

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales en Maple

Jonathan Makuc (*Jonathan.Makuc@al.udp.cl*)

Esta guía tiene como objetivo mostrar algunas aplicaciones básicas del programa a las Ecuaciones Diferenciales. Los tópicos contenidos son:

- Como ingresar una ecuación diferencial
- Obtener el tipo de Ec. Diff
- Resolución de Ec. Diff Ordinarias (ODE – Ordinary Differential Equation)
- Resolución básica de Ec. Diff Parciales
- Resolución de Ec. Diff mediante aproximaciones numéricas.
- Graficación de Soluciones

La librería de interés es **DEtools**.

¡ CARGUE ESTA LIBRERÍA ANTES DE USAR ALGUN COMANDO DE ESTA GUÍA !

Como Ingresar una Ecuación Diferencial

Para ingresar una Ec. Diff, debemos entender que el programa no asume nada, por lo tanto si tenemos una función f que depende de x ($f(x)$) debemos explicitar esta dependencia a Maple.

Ej: $dx(y-1) + dy(x+2) = 0$

Lo primero que debemos hacer es llevarlo a la forma $\frac{y-1}{x+2} = -\frac{dy}{dx}$

Nosotros sabemos que la solución que estamos buscando es una expresión $y(x)$, por lo tanto escribimos en Maple:

> **ec1:=(y(x)-1)/(x+2)=-diff(y(x),x);**
$$ec1 := \frac{y(x)-1}{x+2} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)$$

Para una ecuación de segundo grado como $\ddot{\mathbf{q}} + \frac{g}{l} \text{sen}(\mathbf{q}) = 0$ donde $\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2}$, una forma de ingresarla sería:

> **ec2:=diff(theta(t), t\$2)+g/l*sin(theta(t))=0;**
$$ec2 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t)\right) + \frac{g \sin(\theta(t))}{l} = 0$$

Obtener el tipo de Ecuación Diferencial

Nos introducimos ahora en el la librería **DEtools** de Maple, por lo tanto la cargamos.

```
> with(DEtools):
```

Se ha utilizado dos punto en lugar de punto y coma para ahora espacio y no presentar diferencias con las variadas versiones de Maple. Si Ud. Desea ver los comandos que incluye esta librería en su versión, solo reemplace los dos puntos por punto y coma.

Con el simple uso del comando 'odeadvisor' podemos averiguar que tipo de Ec. Diff estamos trabajando. Usando los mismo ejemplo anteriores:

```
> odeadvisor(ec1);  
[_separable]
```

Nos entrega que la ecuación 'ec1', es decir, $\frac{y-1}{x+2} = -\frac{dy}{dx}$ es de variable separable, lo cual es correcto.

Analizando la segunda ecuación.

```
> odeadvisor(ec2);  
[_2nd_order, _missing_x], [_2nd_order, _reducible, _mu_x_y1]]
```

Obtenemos que es de segundo orden con un término 'x' no presente. También es considerada como una ecuación de segundo orden reducible. El tercer término se hace relación al factor integrante a utilizar.

Este comando ha evolucionado con las versiones de Maple. Aquí (y en toda la guía) hemos presentado la salida da la versión 7.00. Veamos que ocurre con la versión 5.00:

```
> odeadvisor(ec2);  
[_2nd_order, _missing_x], [_2nd_order, _with_linear_symmetries]]
```

Obtenemos resultados diferentes. También identifica a la ecuación como de segundo grado con termino 'x' ausente, pero a hora encuentra 'simetrías lineales' en ella.

Analicemos otras ecuaciones conocidas. Aquí introducimos otras formas de ingresar las ecuaciones a Maple.

```
> ec3:=D(y)(x)=(x^2-y(x)^2)/(x*y(x));  
odeadvisor(ec3);
```

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

$$ec3 := D(y)(x) = \frac{x^2 - y(x)^2}{x y(x)}$$

```
[_homogeneous, class A], _rational, _Bernoulli]
```

> **ec4:=Diff(y(x),x)=(x+y(x)-3)/(x-y(x)-1);**
odeadvisor(ec4);

$$ec4 := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{x + y(x) - 3}{x - y(x) - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$$

[[_homogeneous, class C], _rational, [_Abel, 2nd type, class A]]

> **ec5:=D(y)(x)+p*y(x)=q;**
odeadvisor(ec5);

$$ec5 := D(y)(x) + p y(x) = q$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot p = q$$

[_quadrature]

> **ec6:=D(y)(x)+P(x)*y(x)=Q(x);**
odeadvisor(ec6);

$$ec6 := D(y)(x) + P(x) y(x) = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = Q(x)$$

[_linear]

Truco de teclado: hemos realizado dos comandos por grupo de ejecución (el '>' que presenta Maple). Para hacer esto, presione SHIFT – ENTER al final de la línea y una nueva línea se agregará **sin ejecutar el comando que antecede**.

