \quad x > 0, \tag{2.4}$$

Calcular, si existe, la expresión de las soluciones de los problemas (2.1) – (2.2), (2.1) – (2.3) y (2.1) – (2.4).

Solución: Los valores de los parámetros de la ecuación general de segundo orden son $a = 1$, $b = 0$ y $c = -x^4$, por consiguiente $\Delta = b^2 - a\,c = x^4 > 0$ en D y la ecuación es hiperbólica.

Para calcular la forma canónica de esta ecuación, debemos obtener las dos curvas características funcionalmente independientes. Éstas vienen dadas como las soluciones de la siguiente ecuación

$$(y')^2 - x^4 = 0,$$

es decir

$$y' = \pm x^2,$$

lo que nos conduce a

$$y = \pm\frac{x^3}{3} + K, \qquad K \in \mathbb{R}\,.$$

Debemos por lo tanto considerar el siguiente cambio de variable

$$\xi = y - \frac{x^3}{3}, \qquad \eta = y + \frac{x^3}{3},$$

y encontrar una función v que satisfaga la expresión

$$v(\xi,\eta) = u(x,y).$$

Aplicando la regla de la cadena, sabemos que

$$u_x = -x^2\,(v_\xi - v_\eta),$$

$$u_y = v_\xi + v_\eta,$$

$$u_{xx} = -2\,x\,(v_\xi - v_\eta) + x^4\,(v_{\xi\xi} + 2\,v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta})$$

y

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2\,v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}.$$

En consecuencia, la ecuación (2.1) se reescribe como

$$v_{\eta\xi} - \frac{1}{4}\,v_\xi = 0.$$

Denotando por $w = v_\xi$, tenemos que esta ecuación se reduce a la siguiente

$$w_\eta - \frac{1}{4}\,w = 0,$$

cuya solución general es $w(\xi,\eta) = e^{\eta/4}\,f(\xi)$.

Con lo cual la solución buscada es igual a

$$v(\xi,\eta) = v(0,\eta) + e^{\eta/4}\int_0^\xi f(s)\,ds$$

o, lo que es lo mismo,

$$v(\xi,\eta) = e^{\eta/4}\,F(\xi) + G(\eta), \quad \text{con} \quad F(0) = 0.$$

Deshaciendo el cambio de variable, concluimos que la solución general de (2.1) es igual a

$$u(x,y) = e^{(y+\frac{x^3}{3})/4}\,F\left(y - \frac{x^3}{3}\right) + G\left(y + \frac{x^3}{3}\right), \tag{2.5}$$

siendo F y G funciones de clase $\mathcal{C}^2$ tales que $F(0) = 0$.

Resolver el problema (2.1) – (2.2) equivale a encontrar una función que verifique la expresión (2.5) conjuntamente con la condición inicial (2.2), la primera de cuyas igualdades, se reescribe del siguiente modo:

$$G\,(0) + F\left(-\frac{2\,x^3}{3}\right) = u\left(x, -\frac{x^3}{3}\right) = x. \tag{2.6}$$

Dado que el vector normal $\mathrm{n} = (x^2, 1)$, tenemos que la segunda parte de la condición inicial es igual a

$$\frac{x^2\,u_x\left(x,-\frac{x^3}{3}\right) + u_y\left(x,-\frac{x^3}{3}\right)}{\sqrt{x^4+1}} = u_{\mathrm{n}}\left(x,-\frac{x^3}{3}\right) = 0,$$

es decir

$$u_y\left(x,-\frac{x^3}{3}\right) = -x^2\,u_x\left(x,-\frac{x^3}{3}\right). \tag{2.7}$$

Derivando respecto de x e y en la expresión (2.5) así como en la igualdad (2.6), sin más que sustituir en (2.7) llegamos a que ha de verificarse lo siguiente:

$$\frac{x^5}{4} + (G'(0) - G(0) - 1)\,x^4 + \frac{x}{4} + G'(0) - G(0) + 1 = 0, \qquad \text{para todo} \qquad x > 0,$$

lo cual es imposible.

Por lo tanto el problema (2.1) – (2.2) no tiene solución. Ello se debe a que la curva inicial es una curva característica del problema.

Si abordamos el problema (2.1) – (2.3), al igual que en el caso anterior, debemos tener en cuenta que la solución general de la ecuación es de la forma (2.5), con lo cual $u_{\mathrm{n}}(0,y) = -u_x(0,y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto este problema tiene infinitas soluciones dadas por la expresión (2.5) con F y G funciones de clase $\mathcal{C}^2$ verificando

$$F(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad e^{z/4}\,F(z) + G(z) = z^3.$$

Por ejemplo, tomando $F(z) \equiv 0$ y $G(z) = z^3$ obtenemos la solución

$$u(x,y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right)^3.$$

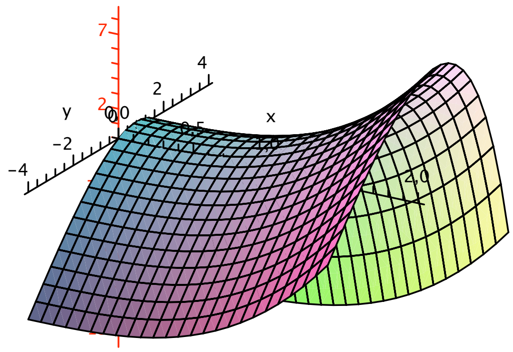

Figura 2.1: Solución del Ejercicio 2.1.1

Por otro lado, si definimos $F(z) \equiv z^3$ y $G(z) = z^3\,(1 - e^{z/4})$ llegamos a la siguiente expresión

$$u(x,y) = e^{(y+\frac{x^3}{3})/4}\left(y - \frac{x^3}{3}\right)^3 + \left(y + \frac{x^3}{3}\right)^3\left(1 - e^{(y+\frac{x^3}{3})/4}\right).$$

Es importante tener en cuenta que la condición $u_{\rm n}(0,y) = 0$ es una condición necesaria que debe verificar toda solución del problema (2.1), por lo tanto cualquier problema en el que este valor sea distinto de cero no será resoluble.

Para resolver el problema (2.1) – (2.4) debemos tener en cuenta que la solución general viene dada por la igualdad (2.5). Por consiguiente

$$G\left(\frac{x^3}{3}\right) + e^{x^3/12}\,F\left(-\frac{x^3}{3}\right) = u(x,0) = x^3. \tag{2.8}$$

Derivando en ambos miembros llegamos a la igualdad

$$G'\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{4}\,e^{x^3/12}\,F\left(-\frac{x^3}{3}\right) - e^{x^3/12}\,F'\left(-\frac{x^3}{3}\right) = 3. \tag{2.9}$$

Por otro lado, al ser ${\rm n} = (0,1)$, tenemos que

$$u_{\rm n}(x,0) = u_y(x,0),$$

con lo cual, derivando respecto de y en la expresión (2.5), la segunda parte de la condición inicial se transforma en

$$G'\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{4}\,e^{x^3/12}\,F\left(-\frac{x^3}{3}\right) + e^{x^3/12}\,F'\left(-\frac{x^3}{3}\right) = 1. \tag{2.10}$$

Restando (2.10) de (2.9) obtenemos la siguiente igualdad

$$F'\left(-\frac{x^3}{3}\right) = -e^{-x^3/12} \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Por consiguiente la función F verifica

$$F'(z) = -e^{z/4}, \qquad F(0) = 0,$$

con lo cual

$$F(z) = -4(e^{z/4} - 1).$$

Sustituyendo en la expresión (2.8) obtenemos que

$$G\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^3 + 4(1 - e^{x^3/12}),$$

es decir

$$G(z) = 3\,z + 4(1 - e^{z/4}).$$

Por lo tanto, la única solución del problema (2.1) – (2.4) es igual a

$$u(x,y) = 3\,y + x^3 + 4(1 - e^{y/2}),$$

y se representa en la figura 2.1. □

Ejercicio 2.1.2 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación*

$$-\,y^2\,u_{xx} + u_{yy} - 4\,y^2\,u_x + \frac{4\,y^2 - 1}{y}\,u_y = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{2.11}$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$.

Calcular la expresion de la única solución que verifica las condiciones iniciales

$$u(0,y) = \frac{y^2}{2}, \qquad u_{\mathrm{n}}(0,y) = -1 \quad \textit{para todo} \quad y > 0. \tag{2.12}$$

Siendo n *el vector normal unitario exterior a la curva* $(0,y)$.

Solución: En este caso tenemos que los valores de los parámetros de la ecuación general de segundo orden son $a = -y^2$, $b = 0$ y $c = 1$, con lo cual $\Delta = b^2 - a\,c = y^2 > 0$ en D. Por consiguiente la ecuación es hiperbólica.

Para calcular la solución general del problema considerado es necesario reducirlo a su forma canónica. Para ello debemos obtener las dos curvas características funcionalmente independientes, las cuales vienen dadas como las soluciones generales de la ecuación cuadrática

$$-y^2\,(y')^2 + 1 = 0,$$

es decir

$$y\,y' = \pm 1.$$

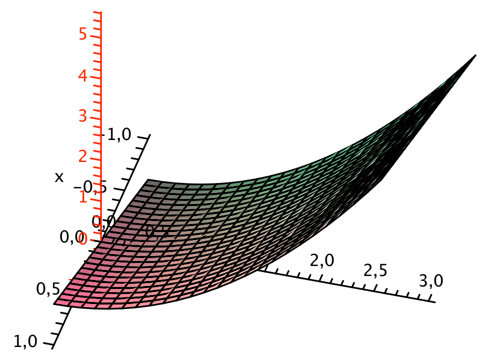

Figura 2.2: Solución del Ejercicio 2.1.2

Sin más que integrar en ambos lados de la ecuación obtenemos que las dos soluciones buscadas vienen dadas por la expresión

$$\frac{y^2}{2} = \pm x + K, \qquad K \in \mathbb{R}\,.$$

Debemos por lo tanto considerar el siguiente cambio de variable

$$\xi = \frac{y^2}{2} + x, \qquad \eta = \frac{y^2}{2} - x,$$

y encontrar una función v que satisfaga la expresión

$$v(\xi, \eta) = u(x, y).$$

Aplicando la regla de la cadena, sabemos que

$$u_x = v_\xi - v_\eta,$$

$$u_y = y\,(v_\xi + v_\eta),$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} - 2\,v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta},$$

y

$$u_{yy} = v_\xi + v_\eta + y^2(v_{\xi\xi} + 2\,v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}).$$

Por lo tanto, la ecuación (2.11) se reduce a

$$v_{\eta\xi} + 2\,v_\eta = 0.$$

Denotando por $w = v_\eta$, tenemos que su solución general es

$$w(\xi, \eta) = e^{-2\,\xi}\,f(\eta).$$

Con lo cual la solución buscada es igual a

$$v(\xi,\eta) = v(\xi,0) + e^{-2\,\xi} \int_0^{\eta} f(s)ds$$

o, lo que es lo mismo,

$$v(\xi,\eta) = e^{-2\,\xi}\, F(\eta) + G(\xi), \quad \text{con} \quad F(0) = 0.$$

De este modo, concluimos que la solución general de (2.11) es igual a

$$u(x,y) = e^{-(y^2+2\,x)}\, F\left(\frac{y^2}{2} - x\right) + G\left(\frac{y^2}{2} + x\right), \tag{2.13}$$

siendo F y G funciones de clase $\mathcal{C}^2$ tales que $F(0) = 0$.

