TEMA 7:INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

7.1.- INTRODUCCIÓN.

La aproximación numérica de la integral definida se conoce como *integración o cuadratura numérica*. El segundo nombre procede de la antigüedad en relación con el cálculo de las áreas de las figuras curvas, cuyo ejemplo más notorio es el problema de la *cuadratura* del círculo (encontrar el cuadrado de área coincidente con la de un círculo dado). En este tema nos ocuparemos del cálculo aproximado del área bajo la curva $f(x)$ definida sobre un intervalo $[a,b]$ de la recta real, es decir:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

La integración numérica es una herramienta de gran utilidad para obtener valores aproximados de integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente, ya sea porque el integrando no tiene primitiva expresable analíticamente, o bien porque dicho integrando no se conoce en forma analítica sino en forma discreta (tabulada) –por ejemplo, datos procedentes de un experimento.

Dado que una integral es el límite de una suma infinita, es natural que su aproximación consista en una suma finita de muestras, ponderadas con pesos wi, del integrando f (xi). Dicha suma se denomina fórmula de cuadratura.

7.2.- FÓRMULAS DE CUADRATURA.

Definición. Supongamos que $a = x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$. Una fórmula del tipo

$$Q[f]=\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \cdots + w_n f(x_n)$$

de manera que
$$\int_a^b f(x)dx = Q[f] + E[f]$$

se denomina fórmula de integración numérica o de cuadratura. El término E[f] representa el error de truncatura de la fórmula; los valores {xk} (k = 1, ..., n) son los nodos (abscisas) de integración o cuadratura; y los valores {wk} (k = 1, ..., n) son los pesos de la fórmula.

Los nodos {xk} se eligen de diferentes maneras, dependiendo de las circunstancias en las que apliquemos una fórmula. Para la regla del trapecio o la regla de Simpson, los nodos se toman igualmente espaciados. Para las fórmulas de Gauss-Legendre, los nodos que se toman son raíces de polinomios de Legendre. Un aspecto importante en todas las aplicaciones será también la estimación del error cometido y el conocimiento del orden de precisión de la fórmula o regla utilizada.

Las reglas de cuadratura suelen estar basadas en la interpolación polinómica; se sustituye la función f (x) por el polinomio que interpola a f (x) en los nodos, y su integral es la aproximación buscada. Utilizando p.ej. la interpolación de Lagrange:

$$f(x) \approx p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_{n-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x)dx}_{w_i}$$

siendo $l_i(x)$ ($i = 1,...,n$) los polinomios de Lagrange (grado $n-1$) definidos por los n nodos utilizados. Nótese que con independencia de la función subintegral $f(x)$, los pesos de la fórmula coinciden con los valores de la integral de los polinomios de Lagrange en el intervalo.

La precisión de la aproximación está asociada con la capacidad de la regla para integrar exactamente polinomios; se genera así el concepto de grado polinomial.

Definición: Se denomina *grado polinomial* de una fórmula de cuadratura al número natural N que verifica $E[p_i] = 0$ para todo polinomio $p_i(x)$ de grado $i \leq N$, existiendo algún polinomio $p_{N+1}(x)$ de grado $N+1$ tal que $E[p_{N+1}] \neq 0$.

Es decir, el grado polinomial de una formula de cuadratura es el mayor grado de los polinomios que dicha fórmula integra exactamente. Como veremos posteriormente, en una formula de cuadratura de n nodos, el grado polinomial N no siempre coincide con el grado $n-1$ del polinomio que interpola $f(x)$ en los n nodos, sino que puede ser superior.

El error cometido por una fórmula de grado polinomial N verificará:

$$\left|E_N(f)\right| = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_N(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f(x) - p_N(x)\big)dx\right| \leq$$
$$\leq \int_a^b \left|f(x) - p_N(x)\right| dx = \int_a^b \left|e_N(x)\right| dx$$

Integrando la función error $e_N(x)$ asociada con la interpolación se puede obtener el término de error de las distintas fórmulas de cuadratura. Se puede demostrar que el error de truncatura de las fórmulas de cuadratura (interpolación polinómica) verifica:

$$E[f] = K f^{N+1)}(c)$$

donde K es una constante adecuada, N es el grado polinomial de la fórmula, y c es un punto del intervalo (a,b).