Cabe mencionar que Maple conoce la forma de muchas otras Ec. Diff, como Riccati, Bernoulli, exacta, etc. Si desea conocer que tipos de ecuaciones maneja su versión de Maple, consulte la ayuda en la sección Differential Equations → Classifying ODEs → Overview.

Como resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs)

Para resolver ODEs (Ordinary Differential Equations), utilizamos el comando 'dsolve'.

Para una sola ecuación la sintaxis es muy simple como veremos a continuación. Resolvamos algunas de las ecuaciones antes planteadas.

> **dsolve(ec1);**

$$y(x) = \frac{x + _C1}{x + 2}$$

> **dsolve(ec3);**

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2x^4 + 4_CI}}{x}, y(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2x^4 + 4_CI}}{x}$$

> **dsolve(ec6);**

$$y(x) = \left(\int Q(x) e^{\left(\int P(x) dx \right)} dx + _CI \right) e^{\left(\int -P(x) dx \right)}$$

Notamos que el programa obtiene ambas raíces en el caso de la ecuación 3 y aplica la fórmula correspondiente en la ecuación 6. Tampoco omite las constantes de integración como lo hace al integral directamente una función.

Otra forma de encontrar soluciones a Ec. Diff. con forma conocida, ya sea por experiencia o con el uso de 'odeadvisor', es resolverlas con los comandos especializados de Maple. En las versiones actualizadas del programa, los resultados en muchos de los casos son idénticos por los 2 métodos, pero en ocasiones varía, dejando entrever el funcionamiento interno del software.

Tomemos por ejemplo la siguiente ecuaciones de Bernoulli: $y' + \cos(x) \cdot y = \cos(x) \cdot y^3$
La ingresamos y resolvemos por el método ya mencionado.

> **ec7:=diff(y(x),x)+cos(x)*y(x)=cos(x)*y(x)^3;**

$$ec7 := \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + \cos(x) y(x) = \cos(x) y(x)^3$$

> **dsolve(ec7);**

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{(2 \sin(x))} _CI}}, y(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 + e^{(2 \sin(x))} _CI}}$$

Luego apliquemos el comando específico de resolución para ecuaciones de Bernoulli.

> **bernoullisol(ec7, y(x));**

$$\left\{ y(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 + e^{(2 \sin(x))} _CI}}, y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{(2 \sin(x))} _CI}} \right\}$$

Idéntico. Veamos ahora que sucede si probamos la versión 5.00 del programa.

> **bernoullisol(ec7, y(x));**

$$\left\{ y(x) = 0, \frac{1}{y(x)^2} = 1 + e^{(2 \sin(x))} _C1 \right\}$$

Entrega 2 soluciones posible que satisfacen: una trivial y otra que la misma obtenida con la versión 7.00 pero sin despejar.

Así como existe 'bernoullisol', Maple dispone de muchos otros comandos para solucionar Ec. Diff. específicas que se pueden consultar en la ayuda: Differential Equations > DEtools > Solving Methods

Cuando trabajamos con sistemas de ecuaciones, es análogo a como lo hacemos con ecuaciones no diferenciales.

> **ecA:=diff(y(t),t)*x(t)=2;**

$$ecA := \left(\frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) x(t) = 2$$

> **ecB:=diff(x(t),t)=x(t)^2;**

$$ecB := \frac{\partial}{\partial t} x(t) = x(t)^2$$

> **dsolve({ecA, ecB}, {x(t), y(t)});**

$$\left[\left\{ x(t) = \frac{1}{-t - C2} \right\}, \left\{ y(t) = \int 2 \frac{1}{x(t)} dt + C1 \right\} \right]$$

Aquí hemos encontrado soluciones generales. Si necesitamos encontrar una solución particular, simplemente agregamos la condición al comando junto con la ecuación a resolver.