Para calcular la expresión de la única solución de (2.11) que satisface la condición inicial (2.12) usamos el hecho de que la solución general viene dada por la igualdad (2.13) y, por consiguiente

$$e^{-y^2}\, F\left(\frac{y^2}{2}\right) + G\left(\frac{y^2}{2}\right) = u(0,y) = \frac{y^2}{2}. \tag{2.14}$$

Derivando en ambos miembros llegamos a la igualdad

$$-\,2\,e^{-y^2}\, F\left(\frac{y^2}{2}\right) + e^{-y^2}\, F'\left(\frac{y^2}{2}\right) + G'\left(\frac{y^2}{2}\right) = 1. \tag{2.15}$$

Dado que $\mathrm{n} = (-1,0)$, tenemos que

$$u_{\mathrm{n}}(0,y) = -u_x(0,y),$$

con lo cual, derivando respecto de x en la expresión (2.13), la segunda parte de la condición inicial se transforma en

$$-\,2\,e^{-y^2}\, F\left(\frac{y^2}{2}\right) - e^{-y^2}\, F'\left(\frac{y^2}{2}\right) + G'\left(\frac{y^2}{2}\right) = 1. \tag{2.16}$$

Restando (2.16) de (2.15) obtenemos la siguiente igualdad

$$2\,e^{-y^2}\, F'(\frac{y^2}{2}) = 0 \quad \text{para todo} \quad y > 0.$$

De donde deducimos que la función F es constante. Dado que $F(0) = 0$ concluimos que $F \equiv 0$. Sustituyendo en (2.14) tenemos que $G(z) \equiv z$ y, por lo tanto, la única solución del problema (2.11) – (2.12) (véase figura 2.2) es igual a

$$u(x,y) = \frac{y^2}{2} + x.$$

□

Ejercicio 2.1.3 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación*

$$y^2\, u_{xx} - x^2\, u_{yy} + \frac{y^2\,(x^2-2)}{2\,x}\, u_x + \frac{x^2\,(y^2+2)}{2\,y}\, u_y = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{2.17}$$

siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y > 0\}$.

Calcular la expresión de la única solución que verifica las condiciones iniciales

$$u(x, 3\,x) = x^2, \qquad u_{\mathrm{n}}(x, 3, x) = x. \tag{2.18}$$

Siendo n *el vector normal unitario exterior a lo largo de la curva* $(x, 3, x)$.

Solución: Dado que $\Delta = b^2 - a\,c = x^2\,y^2 > 0$ en D sabemos que la ecuación es hiperbólica.

Las dos curvas características son las soluciones generales de la ecuación cuadrática

$$y^2\,(y')^2 - x^2 = 0,$$

es decir

$$y\,y' = \pm x.$$

Integrando en ambos lados de la ecuación deducimos que las dos soluciones buscadas son

$$y^2 = \pm x^2 + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto consideramos el siguiente cambio de variable

$$\xi = y^2 - x^2, \qquad \eta = y^2 + x^2,$$

y buscamos una función v que satisfaga la expresión

$$v(\xi,\eta) = u(x,y).$$

La regla de la cadena nos dice que

$$u_x = -2\,x\,(v_\xi - v_\eta),$$

$$u_y = 2\,y\,(v_\xi + v_\eta),$$

$$u_{xx} = -2\,(v_\xi - v_\eta) + 4\,x^2\,(v_{\xi\xi} - 2\,v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}),$$

y

$$u_{yy} = 2\,(v_\xi + v_\eta) + 4\,y^2\,(v_{\xi\xi} + 2\,v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}).$$

Por lo tanto, la ecuación (2.17) se escribe en las nuevas variables como

$$v_{\eta\xi} - \frac{1}{8}\,v_\eta = 0.$$

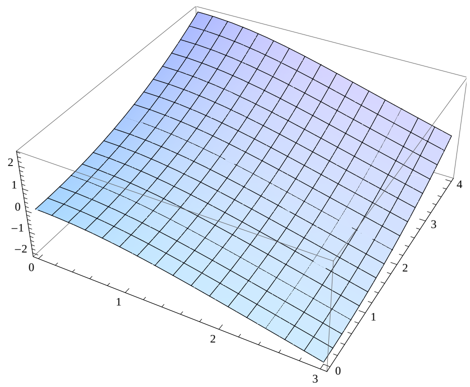

Figura 2.3: Solución del Ejercicio 2.1.3

Denotando por $w = v_\eta$, sabemos que

$$w(\xi,\eta) = e^{\xi/8}\, f(\eta).$$

Con lo cual la solución buscada es igual a

$$v(\xi,\eta) = e^{\xi/8}\, F(\eta) + G(\xi), \quad \text{con} \quad F(0) = 0.$$

Como consecuencia, la solución general de (2.17) es igual a

$$u(x,y) = e^{(y^2-x^2)/8}\, F\left(y^2+x^2\right) + G\left(y^2-x^2\right), \tag{2.19}$$

siendo F y G funciones de clase $\mathcal{C}^2$ tales que $F(0)=0$.

Para calcular la expresión de la única solución de (2.17) – (2.18), de la igualdad (2.19) deducimos que

$$e^{x^2}\, F\left(10\,x^2\right) + G\left(8\,x^2\right) = u(x,3\,x) = x^2. \tag{2.20}$$

Derivando en ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$e^{x^2}\, F\left(10\,x^2\right) + 10\, e^{x^2}\, F'\left(10\,x^2\right) + 8\, G'\left(8\,x^2\right) = 1. \tag{2.21}$$

Por otro lado, el vector normal $\mathrm{n} = (-3,1)/\sqrt{10}$, con lo cual

$$\frac{-3\, u_x\,(x,3\,x) + u_y\,(x,3\,x)}{\sqrt{10}} = u_{\mathrm{n}}\,(x,3\,x) = x.$$

Derivando respecto de x en la expresión (2.19), la igualdad anterior se transforma en

$$3\, e^{x^2}\, F(10\,x^2) + 24\, G'(8\,x^2) = 2\,\sqrt{10}. \tag{2.22}$$

Como consecuencia de estas dos últimas expresiones deducimos que

$$30\,F'(10\,x^2) = (3 - 2\sqrt{10})\,e^{-x^2} \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Por lo tanto la función F satisface la ecuación

$$F'(z) = \frac{3 - 2\sqrt{10}}{30}\,e^{-z/10}, \quad F(0) = 0,$$

es decir

$$F(z) = \frac{3 - 2\sqrt{10}}{3}\left(1 - e^{-z/10}\right).$$

Sustituyendo en (2.20) tenemos que

$$G(z) = \frac{z}{8} - \frac{3 - 2\sqrt{10}}{3}\left(e^{z/8} - 1\right).$$

Así pues, la única solución del problema (2.17) – (2.18) viene dada por la expresión

$$u(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{8} + \frac{3 - 2\sqrt{10}}{3}\left(1 - e^{(y^2 - 9\,x^2)/40}\right)$$

y se representa en la figura 2.3. □

Ejercicio 2.1.4 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación*

$$u_{xx} + 4\,u_{xy} + 4\,u_{yy} + u = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.23}$$

Calcular la expresión de la única solución que verifica las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \operatorname{sen} x, \qquad u_{\mathrm{n}}(x,0) = \cos x. \tag{2.24}$$

Siendo n *el vector normal unitario exterior a lo largo de la curva* $(x,0)$.

Solución: Al ser $a = 1$, $b = 2$ y $c = 4$, tenemos que $\Delta = b^2 - a\,c = 0$ y, por consiguiente, la ecuación es parabólica.

La única curva característica se obtiene al resolver la ecuación

$$(y')^2 - 4\,y' + 4 = 0,$$

es decir $y' = 2$ o, lo que es lo mismo, $y = 2\,x + K$, con $K \in \mathbb{R}$.

Para realizar el cambio de variable tomamos $\eta = -2\,x + y$ y una segunda aplicación funcionalmente independiente de ésta. Con el fin de que los cálculos resulten los más simples posibles elegimos $\eta = x$.

Es evidente que ambas funciones son independientes:

$$\det\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

De nuevo buscamos una función v que verifique $v(\xi,\eta) = u(x,y)$. Para ello buscamos la ecuación que necesariamente ha de verificar esa función.

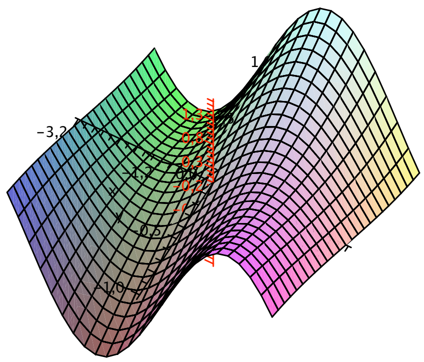

Figura 2.4: Solución del Ejercicio 2.3.4

Teniendo en cuenta que

$$u_x = -2\,v_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi,$$

$$u_{xx} = 4\,v_{\xi\xi} - 4\,v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = -2\,v_{\xi\xi} + v_{\eta\xi},$$

y

$$u_{yy} = v_{\xi\xi},$$

y sustituyendo en (2.23), obtenemos que la función v es solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$v_{\eta\eta} + v = 0,$$

cuya solución general viene dada por la expresión

$$v(\xi,\eta) = F(\xi)\cos\eta + G(\xi)\,\operatorname{sen}\eta,$$

es decir la solución general de (2.23) es igual a

$$u(x,y) = F(y-2\,x)\,\cos x + G(y-2\,x)\,\operatorname{sen} x, \tag{2.25}$$

con F y G funciones de clase $\mathcal{C}^2$.

Para calcular la única solución de (2.23) – (2.24), usando la expresión previa sabemos que

$$F(-2\,x)\,\cos x + G(-2\,x)\,\operatorname{sen} x = u(x,0) = \operatorname{sen} x. \tag{2.26}$$

Al ser el vector normal $\mathrm{n} = (0,1)$, obtenemos que la segunda parte de la condición inicial se reescribe como

$$u_y(x,0) = u_{\mathrm{n}}(x,0) = \cos x,$$

es decir

$$F'(-2\,x)\,\cos x + G'(-2\,x)\,\operatorname{sen} x = \cos x. \tag{2.27}$$

Derivando en (2.26) y usando esta última expresión llegamos a que

$$-\,F(-2\,x)\,\operatorname{sen} x + G(-2\,x)\,\cos x = 3\,\cos x. \tag{2.28}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (2.27) y (2.26) obtenemos que

$$F(z) = \operatorname{sen} z \qquad \text{y} \qquad G(z) = 2 + \cos z.$$

La solución buscada será:

$$u(x,y) = \operatorname{sen}(y-2\,x)\,\cos x + (2+\cos(y-2\,x))\,\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(y-x) + 2\,\operatorname{sen} x,$$

y se representa en la figura 2.4.

Es evidente que, al contrario de lo que sucede cuando estamos ante una ecuación hiperbólica, la elección de $\eta = x$ no es única. Por consiguiente la expresión de la solución general de la ecuación obtenida en (2.25) puede diferir según el cambio de variable usado. En todo caso el conjunto que define será, como es natural, el mismo.

En nuestro caso, pudimos haber definido $\eta = y$, con lo cual

$$\begin{aligned} u_x &= -2\,v_\xi, \\ u_y &= v_\xi + v_\eta, \\ u_{xx} &= 4\,v_{\xi\xi}, \\ u_{xy} &= -2\,(v_{\xi\xi} + v_{\eta\xi}), \end{aligned}$$

y

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2\,v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta},$$

obteniéndose que la función v es solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$v_{\eta\eta} + \frac{1}{4}v = 0,$$

cuya solución general viene dada por la expresión

$$v(\xi,\eta) = \bar{F}(\xi)\cos\eta/2 + \bar{G}(\xi)\,\operatorname{sen}\eta/2.$$

Así pues sabemos que la expresión general de las soluciones de (2.23) también puede escribirse como

$$u(x,y) = \bar{F}(y-2\,x)\,\cos y/2 + \bar{G}(y-2\,x)\,\operatorname{sen} y/2, \tag{2.29}$$

con F y G funciones de clase $\mathcal{C}^2$.