Las fórmulas de cuadratura basadas en la interpolación polinomial se clasifican en dos tipos que estudiaremos a continuación:

- Fórmulas de Newton-Cotes, con nodos igualmente espaciados.
- Fórmulas de Gauss, con nodos desigualmente espaciados.

7.3.- FÓRMULAS DE NEWTON-COTES.

Hemos visto que dado un número cualquiera n de nodos, siempre es posible determinar un polinomio de interpolación de grado $n-1$ y generar una fórmula de cuadratura de n puntos. Si los nodos x_i están igualmente espaciados en el intervalo $[a,b]$, las reglas resultantes se conocen como fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes. Diremos además que la fórmula es *cerrada* si los nodos incluyen a los extremos a y b del intervalo de integración; de no ser así, diremos que la fórmula es *abierta*. Se indican a continuación las formulas más simples (1, 2 y 3 nodos):

La fórmula abierta de 1 nodo:

$$n=1:\ \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = h\,f_1 \quad \text{(regla punto medio)} \tag{2}$$

La fórmula cerrada de 2 nodos:

$$n=2:\ \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) = \frac{h}{2}\big(f_1+f_2\big) \quad \text{(regla del trapecio)} \tag{3}$$

La fórmula cerrada de 3 nodos:

$$n=3:\ \begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) = \\ &= \frac{h}{3}\big(f_1+4f_2+f_3\big)\end{aligned} \quad \text{(regla de Simpson)} \tag{4}$$

donde $h=\dfrac{b-a}{n-1}$ es la distancia entre nodos en las fórmulas cerradas (trapecio y Simpson) y la longitud total del intervalo en la fórmula abierta del punto medio.

Las dos primeras fórmulas son inmediatas y representan al área de un rectángulo y un trapecio respectivamente; en la primera el integrando se aproxima por la recta horizontal (polinomio de grado cero) que pasa por el punto medio $(m,f(m))$ siendo $m=(a+b)/2$; en la segunda, el integrando se aproxima por la recta (polinomio de grado 1) que pasa por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$. La tercera fórmula no es tan evidente, pero lógicamente procede de integrar el polinomio de grado 2 definido por los 3 puntos $(a,f(a))$, $(m,f(m))$ y $(b,f(b))$, como fácilmente se puede comprobar. Los pesos de estas 3 reglas de cuadratura se ven directamente en las 3 fórmulas anteriores.

Determinación de los pesos.

En general, los pesos se pueden obtener de la integración de los polinomios de Lagrange (1) o mediante el método de los coeficientes indeterminados. Ilustraremos a continuación este último con la deducción de la regla de los 3 puntos.

Sea la regla de cuadratura:

$$\begin{aligned} I(f) = \int_a^b f(x)dx &\approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) = \\ &= w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3 \end{aligned} \qquad \text{con} \begin{cases} x_1 = a, \quad x_3 = b \\ x_2 = \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

donde los tres pesos w_1, w_2 y w_3 son a determinar. Se trata de que la regla integre correctamente los polinomios de grado tan alto como sea posible. Como disponemos de tres coeficientes a determinar (los tres pesos w_i), conseguiremos hacerlo de manera que la fórmula integre exactamente los polinomios con al menos otros tantos (tres) coeficientes, es decir, los polinomios de grado 2:

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Dada la propiedad aditiva de la integración, para ello basta que se integren exactamente los monomios $\{x^0, x^1, x^2\}$, que forman una base de los polinomios de grado 2. Estas 3 condiciones nos permitirán determinar los 3 pesos de la regla:

$$\int_a^b 1dx = b-a = w_1\cdot 1 + w_2\cdot 1 + w_3\cdot 1$$

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2} = w_1\cdot a + w_2\cdot\frac{a+b}{2} + w_3\cdot b$$

$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3} = w_1\cdot a^2 + w_2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + w_3\cdot b^2$$

En forma matricial, tenemos el siguiente *sistema lineal* de ecuaciones (Vandermonde):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & \dfrac{a+b}{2} & b \\ a^2 & \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 & b^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \dfrac{b^2-a^2}{2} \\ \dfrac{b^3-a^3}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = \dfrac{b-a}{6} \\ w_2 = \dfrac{2(b-a)}{3} \\ w_3 = \dfrac{b-a}{6} \end{cases}$$

que es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. De su resolución se obtienen los pesos de la regla de los 3 puntos, que lógicamente coinciden con los de la regla de Simpson, como es inmediato comprobar.