Tomando como ejemplo la ecuación 3, queremos que la solución pase por el punto (1,0)

> **dsolve({ec3, y(1)=0}, {y(x)});**

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2x^4 - 2}}{x}, y(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2x^4 - 2}}{x}$$

Para encontrar el valor de la constante, este caso es fácil de calcular inclusive mentalmente, pero en otras ocasiones, se podría usar el siguiente procedimiento.

Tomando nuevamente la ecuación 3:

Guardamos el resultado en una variable

> **res:=dsolve(ec3);**

$$res := y(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2x^4 + 4 - C1}}{x}, y(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2x^4 + 4 - C1}}{x}$$

Reemplazamos el `_C1` por otra variable que arbitrariamente llamamos '*constante*'. Esto se hace ya que las variables con el símbolo '_' antepuesto que entrega el programa, son protegidas, y no se puede operar con ellas.

> `subs(_C1=constante, res[1]);`

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2x^4 + 4 \text{constante}}}{x}$$

Reemplazamos los valores de nuestras condiciones.

> `subs(y(x)=0, x=1, %);`

$$0 = -\frac{1}{2} \sqrt{2 + 4 \text{constante}}$$

Resolvemos para que valores de la '*constante*' se cumple nuestra condición. El resultado lo guardamos en otra variable arbitraria que llamaremos '*cte*', el cual es el valor que buscamos.

> `cte:=solve(%, constante);`

$$\text{cte} := \frac{-1}{2}$$

Análogo para el sistema de ecuaciones descrito anteriormente, con las condiciones:

$$x'(1) = 1 \quad y \quad y(0) = 0$$

> `dsolve({ecA, ecB, D(x)(1)=1, y(0)=0}, {x(t), y(t)});`

$$\{y(t) = -t^2 + 4t, x(t) = \frac{1}{-t+2}\}, \{y(t) = -t^2, x(t) = -\frac{1}{t}\}$$

Resolución Básica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Para resolver este tipo de ecuaciones, utilizaremos el comando '*pdsolve*'.

Sea la función $z = z(x,y)$ y la ecuación $\frac{d^2 z}{dx dy} - y \frac{dz}{dy} = \mathbf{p}$ y deseamos encontrar una expresión para z .

Acá debemos especificar cual es la función dependiente que estamos buscando.

> `ec8:=diff(z(x,y), x,y)+y*diff(z(x,y),y)=Pi;`

$$\text{ec8} := \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} z(x, y) \right) + y \left(\frac{\partial}{\partial y} z(x, y) \right) = \pi$$

> `pdsolve(ec8, z(x,y));`

$$z(x, y) = _F2(x) + \pi \ln(y) + \int e^{(-y x)} _F1(y) dy$$

Podemos observar que la solución que entrega el programa contiene dos variables que no estaban en la ecuación original, $_F1$ y $_F2$. Estas son funciones arbitrarias que forman parte de la solución y dependen de la variable entre paréntesis; en este caso, de 'y' y 'x' respectivamente.

El método es análogo para un sistema de ecuaciones (**no disponible en Maple 5**).

> **ec9:=diff(theta(t,s), t,s)+diff(phi(t,s),t,s)=cte*t;**

$$ec9 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \theta(t, s) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \phi(t, s) \right) = cte t$$

> **ec10:=diff(theta(t,s),s)-diff(phi(t,s),t)=0;**

$$ec10 := \left(\frac{\partial}{\partial s} \theta(t, s) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, s) \right) = 0$$

> **pdsolve({ec9, ec10}, {theta(t,s), phi(t,s)});**

$$\{ \phi(t, s) = _F1(s) + _F2(s - t) + \frac{1}{6} cte t^3, \theta(t, s) = -_F2(s - t) + \frac{1}{2} cte t^2 s + _F3(t) \}$$

Resolución de Ec. Diff mediante aproximaciones numéricas

Para activar esta opción dentro de Maple, se debe incluir la opción 'type=numeric'. Existen variados métodos numéricos disponibles para realizar estos cálculos. Por defecto el programa utiliza el 'rkf45'. Para más información sobre como operan los distintos procedimientos, consulte la ayuda en *Differential Equations > dsolve > numeric*.

Como sabemos para obtener una aproximación numérica a un valor de una solución de una Ec. Diff, se deben establecer condiciones iniciales al problema. Tomemos la ecuación 2 antes declarada.