A partir de esta expresión podemos calcular la única solución de (2.23) – (2.24) del mismo modo que en el caso anterior. Usando (2.29) deducimos que

$$\bar{F}(-2\,x) = u(x,0) = \operatorname{sen} x, \tag{2.30}$$

con lo cual, de la expresión

$$u_y(x,0) = \bar{F}'(-2\,x) + \frac{1}{2}\,\bar{G}(-2\,x) = \cos x,$$

deducimos que

$$\bar{F}(z) = \operatorname{sen} z/2 \qquad \text{y} \qquad \bar{G}(z) = 3\,\cos z/2.$$

La única solución de (2.23) – (2.24) viene dada por

$$u(x,y) = -\operatorname{sen}\left(\frac{y-2\,x}{2}\right)\cos\frac{y}{2}+3\,\cos\left(\frac{y-2\,x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{y}{2} = \operatorname{sen}(y-x)+2\,\operatorname{sen} x,$$

como ya sabíamos. □

Ejercicio 2.1.5 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación*

$$-\,u_{xx} + 2\,u_{xy} - u_{yy} - 3\,u_x + 3\,u_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.31}$$

Calcular la expresión de la única solución que verifica las condiciones iniciales

$$u(x,2\,x) = x^3, \qquad u_{\mathrm{n}}(x,2\,x) = 0. \tag{2.32}$$

Siendo n *el vector normal unitario exterior a lo largo de la curva* $(x,2\,x)$.

Solución: Al ser $a = c = -1$ y $b = 1$, tenemos que $\Delta = b^2 - a\,c = 0$ y, por consiguiente, la ecuación es parabólica.

La única curva característica se obtiene al resolver la ecuación

$$-(y')^2 - 2\,y' - 1 = 0,$$

es decir $y' = -1$ o, lo que es lo mismo, $y = -x + K$, con $K \in \mathbb{R}$.

Para realizar el cambio de variable tomamos $\eta = x + y$ y una segunda aplicación funcionalmente independiente de ésta. Con el fin de que los cálculos resulten los más simples posibles elegimos $\eta = x$.

De nuevo buscamos una función v que verifique $v(\xi,\eta) = u(x,y)$.

Veamos qué ecuación verifica necesariamente esta función. Es evidente que

$$u_x = v_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi,$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2\,v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} + v_{\eta\xi},$$

y

$$u_{yy} = v_{\xi\xi}.$$

Con lo cual, sustituyendo en (2.11), obtenemos que la función v es solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$v_{\eta\eta} + 3\, v_\eta = 0.$$

Denotando $w \equiv v_\eta$ es evidente que $w(\xi,\eta) = F(\xi)\, e^{-3\,\eta}$. Por lo tanto, integrando respecto de η llegamos a la siguiente expresión

$$v(\xi,\eta) = G(\xi) + F(\xi)\, \frac{1 - e^{-3\,\eta}}{3},$$

es decir la solución general de (2.11) es igual a

$$u(x,y) = G(x+y) + F(x+y)\, \frac{1 - e^{-3\,x}}{3} \tag{2.33}$$

con F y G funciones de clase $\mathcal{C}^2$.

Para calcular la única solución de (2.31) – (2.32), usando la expresión previa deducimos que

$$G(3\,x) + F(3\,x)\, \frac{1 - e^{-3\,x}}{3} = u(x, 2\,x) = x^3. \tag{2.34}$$

Al ser el vector normal $\mathrm{n} = (-2, 1)$, sabemos que la segunda parte de la condición inicial se reescribe como

$$0 = u_{\mathrm{n}}(x, 2\,x) = \frac{-2\, u_x(x, 2\,x) + u_y(x, 2\,x)}{\sqrt{5}},$$

es decir

$$u_y(x, 2\,x) = 2\, u_x(x, 2\,x).$$

Combinando esta última expresión con la segunda igualdad en (2.34), llegamos a la siguiente propiedad

$$3\,x^2 = \frac{du}{dx}\,(x, 2\,x) = u_x(x, 2\,x) + 2\, u_y(x, 2\,x) = 5\, u_x(x, 2\,x),$$

con lo cual

$$u_x(x, 2\,x) = \frac{3}{5}\, x^2 \qquad \text{y} \qquad u_y(x, 2\,x) = \frac{6}{5}\, x^2.$$

Derivando respecto de x e y en (2.33) y usando estas igualdades, obtenemos que

$$-\frac{3}{5}\, x^2 = u_x(x, 2\,x) - u_y(x, 2\,x) = F(3\,x)\, e^{-3\,x}.$$

Finalmente, sustituyendo en (2.34), deducimos que

$$G(3\,x) = x^3 + \frac{x^2}{5}\, \left(e^{3\,x} - 1\right).$$

De este modo la única solución buscada está caracterizada por las funciones

$$F(z) = -\frac{z^2\, e^z}{15} \qquad \text{y} \qquad G(z) = \frac{z^3}{27} + \frac{z^2}{45}\,(e^z - 1)\,,$$

con lo cual

$$u(x,y) = \frac{(x+y)^3}{27} + \frac{(x+y)^2}{45}\,\left(e^{-2\,x+y} - 1\right).$$

$\square$

2.1.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1.6 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación*

$$u_{xx} - x^2\, u_{yy} + \frac{4\,x^2 - 1}{x}\, u_x - 4\,x^2\, u_y = 0, \quad (x,y) \in D,$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\ y > 0\}$.

Calcular la expresion de la única solución que verifica las condiciones iniciales

$$u(x,0) = x^2, \qquad u_{\mathrm{n}}(x,0) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x > 0.$$

Siendo n *el vector normal unitario exterior a* D *a lo largo de la curva* $(x,0)$.

Solución: La solución general es igual a

$$u(x,y) = G(2\,y + x^2) + F(2\,y - x^2)\, e^{-(2\,y + x^2)},$$

Con F y G dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$ y $F(0) = 0$.
La única solución del problema inicial viene dada por la expresión

$$u(x,y) = 2\,y + x^2 + (e^{-4\,y} - 1)/2.$$

Ejercicio 2.1.7 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación*

$$y^2\, u_{xx} - u_{yy} + 4\,y^2\, u_x + \frac{1 + 4\,y^2}{y}\, u_y = 0, \quad (x,y) \in D,$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\ y > 0\}$.

Calcular la expresion de la única solución que verifica las condiciones iniciales

$$u(0,y) = -y^2, \qquad u_{\mathrm{n}}(0,y) = 0 \quad \textit{para todo} \quad y > 0.$$

Siendo n *el vector normal unitario exterior a la curva* $(0,y)$.

Solución: La solución general es igual a

$$u(x,y) = F(y^2 + 2\,x)\, e^{-2\,x + y^2} + G(2\,x - y^2),$$

Con F y G dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$ y $F(0) = 0$.
La única solución del problema inicial viene dada por la expresión

$$u(x,y) = \frac{e^{-4\,x} - 1}{2} + 2\,x - y^2.$$

Ejercicio 2.1.8 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación*

$$y^2\, u_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{y}\, u_y = 0, \quad (x,y) \in D,$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\}$.

Calcular la expresion de la única solución que verifica las condiciones iniciales

$$u(0,y) = y^2, \qquad u_{\mathrm{n}}(y,0) = y \quad \textit{para todo} \quad y > 0.$$

Siendo n *el vector normal unitario exterior a la curva* $(0,y)$.

Solución: La solución general es igual a

$$u(x,y) = F(y^2 - 2\,x) + G(y^2 - 2\,x),$$

siendo F y G dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$ y $F(0) = 0$.
La única solución del problema inicial viene dada por la expresión

$$u(x,y) = y^2 + \frac{\sqrt{(y^2 - 2\,x)^3} - \sqrt{(y^2 + 2\,x)^3}}{6}.$$

Ejercicio 2.1.9 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación*

$$-u_{xx} + 2\,u_{xy} - u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calcular la expresion de la única solución que verifica las condiciones iniciales

$$u(x,x) = x, \qquad u_{\mathrm{n}}(x,x) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Siendo n *el vector normal unitario exterior a la curva* (x,x).

Solución: La solución general es igual a

$$u(x,y) = F(x+y)\,(e^y - 1) + G(x+y),$$

Con F y G dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$.
La única solución del problema inicial viene dada por la expresión

$$u(x,y) = \frac{x+y}{2}.$$

2.2. Ecuaciones Hiperbólicas

En esta sección resolvemos ecuaciones parabólicas de dimensión menor o igual que tres. En este caso usaremos las fórmulas de la integral de superficie y los clásicos teoremas del cambio de variable para la resolución de las integrales que surgen en la resolución de los problemas considerados

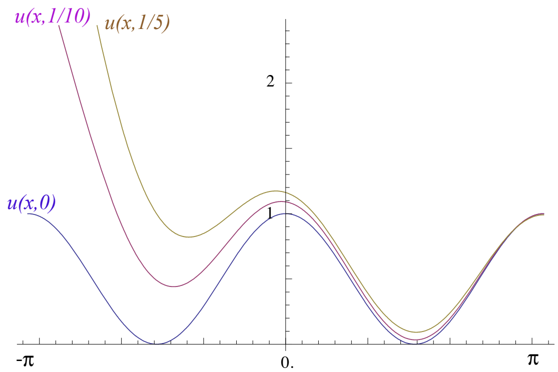

Figura 2.5: Solución del Ejercicio 2.2.1

2.2.1. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 2.2.1 *Resolver el siguiente problema de dimensión uno*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) & = & x\,e^{-t-1}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) & = & \cos^2 x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) & = & e^{-x}, & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Solución: Usando la fórmula de D' Alembert deducimos que la única solución viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} y\,e^{-s-1}\,dy\,ds \ + \cos^2(x+t)\right. \\ &\quad \left. + \cos^2(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} e^{-y}\,dy\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{(x+t-s)^2 - (x-t+s)^2}{2}\,e^{-s-1}\,ds + \cos^2(x+t)\right. \\ &\quad \left. + \cos^2(x-t) + e^{t-x} - e^{-t-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\,x \int_0^t (t-s)\,e^{-s-1}\,ds + \cos^2(x+t) + \cos^2(x-t)\right. \\ &\quad \left. + e^{t-x} - e^{-t-x}\right) \\ &= \frac{x}{e}\,(t - 1 + e^{-t}) + e^{-x}\,\operatorname{senh} t + \frac{1}{2}\left(\cos^2(x+t) + \cos^2(x-t)\right). \end{aligned}$$

En la figura 2.5 se representan los valores de la solución para ciertos valores de t. $\square$