En general, cuando hay n pesos a determinar, se plantea la integración exacta de los n monomios de grado 0 hasta n–1, con lo que se obtiene un sistema de dimensión $n\times n$ cuya matriz de coeficientes es siempre regular (determinante de Vandermonde $\neq 0$), y por tanto cuya solución es única.

Precisión de las fórmulas de Newton-Cotes.

Estimaremos a continuación el error cometido con la regla del punto medio. Desarrollando el integrando en serie de Taylor en torno al punto medio $m=(a+b)/2$:

$$f(x) = f(m) + f'(m)(x-m) + \frac{f''(m)}{2}(x-m)^2 + \frac{f'''(m)}{6}(x-m)^3 + \cdots \tag{5}$$

Al integrar esta expresión desde a hasta b, los términos de exponente impar desaparecen (su integral se cancela):

$$I(f) = f(m)(b-a) + \frac{f''(m)}{24}(b-a)^3 + \frac{f^{4)}(m)}{1920}(b-a)^5 + \cdots = M(f) + O(h^3) \tag{6}$$

donde $M(f)$ es la fórmula del punto medio, y la longitud del intervalo $h=b-a$ es suficientemente pequeña para que se cumpla $h^5 << h^3$; entonces diremos que el *orden de precisión* de esta regla es 3, lo que significa que el error está acotado de la siguiente manera:

$$E(f) = I(f) - M(f) < Kh^3$$

donde K es una constante adecuada. De todo ello podemos extraer dos importantes conclusiones:

- Si reducimos a la mitad (factor 2) la longitud del intervalo de integración, la cota del error se reduce en un factor de $2^3=8$, que es sensiblemente inferior.
- El error $E(f)$ depende de la 2ª derivada (y superiores) de la función subintegral $f(x)$, y la 2ª derivada y superiores son nulas para polinomios de grado 0 y 1. Por tanto la regla del

punto medio integra exactamente polinomios de grado 1, y el *grado polinomial* de la regla no es 0 (como cabría esperar de un único punto de integración) sino 1, igual que la regla trapezoidal, cuyo grado polinomial también es 1 y cuyo orden de precisión es 3, como fácilmente se puede comprobar.

Similar argumentación permitiría observar de nuevo que el *grado polinomial* de la regla de Simpson no es 2, como en principio cabría esperar (polinomio de interpolación de grado 2), sino 3 (también integra exactamente los polinomios de grado 3) y el orden de precisión de la regla es 5.

Este fenómeno que se debe a la cancelación de errores positivos y negativos queda ilustrado en la siguiente figura:

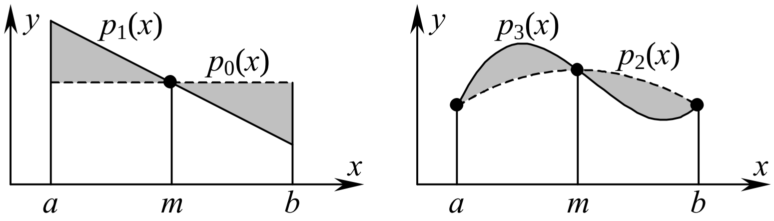


Figura 1.

En general podremos afirmar que las reglas de Newton-Cotes basadas en un número impar de nodos ganan un grado polinomial extra, es decir, integran exactamente un polinomio de grado superior en una unidad al del polinomio base con respecto al cual se genera la regla. Todo ello se plasma en el siguiente teorema para fórmulas cerradas (existe otro similar para fórmulas abiertas):

Teorema (Error de las fórmulas cerradas de Newton-Cotes):

Sea $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + E(f)$$

una fórmula cerrada de Newton-Cotes de $n+1$ puntos, con $a = x_0$, $b = x_n$ y $h = (b-a)/n$; entonces $\exists\, c \in (a,b)$ tal que para:

n impar: $$E(f) = \frac{h^{n+2} f^{n+1)}(c)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)dt$$

n par: $$E(f) = \frac{h^{n+3} f^{n+2)}(c)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)dt$$

Aplicando este teorema se tiene que cuando el número de puntos es par, el grado polinomial de la fórmula es $n-1$, mientras que cuando el número de puntos es impar el grado polinomial es n. El *orden de precisión* es superior al *grado polinomial* en 2 unidades.