> **ec2;**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) + \frac{g \sin(\theta(t))}{l} = 0$$

Fijemos los valores de las constantes $g=9,8$ y $l=1$, y establezcamos las siguiente condiciones

iniciales: $\mathbf{q}(0) = \frac{\mathbf{p}}{4} \wedge \dot{\mathbf{q}}(0) = 0$

> **g:=9.8; l:=1;**

$g := 9.8$

$l := 1$

> **ec2;**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) + 9.8 \sin(\theta(t)) = 0$$

‘Resolvamos’ ahora numéricamente la ecuación.

```
> f:=dsolve({ec2, theta(0)=Pi/4, D(theta)(0)=0}, {theta(t)},  
type=numeric, output=listprocedure);
```

$$f := \left[t = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \theta(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}) \right]$$

Hemos colocado *resolvamos* entre comillas porque, como se puede ver, no resuelve nada. Simplemente el programa general código dentro de los procedimiento que podemos ver, para luego ser llamado y obtener el valor de la solución en un punto específico. Para poder rescatar estos procedimientos, debemos asignarlos a alguna variable.

Podemos reconocer 3 procedimientos en esta respuesta, uno para el parámetro que, como es de esperar, retornara el mismo valor que le entreguemos; y otros dos para el valor de $\mathbf{q}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$. Entonces debemos tener dos variables para guardar estos últimos procedimientos, que son los de interés.

```
> th:=subs(f, theta(t));
```

```
th := proc(t) ... end proc
```

```
> dth:=subs(f, diff(theta(t),t));
```

```
dth := proc(t) ... end proc
```

Luego para utilizar estos procedimientos, basta con utilizar las variables como funciones, como se muestra a continuación.

Los valores de $\mathbf{q}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$ cuanto $t = 0$.

```
> th(0);
```

```
.78539816339745
```

$$\left(\frac{P}{4} \approx 0,78539816 \right)$$

```
> dth(0);
```

Se comprueban nuestras condiciones iniciales. Ahora probemos con $t=10$.

```
> th(10);
```

```
.201796688280545117
```

```
> dth(10);
```

```
2.31150108070641824
```

Luego podemos obtener cualquier valor de \mathbf{q} o su derivada.

Como ya habíamos mencionado, Maple posee más de un método numérico de resolución. Sucede a menudo, especialmente cuando se trabaja con sistema de ecuaciones, que un método en particular es incapaz de resolver el problema. Por lo tanto, nos vemos forzados a utilizar otro. Para hacer esto se debe agregar una opción extra al comando 'dsolve' que es **method=método**. Otros métodos disponibles son: *dverk78*, *classical*, *gear*, *lsode* y *taylorseries*.

Ej:

```
> f:=dsolve({ec2, theta(0)=Pi/4, D(theta)(0)=0}, {theta(t)},  
type=numeric, output=listprocedure, method=classical);
```

$$f := \left[t = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \theta(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}) \right]$$

La salida es idéntica, pero los procedimientos que se han creado son distintos. Para poder recuperarlos, solo se debe seguir el procedimiento antes descrito.

Consulte la ayuda del programa para detalles de cómo ocupar cada método.

Graficación de Soluciones

Maple posee la capacidad de poder graficar las soluciones de una ODE o un sistema de ODEs sin resolver las ecuaciones, sino de forma numérica y automática.

Sigamos utilizando la ecuación 2. Vamos a graficar su solución entre $t=0..10$.

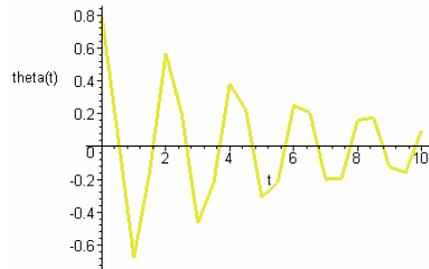
La sintaxis que se debe utilizar es:

```
DEplot( {ecuaciones}, {var. Ind}, intervalo ind., [[cond. Iniciales]]);
```

- Ecuaciones pueden ser una o varias.
- Variables independientes deben haber tantas como ecuaciones
- El intervalo de la variable independiente (t en el caso de 'ec2') debe ir en ese lugar.
- Las condiciones iniciales deben ir entre doble paréntesis cuadrado.