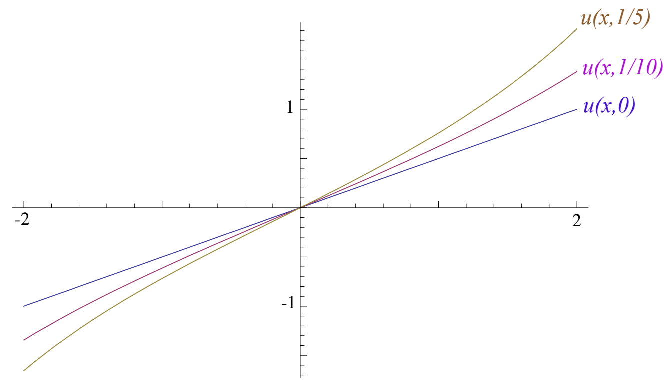

Figura 2.6: Solución del Ejercicio 2.2.2

Ejercicio 2.2.2 *Resolver el siguiente problema unidimensional:*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = (x+t)^2, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \dfrac{x}{2}, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \operatorname{senh} x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución: Aplicando de nuevo la fórmula de D'Alembert llegamos a (véase la figura 2.6):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} (y+s)^2\,dy\,ds + \frac{x+t}{2} + \frac{x-t}{2}\right. \\ &\quad \left. + \int_{x-t}^{x+t} \operatorname{senh} y\,dy\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{(x+t)^3 - (x-t+2\,s)^3}{3}\,ds + x\right. \\ &\quad \left. + \cosh(x+t) - \cosh(x-t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{3} + \frac{2\,t^2\,x}{3} + t^2\,x^2 + x + \cosh(x-t) - \cosh(x-t)\right). \end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.2.3 *Resolver la siguiente ecuación bidimensional*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) - \Delta_x u(x,y,t) = x\,y\,e^t, & t > 0,\ x,\ y \in \mathbb{R}, \\ u(x,y,0) = x^2 - y, & x,\ y \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,y,0) = x + y, & x,\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución: En este caso, el método del descenso de Hadamard nos dice que la solución de este problema viene dada por la expresión.

$$u(x,y,t) = u_1(x,y,t) + u_2(x,y,t) + u_3(x,y,t), \tag{2.35}$$

donde:

$$u_1(x,y,t) = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^t \int_{B((x,y),t-s)} \frac{p\,q\,e^s}{\sqrt{(t-s)^2-(x-p)^2-(y-q)^2}}\,dp\,dq\,ds,$$

$$u_2(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial\,t}\left(\frac{1}{2\,\pi}\int_{B((x,y),t)} \frac{p^2-q}{\sqrt{t^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\,dp\,dq\right)$$

y

$$u_3(x,y,t) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{B((x,y),t)} \frac{p+q}{\sqrt{t^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\,dp\,dq.$$

Debemos, por consiguiente, calcular las integrales anteriores. Para ello, realizando el cambio de coordenadas

$$p-x = (t-s)\,r\,\cos\theta, \qquad q-y = (t-s)\,r\,\operatorname{sen}\theta,$$

y aplicando el teorema del cambio de variable, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
u_1(x,y,t) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^t\int_0^1\int_0^{2\,\pi} \frac{(x+(t-s)\,r\,\cos\theta)\,(y+(t-s)\,r\,\operatorname{sen}\theta)\,e^s}{\sqrt{1-r^2}} \\
&\quad \times r\,(t-s)\,d\theta\,dr\,ds \\
&= x\,y\int_0^t\int_0^1 \frac{r\,(t-s)\,e^s}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,ds \\
&= x\,y\int_0^t (t-s)\,e^s\,ds \\
&= x\,y\,(e^t-1-t).
\end{aligned}$$

Realizando ahora el cambio de coordenadas

$$p-x = t\,r\,\cos\theta, \qquad q-y = t\,r\,\operatorname{sen}\theta, \tag{2.36}$$

y usando de nuevo el teorema del cambio de variable, obtenemos que:

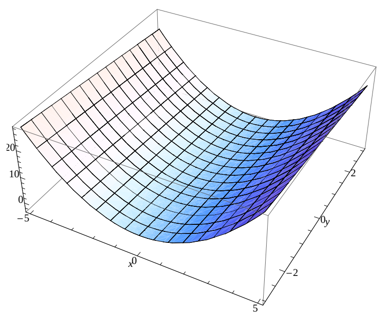

Figura 2.7: $u(x,y,0)$

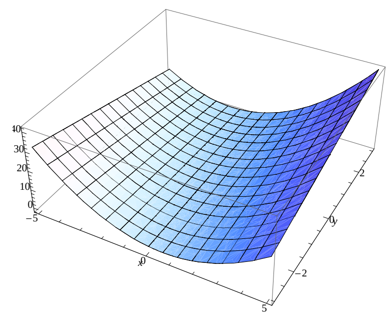

Figura 2.8: $u(x,y,1)$

$$\begin{aligned}
\int_{B((x,y),t)} \frac{p^2-q}{\sqrt{t^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\,dp\,dq &= \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{(x+t\,r\,\cos\theta)^2}{\sqrt{1-r^2}}\,t\,r\,d\theta\,dr \\
&\quad -\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{(y+t\,r\,\operatorname{sen}\theta)}{\sqrt{1-r^2}}\,t\,r\,d\theta\,dr \\
&= 2\,\pi\,t\int_0^1 \frac{\frac{t^2 r^2}{2}+x^2-y}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr \\
&= 2\,\pi\,t\,(\frac{t^2}{3}+x^2-y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$u_2(x,y,t) = t^2 + x^2 - y.$$

Finalmente, de forma análoga a la anterior integral, llegamos a que

$$\begin{aligned}
u_3(x,y,t) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{x+t\,r\,\cos\theta+y+t\,r\,\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-r^2}}\,t\,r\,d\theta\,dr \\
&= (x+y)\,t\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \\
&= (x+y)\,t.
\end{aligned}$$

Con lo cual, la solución buscada viene dada por la expresion

$$u(x,y,t) = x\,y\,(e^t-1-t) + t^2 + x^2 - y + (x+y)\,t,$$

y que se representa en las figuras 2.7 y 2.8 para $t=0$ y $t=1$. □

Ejercicio 2.2.4 *Resolver la siguiente ecuación bidimensional*

$$\left\{\begin{array}{rcll}
u_{tt}(x,y,t)-\Delta_x u(x,y,t) &=& x^3-y\,\cos t, & t>0,\ x,\ y\in\mathbb{R}, \\
u(x,y,0) &=& x-y, & x,\ y\in\mathbb{R}, \\
u_t(x,y,0) &=& x+y^3, & x,\ y\in\mathbb{R}.
\end{array}\right.$$

Solución: Al igual que en el ejercicio anterior, sabemos que la única solución de este problema viene dada por la expresión

$$u(x,y,t) = u_1(x,y,t) + u_2(x,y,t) + u_3(x,y,t).$$

En este caso:

$$\begin{aligned}
u_1(x,y,t) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^t\int_0^1\int_0^{2\,\pi}\frac{(x+(t-s)\,r\,\cos\theta)^3-(y+(t-s)\,r\,\operatorname{sen}\theta)\,\cos s}{\sqrt{1-r^2}} \\
&\quad \times r\,(t-s)\,d\theta\,dr\,ds \\
&= \int_0^t\int_0^1 \frac{2\,x^3+3\,x\,(t-s)\,r^2-2\,y\,\cos s}{2\,\sqrt{1-r^2}}\,r\,(t-s)\,dr\,ds \\
&= \int_0^t \big((t-s)^2\,x+x^3-y\,\cos s\big)\,(t-s)\,ds \\
&= \frac{1}{4}\,\big(t^4\,x+2\,t^2\,x^3-4\,y+4\,y\,\cos t\big)\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\,\pi}\int_{B((x,y),t)}\frac{p\,q}{\sqrt{t^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\,dp\,dq &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^1\int_0^{2\,\pi}(t\,r\,\cos\theta+x) \\
&\quad \times (t\,r\,\operatorname{sen}\theta+y)\,\frac{t\,r}{\sqrt{1-r^2}}\,d\theta\,dr \\
&= t\,x\,y\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \\
&= t\,x\,y.
\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$u_2(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\,\pi}\int_{B((x,y),t)}\frac{p\,q}{\sqrt{t^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\,dp\,dq\right) = x\,y.$$

Por último:

$$\begin{aligned}
u_3(x,y,t) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^1\int_0^{2\,\pi}\frac{t\,r}{\sqrt{1-r^2}}\,(t\,r\,\cos\theta+x+(t\,r\,\operatorname{sen}\theta+y)^3)\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^1\frac{t\,r}{2\,\sqrt{1-r^2}}\,(2\,x+3\,r^2\,t^2\,y+2\,y^3)\,dr \\
&= t\,(x+t^2\,y+y^3).
\end{aligned}$$

La solución buscada (véanse las figuras 2.9 y 2.10) viene dada por la expresión

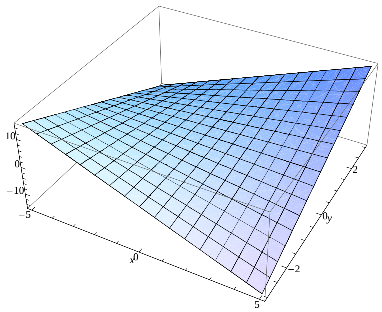

Figura 2.9: $u(x,y,0)$

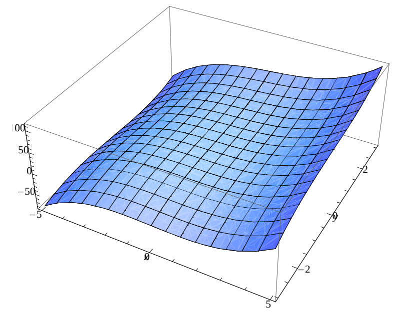

Figura 2.10: $u(x,y,1)$

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4}\,\left(t^4\,x+2\,t^2\,x^3-4\,y+4\,y\,\cos t\right)+x\,y+t\,(x+t^2\,y+y^3).$$

□

Ejercicio 2.2.5 *Resolver la siguiente ecuación tridimensional*

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{tt}(x,y,z,t)-\Delta_x u(x,y,z,t) & = & z-y\,t^3, & t>0,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}, \\ u(x,y,z,0) & = & x\,y, & x,\ y\,,z\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,y,z,0) & = & x+y, & x,\ y,\ z\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Solución: En este caso la solución viene dada por la siguiente expresión:

$$u(x,y,z,t)=u_1(x,y,z,t)+u_2(x,y,z,t)+u_3(x,y,z,t)+u_4(x,y,z,t).$$

Donde

$$u_1(x,y,z,t)=\frac{1}{4\,\pi\,t^2}\int_{\partial B((x,y,z),t)}p\,q\,dS_{p\,q\,w},$$

$$u_2(x,y,z,t)=\frac{1}{4\,\pi\,t}\int_{\partial B((x,y,z),t)}(p+q)\,dS_{p\,q\,w},$$

$$u_3(x,y,z,t)=\frac{1}{4\,\pi\,t^2}\int_{\partial B((x,y,z),t)}\left(y\,(p-x)+x\,(q-y)\right)\,dS_{p\,q\,w}$$

y

$$u_4(x,y,z,t)=\int_0^t\frac{1}{4\,\pi\,(t-s)}\left(\int_{\partial B((x,y,z),t-s)}\left(w-q\,s^3\right)\,dS_{p\,q\,w}\right)\,dt.$$

Aplicando la definición de integral de superficie, deducimos que

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\,\pi\,t^2}\int_{\partial B((x,y,z),t)} p\,q\,dS_{p\,q\,w} \\ &= \frac{1}{2\,\pi\,t}\int_{B((x,y),t)} \frac{p\,q}{\sqrt{t^2-(x-p)^2-(y-q)^2}}\,dp\,dq. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de coordenadas (2.36), tenemos que esta última expresión es igual a

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^1\int_0^{2\,\pi}\frac{(x+t\,r\,\cos\theta)\,(y+t\,r\,\operatorname{sen}\theta)\,r}{\sqrt{1-r^2}}\,d\theta\,dr = x\,y\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr = x\,y.$$

Del mismo modo, tenemos que:

$$\begin{aligned} u_2(x,y,z,t) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^1\int_0^{2\,\pi}\frac{(x+t\,r\,\cos\theta+y+t\,r\,\operatorname{sen}\theta)\,r\,t}{\sqrt{1-r^2}}\,d\theta\,dr \\ &= t\,(x+y)\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \\ &= t\,(x+y) \end{aligned}$$

y

$$u_3(x,y,z,t) = \frac{t}{2\,\pi}\int_0^1\int_0^{2\,\pi}\frac{(x\,r\,t\,\cos\theta+y\,r\,t\,\operatorname{sen}\theta)}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,d\theta\,dr = 0.$$