La regla del trapecio, por ejemplo, tiene un grado polinomial $n = 1$, y si $f \in C^2[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_1 + f_2\right) - \frac{h^3}{12} f''(c)$$

La regla de Simpson tiene un grado polinomial $n = 3$, y si $f \in C^4[a,b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_1 + 4f_2 + f_3\right) - \frac{h^5}{90} f^{4)}(c) \qquad (7)$$

La 2ª regla de Simpson (Newton-Cotes con 4 nodos) tiene un grado polinomial $n = 3$, y si $f \in C^4[a,b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4\right) - \frac{3h^5}{80} f^{4)}(c)$$

Como se puede comprobar, la 1ª y 2ª reglas de Simpson tienen el mismo grado de precisión, pero la 1ª sólo evalúa la función en 3 nodos mientras que la 2ª lo hace en 4. Por tanto es más eficiente utilizar la 1ª regla de Simpson que la 2ª, puesto que ambas convergen a la misma velocidad pero el coste computacional de la 1ª es menor que el de la 2ª. En términos absolutos, sin embargo, el término de error es potencialmente menor en la 2ª que en la 1ª, ya que el coeficiente de la derivada 4ª ($f^{4)}$) es menor para la 2ª regla que para la 1ª (téngase en cuenta que para un mismo intervalo $[a,b]$, $h = (b–a)/2$ en la 1ª, y $h = (b–a)/3$ en la 2ª).

Ejemplo 1:

Queremos integrar la función $f(x) = 1 + e^{-x}\sin(4x)$ en el intervalo $[a,b] = [0,1]$. Para ello vamos a aplicar algunas de las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes.

Para la regla del trapecio tenemos $h = 1$ y el resultado es:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) = \frac{1}{2}\left(1.00000 + 0.72159\right) = 0.86079$$

Para la regla de Simpson, tenemos $h = 1/2$ y el resultado es:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1/2}{3}\left(f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}) + f(1)\right) = \frac{1}{6}\left(1 + 4\cdot 1.55152 + 0.72159\right) = 1.32128$$

Para la segunda regla de Simpson, tenemos $h = 1/3$ y el resultado es:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3\cdot\frac{1}{3}}{8}\left(f(0) + 3f(\tfrac{1}{3}) + 3f(\tfrac{2}{3}) + f(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1.00000 + 3\cdot 1.69642 + 3\cdot 1.23447 + 0.72159\right) = 1.31440$$

Para la regla de Newton-Cotes de 5 puntos (grado polinomial 5):

$$\int_{x_1}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}\left(7f_1 + 32f_2 + 12f_3 + 32f_4 + 7f_5\right) \qquad (8)$$

tenemos $h = 1/4$ y el resultado es:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{45}\left(7f(0) + 32f(\tfrac{1}{4}) + 12f(\tfrac{1}{2}) + 32f(\tfrac{3}{4}) + 7f(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{90}\left(7\cdot 1 + 32\cdot 1.65534 + 12\cdot 1.55152 + 32\cdot 1.06666 + 7\cdot 0.72159\right) = 1.30859$$

El valor exacto de esta integral definida es

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{21e - 4\cos(4) - \sin(4)}{17e} = 1.3082506046426...$$

lo que nos permite observar y comparar la calidad de la aproximación de las 4 reglas aplicadas.

Sin embargo, para que la comparación entre los métodos de cuadratura sea coherente, deberíamos integrar por cada método sobre el mismo intervalo y con la misma cantidad de evaluaciones de la función subintegral. A esta situación podremos llegar si subdividimos convenientemente el intervalo, como mostraremos en el siguiente ejemplo. Para ello integraremos sobre un intervalo común $[a,b]$ utilizando en cada método cinco evaluaciones de la función $f_k = f(x_k)$ $(k = 1,...,5)$. El proceso de aplicar la regla del trapecio en cada uno de los subintervalos $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, $[x_3,x_4]$ y $[x_4,x_5]$ (que se llama *regla compuesta del trapecio* y se estudia en el siguiente apartado) conduce a la expresión:

$$\int_{x_1}^{x_5} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_5} f(x)dx \approx$$
$$\approx \frac{h}{2}(f_1+f_2)+\frac{h}{2}(f_2+f_3)+\frac{h}{2}(f_3+f_4)+\frac{h}{2}(f_1+f_5)=$$
$$=\frac{h}{2}(f_1+2f_2+2f_3+2f_4+f_5)$$