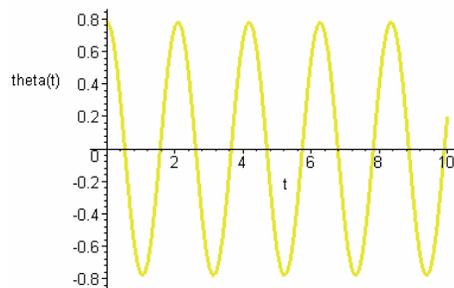
Volviendo al ejemplo:

```
> DEplot({ec2}, {theta(t)}, t=0..10, [[theta(0)=Pi/4, D(theta)(0)=0]]);
```



El gráfico notamos que no tiene mucha precisión, pero esto se puede arreglar fácilmente especificando que deseamos que se calculen un mayor número de puntos. Agregamos entonces la opción *stepsize=0.2*, que especifica que queremos que se tomen punto en la variable independiente a una distancia de 0.2 unidades uno del otro (este número puede variarlo como desee). Téngase en cuenta que cuanto menor sea *stepsize*, más puntos se piden y, por lo tanto, más se demorara el computador en entregar el resultado.

```
> DEplot({ec2}, {theta(t)}, t=0..10, [[theta(0)=Pi/4, D(theta)(0)=0]],  
stepsize=0.1);
```



Notamos una gran diferencia entre los 2 gráficos. El primero muestra una oscilación que pareciese estar amortiguada, mientras que el segundo no.

Dado que la ecuación que hemos estado trabajando corresponde a la ecuación diferencial del movimiento de un péndulo plano simple, este no es amortiguado. Por lo tanto el primer gráfico no muestra de forma fidedigna la forma de la solución debido a su baja precisión.

Téngase en cuenta que Maple, especialmente en este tema, puede ser muy sensible al caos de las soluciones debido que *aproxima* los valores. Una forma de disminuir estos errores es ampliar la cantidad de dígitos con los cuales trabaja el programa por defecto.

> **Digits:=14;**

Digits := 14

Este comando establecería una precisión de 14 cifras significativas para trabajar. Nuevamente se debe ser cuidadoso con la cantidad de dígitos, para Maple 5 el paso de 14 a 15 dígitos involucra un tiempo de proceso al menos 5 veces mayor en algunos cálculos.

Para sistemas de ecuaciones se debe tener una sola consideración. El programa grafica solo una de las dos soluciones: la que aparece primero en la lista de variables independientes.

Para este caso tomemos las siguientes ODEs de segundo orden acopladas.

> **ec11:=(m[1]+m[2])*l[1]*diff(theta(t),t\$2)+m[2]*l[2]*diff(phi(t),t\$2)*cos(theta(t)-phi(t))+m[2]*l[2]*diff(phi(t),t)^2*sin(theta(t)-phi(t))+g*(m[1]+m[2])*sin(theta(t))=0;**

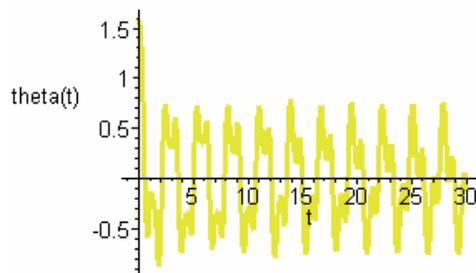
$$ec11 := 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) + 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right) \cos(\theta(t) - \phi(t)) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(t) \right)^2 \sin(\theta(t) - \phi(t)) + 39.2 \sin(\theta(t)) = 0$$

> **ec12:=m[2]*l[2]*diff(phi(t), t\$2)+m[2]*l[1]*diff(theta(t), t\$2)*cos(theta(t)-phi(t))-m[2]*l[1]*diff(theta(t),t)^2*sin(theta(t)-phi(t))+m[2]*g*sin(phi(t))=0;**

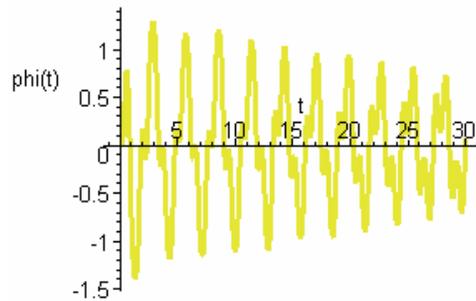
$$ec12 := 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right) + 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta(t) \right) \cos(\theta(t) - \phi(t)) - 3 \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta(t) \right)^2 \sin(\theta(t) - \phi(t)) + 29.4 \sin(\phi(t)) = 0$$

Al graficar sus soluciones sin resolver, obtenemos lo siguiente.