Finalmente, para calcular u_4, usando la definición de integral de superficie, sabemos que

$$\int_{\partial B((x,y,z),t-s)}\left(w-q\,s^3\right)\,dS_{p\,q\,w} =$$

$$\int_{B((x,y),t-s)}\frac{z+\sqrt{(t-s)^2-(p-x)^2-(q-y)^2}-q\,s^3}{\sqrt{(t-s)^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\,dp\,dq$$

$$+\int_{B((x,y),t-s)}\frac{z-\sqrt{(t-s)^2-(p-x)^2-(q-y)^2}-q\,s^3}{\sqrt{(t-s)^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\,dp\,dq$$

$$=2\int_{B((x,y),t-s)}\frac{z-q\,s^3}{\sqrt{(t-s)^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\,dp\,dq,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
u_4(x,y,z,t) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^t \int_{B((x,y),t-s)} \frac{z-q\,s^3}{\sqrt{(t-s)^2-(p-x)^2-(q-y)^2}}\,dp\,dq\,ds \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^t \int_0^1 \int_0^{2\,\pi} \frac{z-(y+r\,(t-s)\,\operatorname{sen}\theta)\,s^3}{\sqrt{1-r^2}} r\,(t-s)\,d\theta\,dr\,ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \frac{z-y\,s^3}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,(t-s)\,dr\,ds \\
&= \int_0^t (t-s)\,(z-y\,s^3)\,ds \\
&= z\,\frac{t^2}{2}-y\,\frac{t^5}{20}.
\end{aligned}$$

Así pues, la solución buscada es igual a

$$u(x,y,z,t)=x\,y+t\,(x+y)+z\,\frac{t^2}{2}-y\,\frac{t^5}{20}.$$

□

Ejercicio 2.2.6 *Resolver la siguiente ecuación tridimensional*

$$\left\{\begin{array}{rcll}
u_{tt}(x,y,z,t)-\Delta_x u(x,y,z,t) &=& y^2\,\operatorname{sen} t, & t>0,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R},\\
u(x,y,z,0) &=& x^2+y^2, & x,\ y\,,z\in\mathbb{R},\\
u_t(x,y,z,0) &=& y-z, & x,\ y,\ z\in\mathbb{R}.
\end{array}\right.$$

Solución: Nuevamente, la solución viene dada como la suma de cuatro funciones:

$$u(x,y,z,t)=u_1(x,y,z,t)+u_2(x,y,z,t)+u_3(x,y,z,t)+u_4(x,y,z,t),$$

En este caso

$$\begin{aligned}
u_1(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\,\pi\,t^2}\int_{\partial B((x,y,z),t)} \left(p^2+q^2\right)\,dS_{p\,q\,w} \\
&= \frac{1}{2\,\pi\,t}\int_{B((x,y,z),t)} \frac{p^2+q^2}{\sqrt{t^2-(x-p)^2-(y-q)^2}}\,dp\,dq \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^1 \int_0^{2\,\pi} \frac{(x+t\,r\,\cos\theta)^2+(y+t\,r\,\operatorname{sen}\theta)^2}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}(r^2\,t^2+x^2+y^2)\,dr \\
&= x^2+y^2+2\,\frac{t^2}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\,\pi\,t}\int_{\partial B((x,y,z),t)} (p-w)\,dS_{p\,q\,w} \\
&= \frac{1}{4\,\pi}\int_{B((x,y),t)} \frac{q-\sqrt{t^2-(p-x)^2-(q-y)^2}-z}{\sqrt{t^2-(x-p)^2-(y-q)^2}}\,dp\,dq \\
&\quad +\frac{1}{4\,\pi}\int_{B((x,y),t)} \frac{q+\sqrt{t^2-(p-x)^2-(q-y)^2}-z}{\sqrt{t^2-(x-p)^2-(y-q)^2}}\,dp\,dq \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\int_{B((x,y),t)} \frac{q-z}{\sqrt{t^2-(x-p)^2-(y-q)^2}}\,dp\,dq \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^1\int_0^{2\,\pi} \frac{y+t\,r\,\operatorname{sen}\theta-z}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,t\,d\theta\,dr = \\
&= t\,(y-z)\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \\
&= t\,(y-z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x,y,z,t) &= \frac{1}{2\,\pi\,t^2}\int_{\partial B((x,y,z),t)} (p\,(p-x)+q\,(q-y))\;dS_{p\,q\,w} \\
&= \frac{t}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\,\pi} \frac{(x+r\,t\,\cos\theta)\,r\,\cos\theta+(y+r\,t\,\operatorname{sen}\theta)\,r\,\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,d\theta\,dr \\
&= 2\,t^2\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \\
&= \frac{4}{3}\,t^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
u_4(x,y,z,t) &= \int_0^t \frac{1}{4\,\pi\,(t-s)}\left(\int_{\partial B((x,y,z),t-s)} q^2\,\operatorname{sen}s\,dS_{p\,q\,w}\right)ds \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^t\int_0^1\int_0^{2\,\pi} \frac{(y+r\,(t-s)\,\operatorname{sen}\theta)^2\,\operatorname{sen}s}{\sqrt{1-r^2}}\,(t-s)\,r\,d\theta\,dr\,ds \\
&= \int_0^t\int_0^1 \frac{(r^2\,(t-s)^2+2\,y^2)\,\operatorname{sen}s}{2\,\sqrt{1-r^2}}\,r\,(t-s)\,dr\,ds \\
&= \frac{1}{3}\int_0^t (t-s)\,((t-s)^2+3\,y^2)\,\operatorname{sen}s\,ds \\
&= \frac{1}{3}\,t\,(3\,y^2+t^2-6)+(2-y^2)\,\operatorname{sen}t.
\end{aligned}$$

Con lo cual, la solución buscada es igual a

$$u(x,y,z,t) = x^2+y^2+\frac{t^3}{3}+2\,t^2+t\,(y^2+y-z-2)+(2-y^2)\,\operatorname{sen}t.$$

□

Ejercicio 2.2.7 *Calcular la expresión de las soluciones radiales $u(x,t) \equiv v(\|x\|,t)$ de la ecuación*

$$u_{tt}(x,t) - 4\,\Delta_x u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \tag{2.37}$$

Usar la fórmula obtenida para calcular la única solución de la ecuación anterior con condiciones iniciales $u(x,0) = 0$ y $u_t(x,0) = \|x\|$.

Solución: Denotando por $r = \|x\|$, teniendo en cuenta que

$$u_{tt}(x,t) = v_{tt}(r,t),$$

$$u_{x_i}(x,t) = v_r(r,t)\,\frac{x_i}{r}, \quad \text{para todo} \quad i = 1,2,3,$$

y

$$u_{x_i x_i}(x,t) = v_r(r,t)\,\frac{r^2 - x_i^2}{r^3} + v_{rr}(r,t)\,\frac{x_i^2}{r^2}, \quad \text{para todo} \quad i = 1,2,3.$$

Deducimos que

$$\triangle u(x,t) = v_{rr}(r,t) + \frac{2}{r}\,v_r(r,t).$$

Con lo cual, la ecuación de partida se transforma en la ecuación unidimensional

$$v_{tt}(r,t) - 4\left(v_{rr}(r,t) + \frac{2}{r}\,v_r(r,t)\right) = 0.$$

Definiendo ahora

$$w(r,t) = r\,v(r,t),$$

tenemos que w es resuelve la siguiente ecuación con coeficientes constantes

$$w_{tt}(r,t) - 4\,w_{rr}(r,t) = 0, \quad r > 0, \quad t > 0.$$

Estamos pues ante una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes, cuyo discriminante es igual a 4, con lo cual la ecuación es hiperbólica.

En este caso las curvas características que nos caracterizan el cambio de variable vienen dadas al resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$y' = \pm 2.$$

Por lo tanto el cambio de variable será

$$\xi = \phi(r,t) = t + 2\,r, \qquad \eta = \psi(r,t) = t - 2\,r.$$

No es difícil verificar que $z(\xi,\eta) \equiv w(r,t)$ satisface la ecuación

$$z_{\xi\eta} = 0,$$

cuya solución general viene dada por

$$z(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \qquad \text{con} \quad f(0) = 0,$$

o, de modo equivalente,

$$w(r, t) = f(r + 2\,t) + g(r - 2\,t), \qquad \text{con} \quad f(0) = 0.$$

Así pues, la solución general de la ecuación (2.37) viene dada por la expresión

$$u(x, t) = v(\|x\|, t) = \frac{f(\|x\| + 2\,t) + g(\|x\| - 2\,t)}{\|x\|}, \qquad \text{con} \quad f(0) = 0.$$

En el caso particular de las condiciones iniciales $u(x, 0) = 0$ y $u_t(x, 0) = \|x\|$, deducimos de la expresión general que $f = -g$.

Derivando respecto de t tenemos que

$$u_t(x, t) = \frac{2\,f'(\|x\| + 2\,t) + 2\,f'(\|x\| - 2\,t)}{\|x\|},$$

con lo cual

$$\|x\| = u_t(x, 0) = \frac{4\,f'(\|x\|)}{\|x\|}.$$

Por lo tanto $f'(r) = \dfrac{r^2}{4}$ y, por consiguiente,

$$f(r) = \frac{r^3}{12}.$$

La expresión de la única solución buscada, viene dada por

$$u(x, t) = \frac{(\|x\| + 2\,t)^3 - (\|x\| - 2\,t)^3}{12\,\|x\|}.$$

□

2.2.2. Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales:

1.
$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) & = & x + t, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) & = & x^2, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) & = & -2\,x, & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Solución: $u(x,t) = \dfrac{t^3}{6} + t^2 + \dfrac{1}{2}\,(t-4)\,t\,x + x^2.$

2.
$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= x\,e^t, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \operatorname{sen} x, & x\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \cosh x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución: $u(x,t) = x\,(e^t - t - 1) + \cos t\,\operatorname{sen} x + \cosh x\,\operatorname{senh} t$.

3.
$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) - \Delta_x u(x,y,t) &= x + \dfrac{y}{1+t^2}, & t>0,\ x,\ y\in\mathbb{R}, \\ u(x,y,0) &= x^2 - y^2, & x,\ y\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,y,0) &= x, & x,\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución:

$$u(x,y,t) = t\,x + \frac{t^2\,x}{2} + x^2 - y^2 + t\,y\,\arctan t - y\,\log\sqrt{1+t^2}.$$

4.
$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) - \Delta_x u(x,y,t) &= \dfrac{x+y}{\sqrt{1+t^2}}, & t>0,\ x,\ y\in\mathbb{R}, \\ u(x,y,0) &= 4 - y, & x,\ y\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,y,0) &= x\,y - 5\,y^2, & x,\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución:

$$u(x,y,t) = 4 - \frac{5}{3}\,t^3 - y + t\,x\,y - 5\,t\,y^2 + (x+y)\left(1 + t\,\operatorname{arcsenh} t\, - \sqrt{1+t^2}\right).$$

5.
$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,z,t) - \Delta_x u(x,y,z,t) &= \dfrac{z}{2}, & t>0,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}, \\ u(x,y,0) &= z^2, & x,\ y\,,z\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,y,0) &= x\,y, & x,\ y,\ z\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución: $u(x,y,z,t) = t^2 + t\,x\,y + t\,z + t^2\,\dfrac{z}{4} + z^2$.