La regla de Simpson puede usarse de igual forma. Su aplicación a cada uno de los dos intervalos $[x_1,x_3]$ y $[x_3,x_5]$ se llama *regla compuesta de Simpson*:

$$\int_{x_1}^{x_5} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_5} f(x)dx \approx$$
$$\approx \frac{h}{3}(f_1+4f_2+f_3)+\frac{h}{3}(f_3+4f_4+f_5)=\frac{h}{3}(f_1+4f_2+2f_3+4f_4+f_5)$$

En el siguiente ejemplo se comparan los valores obtenidos con estas fórmulas.

Ejemplo 2:

Queremos integrar la función $f(x) = 1 + e^{-x}\sin(4x)$ en el intervalo $[a,b]=[0,1]$, con distintas reglas pero con el mismo número de puntos de integración. Para ello aplicaremos la regla compuesta del trapecio (cuatro veces), la regla compuesta de Simpson (dos veces) y la regla (8) (Newton-Cotes de 5 puntos), de manera que cada una de ellas utilice en total 5 evaluaciones de la función. Luego compararemos los resultados obtenidos.

El valor común de h es $h=1/4$. La regla compuesta del trapecio nos da:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1/4}{2}\left(f(0)+2f(\tfrac{1}{4})+2f(\tfrac{1}{2})+2f(\tfrac{3}{4})+f(1)\right)=$$
$$=\frac{1}{8}(1.00000+2\cdot 1.65534+2\cdot 1.55152+2\cdot 1.06666+0.72159)=1.28358$$

Con la regla compuesta de Simpson obtenemos:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1/4}{3}\left(f(0)+4f(\tfrac{1}{4})+2f(\tfrac{1}{2})+4f(\tfrac{3}{4})+f(1)\right)=$$
$$=\frac{1}{12}(1.00000+4\cdot 1.65534+2\cdot 1.55152+4\cdot 1.06666+0.72159)=1.30938$$

El resultado con la regla (8) ya lo obtuvimos anteriormente:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{45}\left(7f(0)+32f(\tfrac{1}{4})+12f(\tfrac{1}{2})+32f(\tfrac{3}{4})+7f(1)\right)=1.30859$$

así como su valor exacto:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{21e-4\cos(4)-\sin(4)}{17e}=1.3082506046426...$$

La aproximación obtenida con las 2 reglas de Simpson, 1.30859, es mucho mejor que el valor 1.28358 obtenido con las 4 reglas del trapecio, y de nuevo es la regla de 5 puntos (7) la que proporciona la mejor aproximación de las tres, 1.30859.

7.4.- FÓRMULAS COMPUESTAS.

Sabemos de apartados anteriores que la precisión obtenida mediante una regla de cuadratura en el cálculo de una integral definida mejora sensiblemente con la disminución del tamaño del intervalo de integración. Por tanto, dado que el intervalo total de integración es un dato fijo de partida que no podemos alterar, la única forma de mejorar la precisión de una regla de cuadratura (e incluso para conseguir un resultado razonable si la función integrando oscila varias veces en el intervalo) es dividir el intervalo en subintervalos, aplicar la regla a cada uno de ellos y sumar los resultados; este proceso, que ya hemos utilizado en el último ejemplo, da lugar a las *reglas o fórmulas compuestas*.

Regla compuesta del trapecio. Supongamos que se divide el intervalo $[a,b]$ en M subintervalos $[x_k,x_{k+1}]$ de anchura común $h=(b-a)/M$ mediante una partición cuyos extremos $x_k=a+k\,h$ $(k=1,\ldots,M+1)$, están igualmente espaciados. Representemos por $T(f,h)$ la *regla compuesta del trapecio con M subintervalos* de longitud h. Dicha fórmula se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas equivalentes:

$$T(f,h)=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{M}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right)$$

o bien $$T(f,h)=\frac{h}{2}\left(f_0+2f_1+2f_2+\cdots+2f_{M-2}+2f_{M-1}+f_M\right)$$

o bien $$T(f,h)=\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)+h\sum_{k=1}^{M-1}f(x_k)$$