> **DEplot({ec11, ec12}, [theta(t), phi(t)], t=0..30, [[theta(0)=Pi/2, D(theta)(0)=0, phi(0)=0, D(phi)(0)=0]], stepsize=0.1);**

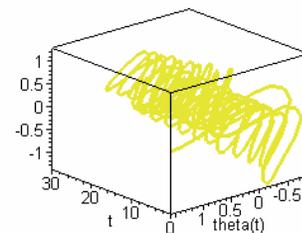
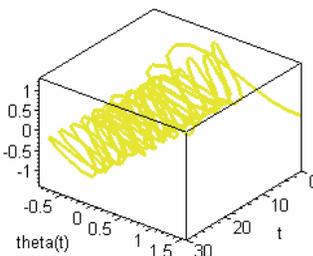
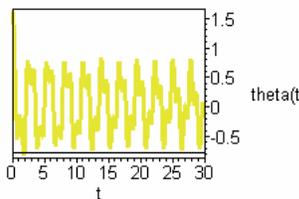
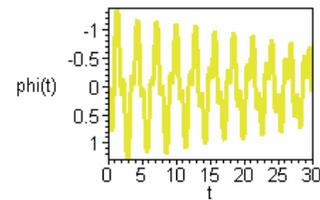
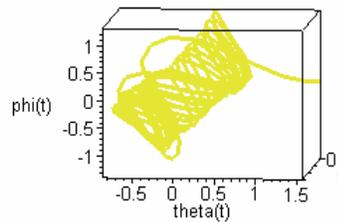
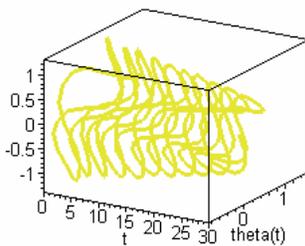


```
> DEplot({ec11, ec12}, [phi(t), theta(t)], t=0..30, [[theta(0)=Pi/2,
D(theta)(0)=0,phi(0)=0,D(phi)(0)=0]], stepsize=0.1);
```



Al tener dos variables dependientes y una tercera independiente, también podemos graficar estas soluciones en 3 dimensiones con el comando DEplot3d, de uso análogo a DEplot. A continuación se muestran varias vistas del mismo dibujo.

```
> DEplot3d({ec1, ec2}, [theta(t), phi(t)], t=0..30, [[theta(0)=Pi/2,
D(theta)(0)=0,phi(0)=0,D(phi)(0)=0]], stepsize=0.1);
```



También puede agregarse una opción adicional en DEplot para mostrar solos 2 de 3 variables (x(t), y(t) y z(t) pero solo se desea mostrar las 2 primeras) en un gráfico si así se requiere:
scene=[x(t), y(t)]

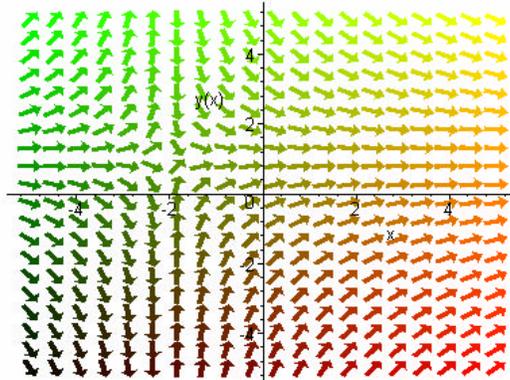
Para visualizar una representación del conjunto de curvas que son solución de una ecuación, tenemos los comandos *dfieldplot* y *phaseportrait*

En el caso de la ecuación 1 definida al inicio, se tiene:

> **ec1;**

$$\frac{y(x)-1}{x+2} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right)$$

> **dfieldplot(ec1, y(x), x=-5..5, y=-5..5, arrows=large, color=[(x), (y), 0]);**



Lo cual corresponde con la solución obtenida anteriormente. Dejamos al lector el análisis de los resultados en conjunto con estos gráficos.

Ahora para ecA y ecB. Nótese que aquí aparece una curva de solución particular, ya que en el comando especificamos condiciones iniciales.

> **ecA;**

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} y(t)\right) x(t) = 2$$

> **ecB;**

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t) = x(t)^2$$

> **phaseportrait([ecA, ecB], [x(t), y(t)], t=0..10, [[x(0)=1, y(0)=0]], x=-2..5, y=-5..5);**