6.
$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,z,t) - \Delta_x u(x,y,z,t) &= y\,e^{-t}, & t>0,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}, \\ u(x,y,0) &= z, & x,\ y\,,z\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,y,0) &= x+y+z, & x,\ y\,,z\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución: $u(x,y,z,t) = x\,t + y\,\left(2\,t - 1 + e^{-t}\right) + z\,(t+1)$.

2.3. Ecuaciones Parabólicas

En esta última sección resolvemos ecuaciones parabólicas de una, dos y tres dimensiones. Para ello usaremos la expresión general de la solución, si bien usaremos las propiedades cualitativas de las funciones que intervienen en la expresión para poder resolverlas directamente.

2.3.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.3.1 *Resolver la siguiente ecuación unidimensional*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) & = & e^t, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) & = & \cos 3\,x, & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Solución:

Definiendo para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ el núcleo integral K del siguiente modo

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,t}}\, e^{-\frac{x^2}{4\,t}}, \tag{2.38}$$

y denotando por

$$u_1(x,t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K\,(x-y, t-s)\, e^s\, dy\, ds$$

y

$$u_2(x,t) \equiv \int_{\mathbb{R}} K\,(x-y,t)\, \cos 3\,y\, dy, \tag{2.39}$$

sabemos que la única solución buscada viene dada por la expresión

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t).$$

Por otro lado, dado que

$$\int_{\mathbb{R}} K\,(z,r)\, dz = 1, \quad \text{para todo} \quad r > 0, \tag{2.40}$$

deducimos que

$$u_1(x,t) = \int_0^t e^s \left(\int_{\mathbb{R}} K(x-y, t-s)\, dy \right) ds = e^t - 1.$$

Sin embargo resolver la integral (2.39) es mucho más complicado. Para ello debemos tener en cuenta que u_2 es la única solución del siguiente problema

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0,\ t > 0; \qquad v(x,0) = \cos 3\,x. \tag{2.41}$$

Este problema puede resolverse buscando una solución dada en variables separadas

$$v(x,t) = X(x)\,T(t).$$

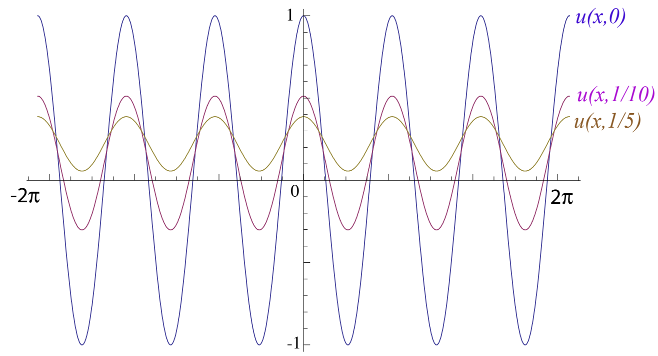

Figura 2.11: Solución del Ejercicio 2.3.1

Con lo cual la ecuación (2.41) se transforma en

$$X(x)\,T'(t) - X''(x)\,T(t) = 0, \quad X(x)\,T(0) = \cos 3\,x.$$

De la segunda igualdad, deducimos que, caso de existir solución de este tipo, necesariamente se ha de verificar que

$$X(x) = \frac{\cos 3\,x}{T(0)} \equiv c\,\cos 3\,x.$$

Por consiguiente

$$X''(x) = -9\,X(x).$$

Así pues, deducimos que la primera de las ecuaciones se transforma en

$$X(x)\,(T'(t) + 9\,T(t)) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \;\; \text{y } t > 0.$$

Al no ser la función X idénticamente nula en $\mathbb{R}$, obtenemos que forzosamente se ha de verificar que

$$T(t) = T(0)\,e^{-9\,t} \equiv \frac{e^{-9\,t}}{c},$$

con lo cual, la única solución del problema (2.41) viene dada por la expresión

$$v(x,t) = e^{-9\,t}\,\cos 3\,x$$

y, como consecuencia, la única solución del problema estudiado resulta ser

$$u(x,t) = e^{t} - 1 + e^{-9\,t}\,\cos 3x.$$

En la figura 2.11 se representa la gráfica de la solución para distintos valores de t. □

Nota 2.3.1 *Las soluciones de los problemas de evolución pueden ser representados de forma natural mediante problemas de cálculo simbólico. En este caso concreto podemos ver la evolución de la temperatura representando la solución mediante el programa MAPLE. Los comandos serían:*

$\mathbf{with}(\mathbf{plots});$
$\mathbf{u} := (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \to \mathbf{exp}(\mathbf{t}) - \mathbf{1} + \mathbf{exp}(-\mathbf{9} * \mathbf{t}) * \mathbf{cos}(\mathbf{3} * \mathbf{x});$
$\mathbf{plot}(\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \mathbf{u}(\mathbf{x}, .\mathbf{1}), \mathbf{u}(\mathbf{x}, .\mathbf{2})\}, \mathbf{x} = -\mathbf{2} * \mathbf{Pi}\ .\ .\ \mathbf{2} * \mathbf{Pi});$

Ejercicio 2.3.2 *Resolver la siguiente ecuación unidimensional*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) & = & \operatorname{senh} x \cosh t, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \\ u(x,0) & = & \operatorname{sen}^2 x, & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Solución:

Usando la expresión (2.38) sabemos que la única solución buscada viene dada por la expresión

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

siendo

$$u_1(x,t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K\,(x-y, t-s)\ \operatorname{senh} y\ \cosh s\, dy\, ds$$

y

$$u_2(x,t) \equiv \int_{\mathbb{R}} K\,(x-y,t)\ \operatorname{sen}^2 y\, dy.$$

En este caso, la resolución de ambas integrales es muy complicada. Por lo que para su cálculo efectivo es necesario tener en cuenta las ecuaciones que estas expresiones resuelven.

En un primer momento, para deducir la expresión de u_1, debemos tener en cuenta que la función

$$v_1(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K\,(x-y,t)\ \operatorname{senh} y\, dy$$

es la única solución del problema

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0,\ t > 0; \qquad v(x,0) = \operatorname{senh} x. \tag{2.42}$$

De nuevo, al igual que en el ejercicio anterior, podemos buscar la solución dada en variables separadas

$$v_1(x,t) = X(x)\, T(t).$$

De la segunda igualdad deducimos que, caso de existir solución de este tipo, necesariamente se ha de verificar que

$$X(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{T(0)} \equiv c_1\ \cos 2\, x.$$

Con lo cual, la primera de las ecuaciones se transforma en

$$X(x)\,(T'(t) - T(t)) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \ \text{ y } t > 0,$$

es decir

$$T(t) = T(0)\,e^t \equiv \frac{e^t}{c_1},$$

con lo cual, la única solución del problema (2.42) viene dada por la expresión

$$v_1(x,t) = e^t \,\operatorname{senh} x.$$

Así pues, tenemos que

$$u_1(x,t) = \int_0^t e^{t-s} \operatorname{senh} x \,\cosh s\, ds = \frac{1}{2}\left(t\,e^t + \operatorname{senh} t\right) \operatorname{senh} x.$$

Para obtener la expresión de u_2, usamos el hecho de que esta función es la única solución del siguiente problema

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0,\ t > 0; \qquad v(x,0) = \operatorname{sen}^2 x.$$

Para obtener la solución en variables separadas, usamos la expresión

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2\,x}{2}.$$

Con lo cual

$$u_2(x,t) = w_1(x,t) + w_2(x,t),$$

siendo w_1 la única solución del problema

$$w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0,\ t > 0; \qquad w(x,0) = \frac{1}{2}, \tag{2.43}$$

y w_2 la correspondiente a

$$w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0,\ t > 0; \qquad w(x,0) = -\frac{\cos 2\,x}{2}. \tag{2.44}$$

Es evidente que $w_1(x,t) \equiv 1/2$ es la única solución de (2.43), con lo cual, obtener la expresión de u_2 se reduce al cálculo de la función w_2. Para ello, buscamos de nuevo una solución dada en variables separadas

$$w_2(x,t) = X(x)\,T(t).$$

Con lo cual la ecuación (2.44) se transforma en

$$X(x)\,T'(t) - X''(x)\,T(t) = 0, \quad X(x)\,T(0) = -\frac{\cos 2\,x}{2}.$$

Razonando de forma análoga al caso anterior, obtenemos que la única solución del problema (2.44) viene dada por la expresión

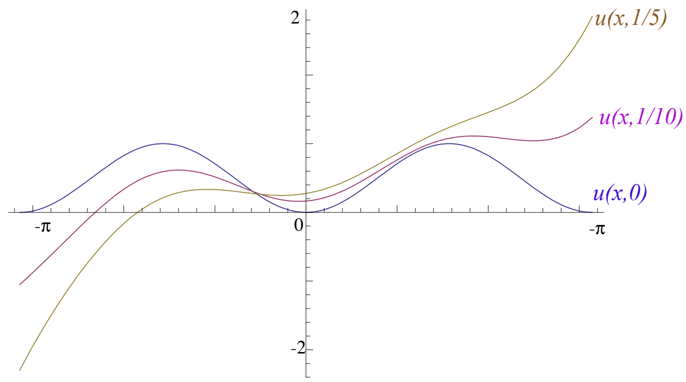

Figura 2.12: Solución del Ejercicio 2.3.2

$$w_2(x,t) = -\frac{1}{2}\,e^{-4\,t}\,\cos 2\,x$$

y, por lo tanto

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}(1 - \,e^{-4\,t}\,\cos 2\,x).$$

Así pues, concluímos que la única solución del problema viene dada por la expresión

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 - \,e^{-4\,t}\,\cos 2\,x + \left(t\,e^{t} + \operatorname{senh} t\right)\,\operatorname{senh} x\right).$$

En la figura 2.12 se representa la gráfica de la solución para distintos valores de t. □

Ejercicio 2.3.3 *Resolver la siguiente ecuación unidimensional*

$$\begin{cases} 4\,u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0, \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ \\ u(x,0) &= e^{2\,x-x^2}, \quad x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución:

Para calcular la expresión de la solución buscada, debemos hacer un cambio de variable en el que se normalice la velocidad de trasmisión de la temperatura. Para ello definimos

$$v(x,t) = u(x,4\,t).$$

Claramente, la función v es la única solución de la ecuación

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \qquad u(x,0) = e^{2\,x-x^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

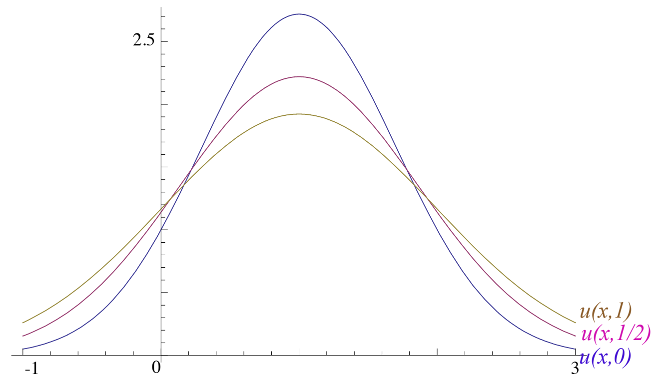

Figura 2.13: Solución del Ejercicio 2.3.3

Por consiguiente, se satisface que

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K\,(x-y,t)\, e^{2\,y-y^2}\, dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4\,t}}\, e^{2\,y-y^2}\, dy,$$

En este caso, sin más que tener en cuenta que

$$\begin{aligned} -\frac{(x-y)^2}{4\,t} + 2\,y - y^2 &= \frac{1+4\,t}{4\,t}\left(-\frac{x^2}{1+4\,t} + 2\,y\,\frac{x+4\,t}{1+4\,t} - y^2\right) \\ &= -\frac{1+4\,t}{4\,t}\left(\frac{x+4\,t}{1+4\,t} - y\right)^2 + \frac{4\,t+2\,x-x^2}{4\,t+1}, \end{aligned}$$

deducimos que

$$v(x,t) = \frac{e^{\frac{4\,t+2\,x-x^2}{4\,t+1}}}{\sqrt{4\,\pi\,t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1+4\,t}{4\,t}\left(\frac{x+4\,t}{1+4\,t}-y\right)^2}\, dy.$$