Este valor es una aproximación a la integral de $f(x)$ en $[a,b]$, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx=T(f,h)+E_T(f,h)$$

tal que, si además $f\in C^2[a,b]$, entonces existe un valor c con $a<c<b$ que permite escribir el término del error $E_T(f,h)$ como:

$$E_T(f,h)=\frac{-(b-a)\,f''(c)\,h^2}{12}=O(h^2) \tag{9}$$

Obsérvese que el *orden de precisión* de la fórmula compuesta es 2, mientras que el de la fórmula simple es 3 (en cada subintervalo), lo cual tiene fácil explicación, ya que al sumar los errores de todos los subintervalos, $O(Mh^3)=O(h^2)$ (recuérdese que $h=(b-a)/M$ y por tanto $M=(b-a)/h$).

El *orden de precisión* de la fórmula compuesta es la magnitud que a efectos prácticos tiene sentido manejar, ya que la longitud del intervalo de integración $a-b$ es una magnitud fija en la práctica; por tanto dividiendo por la mitad los subintervalos la cota del error correspondiente quedará dividida por 4, y lo mismo ocurrirá con la regla compuesta del punto medio, cuyo orden de precisión también es 2 (siempre una unidad menos que el orden de precisión de la fórmula simple).

Cuando la derivada 2ª de $f(x)$ es conocida, la fórmula (9) permite estimar el número M de subintervalos necesarios para obtener una solución cuyo error sea inferior a una tolerancia previamente especificada.

Regla compuesta de Simpson. Supongamos que dividimos $[a,b]$ en $2M$ subintervalos $[x_k,x_{k+1}]$ de la misma anchura $h=(b-a)/(2M)$ mediante una partición de extremos igualmente espaciados $x_k=a+k\,h$ $(k=0,\ldots,2M)$. Representemos por $S(f,h)$ la *regla compuesta de Simp-*

son con 2M subintervalos de longitud h. Dicha fórmula se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas equivalentes:

$$S(f,h)=\frac{h}{3}\sum_{k=1}^{M}\left(f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})\right)$$

o bien $$S(f,h)=\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\cdots+2f_{2M-2}+4f_{2M-1}+f_{2M}\right)$$

o bien $$S(f,h)=\frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)\right)+\frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1}f(x_{2k})+\frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M}f(x_{2k-1}) \qquad (10)$$

El valor S es una aproximación a la integral

$$\int_a^b f(x)dx=S(f,h)+E_S(f,h)$$

tal que, si además $f\in C^4[a,b]$, el término del error $E_S(f,h)$ se puede escribir como:

$$E_S(f,h)=\frac{-(b-a)\,f^{4)}(c)\,h^4}{180}=O(h^4) \quad \text{con } c\in(a,b) \qquad (10)$$

Obsérvese que el *orden de precisión* de la fórmula compuesta de Simpson es 4, mientras que en las compuestas del trapecio y punto medio, el orden era 2; esto quiere decir que el error de la regla compuesta de Simpson tiende a cero (convergencia a la solución exacta) más rápidamente que las otras dos, cuando h tiende a cero.

Nótese también que el orden de precisión de la fórmula simple de Simpson es 5 (una unidad superior al de la compuesta), lo cual queda justificado con la misma argumentación del apartado anterior. Igualmente, cuando la derivada 4ª de $f(x)$ es conocida, la fórmula (10) permite estimar el número $2M$ de subintervalos necesarios para obtener una solución cuyo error sea inferior a una tolerancia previamente especificada.

Ejemplo 3:

Consideremos $f(x) = 2+\sin(2x^{1/2})$, y vamos a analizar el error cuando usamos la regla compuesta del trapecio en el intervalo [1,6] y los números de subintervalos son 10, 20, 40, 80 y 160.

La Tabla 1 muestra los resultados de aplicar la regla compuesta del trapecio y los correspondientes errores para la función ejemplo.

M	h	$T(f,h)$	$E_T(f,h) = O(h^2)$
10	0.5	8.19385457	–0.01037540
20	0.25	8.18604926	–0.00257006
40	0.125	8.18412019	–0.00064098
80	0.0625	8.18363936	–0.00016015
160	0.03125	8.18351924	–0.00004003

Tabla 1: La regla compuesta del trapecio para $f(x) = 2+\sin(2x^{1/2})$ en [1,6].