Realizando el cambio de variable

$$z = \sqrt{1+4\,t}\left(\frac{x+4\,t}{1+4\,t} - y\right),$$

y usando la expresión (2.40), llegamos a que

$$v(x,t) = \frac{e^{\frac{4\,t+2\,x-x^2}{4\,t+1}}}{\sqrt{4\,t+1}}.$$

Por consiguiente

$$u(x,t) = v(x,t/4) = \frac{e^{\frac{t+2\,x-x^2}{t+1}}}{\sqrt{t+1}}$$

es la solución buscada (véase la figura 2.13). $\square$

Ejercicio 2.3.4 *Resolver la siguiente ecuación bidimensional*

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t(x,y,t) - \triangle_x u(x,y,t) & = & e^t \cos 3x \,\operatorname{sen} 2y, & (x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\, t>0,\\ u(x,y,0) & = & \cos x \,\operatorname{sen} y, & (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{array}\right.$$

Solución:

En este caso sabemos que la única solución buscada viene dada por la expresión

$$u(x,y,t) = u_1(x,y,t) + u_2(x,y,t),$$

donde

$$u_1(x,y,t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} K\,(x-p, y-q, t-s)\, e^s \,\cos 3\,p \,\operatorname{sen} 2\,q \,dp\,dq\,ds$$

y

$$u_2(x,y,t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} K\,(x-p, y-q, t)\, \cos p \,\operatorname{sen} q \,dp\,dq.$$

En esta situación tenemos que para todo $x,\, y \in \mathbb{R}$ y $t>0$ el núcleo integral K viene dado por la expresión

$$K(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4\,t}}}{4\,\pi\,t}. \tag{2.45}$$

Nuevamente, la resolución analítica de estas integrales no es muy sencilla. Por lo tanto usando el hecho de que la función u_2 es la única solución del problema

$$v_t(x,y,t) - \triangle_x v(x,y,t) = 0,\; t>0, \quad v(x,y,0) = \cos x \,\operatorname{sen} y,$$

calcularemos la expresión de u_2 como la única solución de este problema, dada en variables separadas. Así pues

$$u_2(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t).$$

Con lo cual se ha de verificar que

$$X(x)\,Y(y)\,T'(t) - (X''(x)\,Y(y) - X(x)\,Y''(y))\;T(t) = 0, \quad t>0, \quad x,\; y \in \mathbb{R}\,,$$

junto con

$$X(x)\,Y(y)\,T(0) = \cos x \,\operatorname{sen} y, \quad x,\; y\in\mathbb{R}\,.$$

Por lo tanto,

$$X(x) = c_1 \,\cos x, \qquad Y(y) = c_2 \,\operatorname{sen} y, \quad \text{con} \quad T(0) = \frac{1}{c_1\,c_2}.$$

Así pues deducimos que

$$X(x)\,Y(y)\,(T'(t) + 2\,T(t)) = 0, \quad t>0, \quad x,\; y\in\mathbb{R}\,,$$

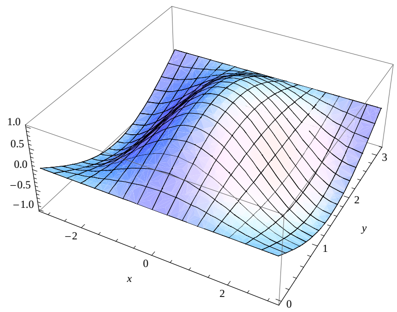

Figura 2.14: $u(x,y,0)$

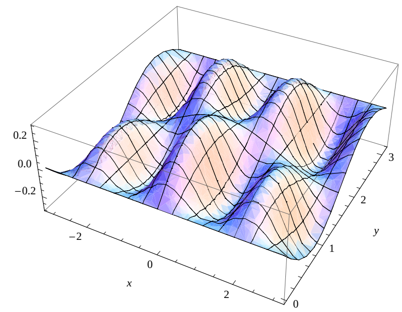

Figura 2.15: $u(x,y,1)$

con lo cual

$$T(t) = T(0)\, e^{-2\,t}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Concluyéndose que

$$u_2(x,y,t) = e^{-2\,t}\, \cos x \operatorname{sen} y.$$

Para el cálculo de u_1, debemos tener en cuenta que la función

$$v_1(x,y,t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} K\,(x-p, y-q, t)\, \cos 3\,p\, \operatorname{sen} 2\,q\, dp\, dq$$

es la solución del problema

$$v_t(x,y,t) - \triangle_x\, v(x,y,t) = 0,\ t > 0, \quad v(x,y,0) = \cos 3\,x\, \operatorname{sen} 2\,y.$$

Razonando del mismo modo que en el cálculo de la función u_2, deducimos que

$$v_1(x,y,t) = e^{-13\,t}\, \cos 3x\, \operatorname{sen} 2y.$$

Por consiguiente

$$u_1(x,y,t) = \int_0^t e^s\, e^{-13\,(t-s)}\, \cos 3x\, \operatorname{sen} 2y\, ds = \frac{e^t - e^{-13\,t}}{14}\, \cos 3x\, \operatorname{sen} 2y$$

y la solución buscada (véanse las figuras 2.14) y 2.15) viene dada por la expresión

$$u(x,y,t) = \frac{e^t - e^{-13\,t}}{14}\, \cos 3x\, \operatorname{sen} 2y + e^{-2\,t}\, \cos x\, \operatorname{sen} y.$$

$\square$

Ejercicio 2.3.5 *Resolver la siguiente ecuación bidimensional*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t(x,y,t) - \triangle_x\, u(x,y,t) & = & t\, \cosh 3x\, \operatorname{sen} 2y, & (x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, t > 0, \\ u(x,y,0) & = & \cos x\, \operatorname{senh} y, & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right.$$

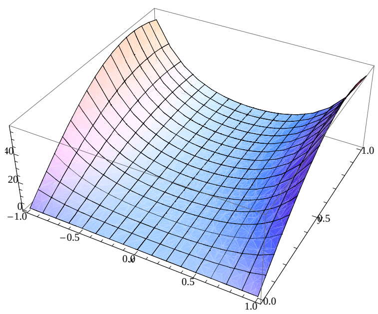

Figura 2.16: $u(x, y, 0)$

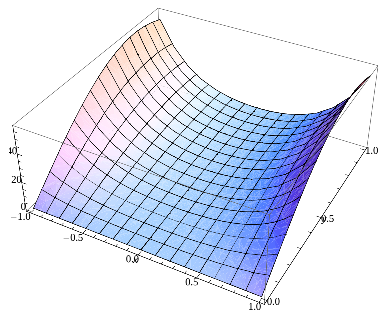

Figura 2.17: $u(x, y, 1)$

Solución:

Nuevamente la única solución viene dada por la expresión

$$u(x, y, t) = u_1(x, y, t) + u_2(x, y, t),$$

donde

$$u_1(x, y, t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} K\,(x - p, y - q, t - s)\, s\, \cosh 3\, p\ \mathrm{sen}\, 2\, q\, dp\, dq\, ds$$

y

$$u_2(x, y, t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} K\,(x - p, y - q, t)\, \cos p\ \mathrm{senh}\, q\, dp\, dq,$$

siendo K el núcleo integral dado por la expresión (2.45). Dado que u_2 resuelve la ecuación

$$v_t(x, y, t) - \triangle_x\, v(x, y, t) = 0,\ t > 0, \quad v(x, y, 0) = \cos x\ \mathrm{senh}\, y,$$

buscamos u_2 dada en variables separadas:

$$u_2(x, y, t) = X(x)\, Y(y)\, T(t), \quad t > 0, \quad x,\ y \in \mathbb{R}\,.$$

Necesariamente se debe verificar

$$X(x) = c_1\, \cos x \qquad Y(y) = c_2\ \mathrm{senh}\, y, \quad \text{con} \quad T(0) = \frac{1}{c_1\, c_2}.$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$X(x)\, Y(y)\, T'(t) = 0, \quad t > 0, \quad x,\ y \in \mathbb{R}\,,$$

y

$$T(t) = T(0) \quad t > 0.$$

Por consiguiente

$$u_2(x, y, t) = \cos x\, \mathrm{senh}\, y.$$

Por otro lado, dado que

$$v_1(x,y,t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} K\,(x-p, y-q, t)\, \cosh 3\,p\, \operatorname{sen} 2\,q\, dp\, dq,$$

es la solución del problema

$$v_t(x,y,t) - \triangle_x\, v(x,y,t) = 0,\ t>0, \quad v(x,y,0) = \cosh 3\,x\, \operatorname{sen} 2\,y,$$

procediendo como en el caso anterior, obtenemos que

$$v_1(x,y,t) = e^{5\,t}\, \cosh 3x\, \operatorname{sen} 2y.$$

Con lo cual, deducimos que

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t) &= \int_0^t s\, e^{5\,(t-s)}\, \cosh 3x\, \operatorname{sen} 2y\, ds \\ &= e^{5\,t}\, \cosh 3x\, \operatorname{sen} 2y \int_0^t s\, e^{-5\,s}\, ds \\ &= -\frac{5\,t + 1 - e^{5\,t}}{25}\, \cosh 3x\, \operatorname{sen} 2y. \end{aligned}$$

La solución buscada será (véanse las figuras 2.16 y 2.17)

$$u(x,y,t) = \cos x\, \operatorname{senh} y - \frac{5\,t + 1 - e^{5\,t}}{25}\, \cosh 3x\, \operatorname{sen} 2y.$$

□

Ejercicio 2.3.6 *Resolver la siguiente ecuación bidimensional*

$$\begin{cases} 2\,u_t(x,y,t) - \triangle_x\, u(x,y,t) = e^{-t} \cos 2x \operatorname{sen} 3y, & (x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ t>0, \\ u(x,y,0) = \cos\,(x+y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Solución:

En este caso, para poder aplicar la expresión de la solución en función del núcleo integral K dado por la expresión (2.45), debemos eliminar la constante 2 normalizando el parámetro. Para ello, debemos tener en cuenta que $u(x,y,t)$ es una solución del problema considerado si y sólo si

$$v(x,y,t) \equiv u(x,y,2\,t)$$

es solución de la ecuación

$$\begin{cases} v_t(x,y,t) - \triangle_x\, v(x,y,t) = e^{-2\,t} \cos 2x \operatorname{sen} 3y, & (x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ t>0, \\ v(x,y,0) = \cos\,(x+y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Esta última ecuación tiene solución única dada por la expresión

$$v(x,y,t) = v_1(x,y,t) + v_2(x,y,t),$$

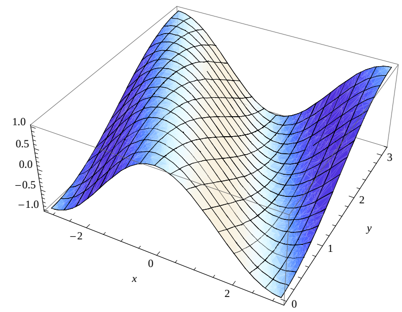

Figura 2.18: $u(x, y, 0)$

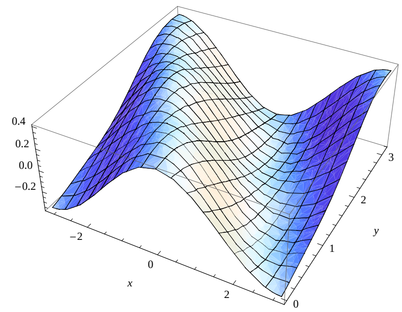

Figura 2.19: $u(x, y, 1)$

donde

$$v_1(x, y, t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} K\,(x-p, y-q, t-s)\, e^{-2\,s}\, \cos 2\,p\, \operatorname{sen} 3\,q\, dp\, dq\, ds$$

y

$$v_2(x, y, t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} K\,(x-p, y-q, t)\, \cos{(p+q)}\, dp\, dq.$$

Dado que v_2 resuelve la ecuación

$$v_t(x, y, t) - \triangle_x\, v(x, y, t) = 0,\ t > 0, \quad v(x, y, 0) = \cos{(x+y)},$$

intentamos calcular v_2 del siguiente modo:

$$v_2(x, y, t) = F(x+y)\, T(t), \quad t > 0, \quad x,\ y \in \mathbb{R}\,.$$

Caso de existir una solución de este tipo tenemos que

$$F(z) = \frac{\cos z}{T(0)}.$$

Dado que $\Delta\, F(x+y) = -2\, F(x+y)$, deducimos que la función T debe verificar Por lo tanto, obtenemos que

$$T'(t) + 2\, T(t) = 0, \quad t > 0,$$

con lo cual

$$T(t) = T(0)\, e^{-2\,t}, \quad t > 0$$

y

$$v_2(x, y, t) = e^{-2\,t}\, \cos{(x+y)}.$$

Para el cálculo de la función v_1, usamos el hecho de que la función

$$w_1(x, y, t) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} K\,(x-p, y-q, t)\, \cos 2\,p\, \operatorname{sen} 3\,q\, dp\, dq,$$

resuelve el problema

$$v_t(x,y,t) - \triangle_x v(x,y,t) = 0,\ t > 0, \quad v(x,y,0) = \cos 2\,x\ \mathrm{sen}\,3\,y.$$

De forma análoga a como se ha procedido en los ejercicios anteriores, llegamos a que

$$w_1(x,y,t) = e^{-13\,t}\ \cos 2\,x\ \mathrm{sen}\,3\,y.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} v_1(x,y,t) &= \int_0^t e^{-2\,s}\, e^{-13\,(t-s)}\ \cos 2\,x\ \mathrm{sen}\,3\,y\,ds \\ &= \frac{e^{-2\,t} - e^{-13\,t}}{11}\ \cos 2\,x\ \mathrm{sen}\,3\,y. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución del problema considerado (véanse las figuras 2.18 y 2.19) resulta ser

$$u(x,y,t) = v(x,y,t/2) = e^{-t}\ \cos(x+y) + \frac{e^{-t} - e^{-13\,t/2}}{11}\ \cos 2\,x\ \mathrm{sen}\,3\,y.$$

□

Ejercicio 2.3.7 *Resolver la siguiente ecuación tridimensional*

$$\left\{ \begin{aligned} u_t(x,y,z,t) - \triangle_x u(x,y,z,t) &= e^t\ \mathrm{sen}\,(x+y+z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ t > 0, \\ u(x,y,z,0) &= \cos(x+y+z), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \right.$$

Solución:

La única solución de este problema viene dada por la expresión

$$u(x,y,z,t) = u_1(x,y,z,t) + u_2(x,y,z,t),$$

donde

$$u_1(x,y,z,t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K\,(x-p, y-q, z-r, t-s)\, e^s\ \mathrm{sen}\,(p+q+r)\,dp\,dq\,dr\,ds$$

y

$$u_2(x,y,z,t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} K\,(x-p, y-q, z-r, , t)\ \cos(p+q+r)\,dp\,dq\,dr.$$

Al estar ante una ecuación tridimensional, el núcleo integral K será igual a

$$K(x,y,z,t) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4\,t}}}{(\sqrt{4\,\pi\,t})^3}. \tag{2.46}$$

Dado que la función u_2 resuelve el problema

$$v_t(x,y,z,t) - \triangle_x v(x,y,z,t) = 0,\ t > 0, \quad v(x,y,z,0) = \cos(x+y+z),$$

intentaremos calcular la expresión de la función u_2 dada del siguiente modo:

$$u_2(x,y,z,t) = F(x+y+z)\,T(t).$$

Las funciones F y T han de satisfacer necesariamente las siguientes igualdades:

$$F(x+y+z)\,T'(t) - \Delta\,F(x+y+z)\,T(t) = 0, \quad t>0, \quad x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\,,$$

y

$$F(x+y+z)\,T(0) = \cos(x+y+z), \quad x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\,.$$

En consecuencia

$$F(\xi) = \frac{\cos\xi}{T(0)}.$$

Por lo tanto

$$T'(t) + 3\,T(t) = 0, \quad t>0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$T(t) = T(0)\,e^{-3\,t}, \quad t>0.$$

De este modo deducimos que

$$u_2(x,y,z,t) = e^{-3\,t}\,\cos(x+y+z).$$

Por otro lado, la función

$$v_1(x,y,z,t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} K\,(x-p, y-q, z-r, t)\ \operatorname{sen}(p+q+r)\,dp\,dq\,dr$$

es la solución del problema

$$v_t(x,y,z,t) - \triangle_x\,v(x,y,z,t) = 0,\ t>0, \quad v(x,y,z,0) = \operatorname{sen}(x+y+z).$$

Al igual que en el caso anterior concluimos que

$$v_1(x,y,z,t) = e^{-3\,t}\,\operatorname{sen}(x+y+z).$$

De esta expresión deducimos que

$$u_1(x,y,z,t) = \int_0^t e^s\,e^{-3\,(t-s)}\ \operatorname{sen}(x+y+z)\,ds = \frac{e^t - e^{-3\,t}}{4}\ \operatorname{sen}(x+y+z),$$

con lo que la solución buscada viene dada por la expresión

$$u(x,y,z,t) = e^{-3\,t}\,\cos(x+y+z) + \frac{e^t - e^{-3\,t}}{4}\ \operatorname{sen}(x+y+z).$$

$\square$

Ejercicio 2.3.8 *Resolver la siguiente ecuación de dimensión tres*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t(x,y,z,t) - \triangle_x \, u(x,y,z,t) & = & 1, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ t>0, \\ u(x,y,z,0) & = & e^{-(x^2+y^2+z^2)}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{array} \right.$$

Solución:

De nuevo, la única solución de este problema viene dada por la expresión

$$u(x,y,z,t) = u_1(x,y,z,t) + u_2(x,y,z,t),$$

siendo, en este caso,

$$u_1(x,y,z,t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K\,(x-p, y-q, z-r, t-s)\, dp\, dq\, dr\, ds,$$

$$u_2(x,y,z,t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} K\,(x-p, y-q, z-r, t)\, e^{-(p^2+q^2+r^2)}\, dp\, dq\, dr,$$

y el núcleo integral K dado por la expresión (2.46).

Del hecho de que

$$\int_{\mathbb{R}^3} K\,(z,t)\, dz = 1, \quad \text{para todo} \quad t>0, \tag{2.47}$$

deducimos que

$$u_1(x,y,z,t) \equiv \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^3} K\,(x-p, y-q, z-r, t-s)\, dp\, dq\, dr \right) ds = t.$$

Para el cómputo de la función u_2, denotando por $X \equiv (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $P \equiv (p,q,r) \in \mathbb{R}^3$, tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{array}{rcl} u_2(X,t) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} K\,(X-P,t)\, e^{-\|P\|^2}\, dP \\ & = & \displaystyle\frac{1}{(\sqrt{4\,\pi\,t})^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{\|X-P\|^2}{4\,t}}\, e^{-\|P\|^2}\, dP. \end{array}$$

Para la resolución de esta integral debemos tener en cuenta las siguientes igualdades

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\frac{\|X-P\|^2}{4\,t} + \|P\|^2 & = & \displaystyle\frac{1+4\,t}{4\,t} \left(\frac{\|X\|^2}{1+4\,t} - 2 < \frac{X}{1+4\,t}, P > + \|P\|^2 \right) \\ & = & \displaystyle\frac{1+4\,t}{4\,t} \left\| \frac{X}{1+4\,t} - P \right\|^2 + \frac{\|X\|^2}{4\,t+1} \\ & = & \displaystyle\frac{\left\| \frac{X}{\sqrt{1+4\,t}} - \sqrt{1+4\,t}\, P \right\|^2}{4\,t} + \frac{\|X\|^2}{4\,t+1}. \end{array}$$

donde, por $<\cdot,\cdot>$ se denota el producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Por consiguiente, usando la propiedad (2.47), llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
u_2(X,t) &= \frac{e^{-\frac{\|X\|^2}{1+4\,t}}}{(\sqrt{4\,\pi\,t})^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{\left\|\frac{X}{\sqrt{1+4\,t}}-\sqrt{1+4\,t}\,P\right\|^2}{4\,t}}\,dP \\
&= \frac{e^{-\frac{\|X\|^2}{1+4\,t}}}{(\sqrt{4\,\pi\,t})^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{\left\|\frac{X}{\sqrt{1+4\,t}}-Q\right\|^2}{4\,t}}}{(\sqrt{1+4\,t})^3}\,dQ \\
&= \frac{e^{-\frac{\|X\|^2}{1+4\,t}}}{(\sqrt{1+4\,t})^3}.
\end{aligned}$$

Así pues la solución buscada viene dada por la expresión

$$u(x,y,z,t) = t + \frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{1+4\,t}}}{(\sqrt{1+4\,t})^3}.$$

□

2.3.2. Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales:

1.
$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \dfrac{1}{1+t^2}, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\[2ex] u(x,0) = -\operatorname{sen} 5\,x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución: $u(x,t) = \arctan t - e^{-25\,t}\,\operatorname{sen} 5\,x$.

2.
$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \dfrac{t\,e^{-t}}{1+t^2}\,\operatorname{sen} x, & t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\[2ex] u(x,0) = \cosh 3\,x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución: $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\,\operatorname{sen} x\, e^{-t}\,\log(1+t^2) + e^{9\,t}\,\cosh 3\,x$.

3.
$$\begin{cases} u_t(x,y,t) - \Delta_x\, u(x,y,t) = e^t, & (x,y)\in\mathbb{R}^2;\ t>0, \\[2ex] u(x,y,0) = \cos x\,\operatorname{sen} y, & (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Solución: $u(x,y,t) = e^t - 1 + e^{-2\,t}\cos x \operatorname{sen} y$.

4.

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) - \Delta_x u(x,y,t) = (1+5\,t)\,\cos x \,\mathrm{sen}\, 2\,y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ t>0, \\ u(x,y,0) = \mathrm{sen}\,(x-y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Solución: $u(x,y,t) = e^{-2\,t}\,\mathrm{sen}\,(x-y) + t\,\cos x\,\mathrm{sen}\,2\,y$.

5.

$$\begin{cases} u_t(x,y,z,t) - \Delta_x u(x,y,z,t) = (t+1)\,e^{-t}\,\cosh(x+z)\,\mathrm{sen}\,2\,y, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ t>0, \\ u(x,y,0) = \mathrm{sen}\,(x-2\,z), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Solución: $u(x,y,z,t) = t\,e^{-t}\,\cosh(x+z)\,\mathrm{sen}\,2\,y + e^{-5t}\,\mathrm{sen}\,(x-2\,z)$.

6.

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) - \Delta_x u(x,y,t) = 2\,(1+t)\,\mathrm{sen}\,z, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ t>0, \\ u(x,y,0) = \cos(y+z)\,\mathrm{senh}\,x, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Solución: $u(x,y,t) = 2\,t\,\mathrm{sen}\,z + e^{-t}\cos(y+z)\sinh x$.