Una primitiva de $f(x)$ es: $$F(x)=2x-\sqrt{x}\cos(2\sqrt{x})+\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2}$$

y el valor de la integral definida con once cifras significativas es:

$$\int_1^6 f(x)dx=\left[F(x)\right]_{x=1}^{x=6}=8.1834792077$$

que es el valor que se usa para calcular los errores $E_T(f,h) = 8.1834792077 - T(f,h)$ que se muestran en la Tabla 1. Es importante observar que conforme h disminuye en un factor de 1/2, los errores sucesivos $E_T(f,h)$ disminuyen en un factor de aproximadamente 1/4; esto confirma que el orden de aproximación es $O(h^2)$.

7.5.- FÓRMULAS DE CUADRATURA DE GAUSS.

Supongamos que se trata de hallar el área limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$, $x = 1$, y el eje de abscisas, mediante una fórmula de cuadratura que sólamente realice dos evaluaciones de la función. ¿Cuál es la elección de los dos nodos que proporciona un mejor resultado? Ya hemos visto que la regla del trapecio es un método para aproximar el área limitada por una curva que sólo realiza dos evaluaciones de la función en los extremos del intervalo: $(-1, f(-1))$ y $(1, f(1))$. Sin embargo, si p.ej. la curva $y = f(x)$ es cóncava, el error de la aproximación es el área de la región comprendida entre la curva y el segmento rectilíneo que une sus extremos:

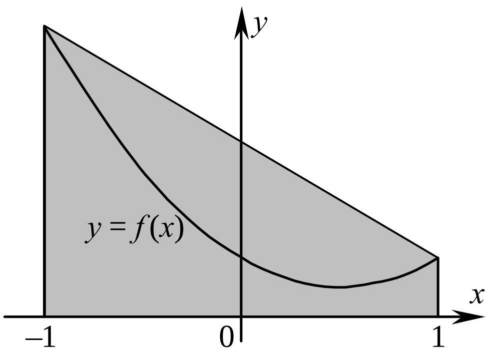


Figura 2: Aproximación trapezoidal con abscisas –1 y 1.

Si usamos dos nodos distintos x_1 y x_2 interiores al intervalo $[-1,1]$, entonces la línea recta que pasa por $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ corta a la curva en el interior del intervalo, y el área limitada por la recta es una mejor aproximación al área limitada por la curva:

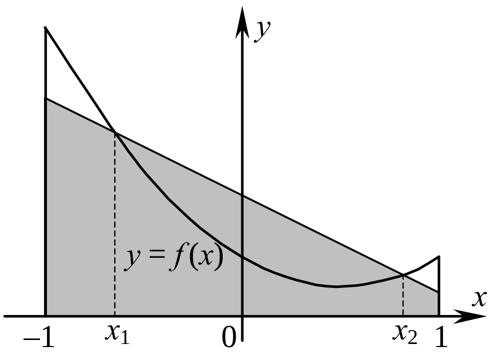


Figura 3: Aproximación trapezoidal con abscisas x_1 y x_2.

En realidad, en una fórmula de cuadratura de n nodos tenemos $2n$ grados de libertad: las n abscisas de los nodos y los n pesos. Por lo tanto, si podemos plantear $2n$ condiciones, podremos aspirar a integrar exactamente polinomios de grado $2n-1$ ($2n$ coeficientes), es decir, a reglas con *n puntos, de grado polinomial $2n-1$, y orden de precisión $2n+1$ en la simple y $2n$ en la compuesta.*

Ilustraremos a continuación esta idea generando la regla de $n = 2$ puntos mediante el método de los coeficientes indeterminados; se trata de hallar 2 abscisas x_1 y x_2 y 2 pesos w_1 y w_2 de manera que la fórmula:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

sea de grado polinomial $2n-1=3$, es decir, *exacta* para polinomios cúbicos de la forma $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Puesto que hay que determinar cuatro valores (w_1, w_2, x_1 y x_2), debemos seleccionar cuatro condiciones que deban cumplirse. Aplicando la propiedad aditiva de la integración, será suficiente con exigir que la fórmula sea exacta para las cuatro funciones $f(x)=1, x, x^2, x^3$. Las cuatro condiciones de integración son, entonces:

$$f(x)=1: \quad \int_{-1}^{1} 1dx = 2 \quad = w_1 + w_2$$

$$f(x)=x: \quad \int_{-1}^{1} xdx = 0 \quad = w_1x_1 + w_2x_2$$

$$f(x)=x^2: \quad \int_{-1}^{1} x^2dx = 2/3 \quad = w_1x_1^2 + w_2x_2^2$$

$$f(x)=x^3: \quad \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 \quad = w_1x_1^3 + w_2x_2^3$$

que forman un *sistema algebraico no lineal* de ecuaciones, cuya solución es:

$$w_1 = w_2 = 1; \quad x_1 = -1/\sqrt{3} = -0.57735...; \quad x_2 = 1/\sqrt{3} = 0.57735...$$

De este modo hemos encontrado los nodos y los pesos con los que se construye la regla de Gauss-Legendre con dos nodos. Puesto que la fórmula es exacta para polinomios de grado tres, el término del error incluirá la derivada 4ª, el orden de precisión de la fórmula simple será 5, y el de la compuesta 4.

La deducción de las fórmulas de Gauss es en general más difícil que la de las fórmulas de Newton-Cotes; basta con observar por ejemplo como el método de los coeficientes indeterminados nos condujo en el segundo caso a un sistema lineal de ecuaciones y a uno no lineal en el primero. Por ello, de manera más sistemática, la deducción de las fórmulas de Gauss se hace a partir del concepto de polinomios ortogonales. Si $p_n(x)$ es un polinomio de grado n que verifica:

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)x^k dx = 0 \quad (k = 0,1,...,n-1)$$

es decir, es ortogonal a todos los polinomios de grado inferior (propiedad del polinomio de Legendre de grado n), Se puede demostrar que:

1. El polinomio $p_n(x)$ tiene n raíces reales y simples en el intervalo $(-1,1)$.
2. La regla de cuadratura (interpolación polinomial) de n puntos, cuyos nodos son las n raíces del polinomio $p_n(x)$, es de grado polinomial $2n-1$; será por tanto la regla buscada, y se conoce como fórmula de Gauss-Legendre.

En el ejemplo anterior los dos nodos que se han obtenido son las raíces del polinomio de Legendre de primer grado.

Regla de Gauss-Legendre con dos nodos.

Si f es continua en $[-1,1]$, entonces

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx G_2(f) = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$$

La regla de Gauss-Legendre con dos nodos $G_2(f)$ tiene grado polinomial $n=3$, y si $f \in C^4[-1,1]$, entonces

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3}) + E_2(f)$$

siendo $$E_2(f) = f^{4)}(c)/135,\ c \in [-1,1]$$

Regla de Gauss-Legendre con *n* nodos.

La regla general de Gauss-Legendre con n nodos es exacta para funciones polinómicas de grado menor o igual que $2n-1$ y su fórmula de cuadratura es

$$G_n(f) = w_{n,1} f(x_{n,1}) + w_{n,2} f(x_{n,2}) + \cdots + w_{n,n} f(x_{n,n})$$

Los nodos $x_{n,k}$ y los pesos $w_{n,k}$ que hay que usar están tabulados y pueden conseguirse fácilmente en manuales de fórmulas y tablas matemáticas; en la Tabla 2 se relacionan los valores correspondientes para las reglas de Gauss-Legendre de hasta siete nodos, así como la forma de los términos del error $E_n(f)$ correspondientes a las aproximaciones $G_n(f)$. Los nodos son, de hecho, las raíces de los polinomios de Legendre; entonces los pesos correspondientes se pueden obtener a continuación resolviendo el sistema de ecuaciones lineales al que conduce el método de los coeficientes indeterminados.

Tabla 2: Nodos y pesos para el método de Gauss-Legendre.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n[f]$$

n	Nodos $x_{n,k}$	Pesos $w_{n,k}$	Error $E_n[f]$
2	±0.5773502692	1.0000000000	$(1/135)\cdot f^{4)}(c)$
3	±0.7745966692 0.0000000000	0.5555555556 0.8888888888	$\frac{1}{15\,750} f^{6)}(c)$
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549	$\frac{1}{3\,472\,875} f^{8)}(c)$
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0.0000000000	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888	$\frac{1}{1\,237\,732\,650} f^{10)}(c)$
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346	$\frac{2^{13}\cdot 6!^4}{13\cdot 12!^3} f^{12)}(c)$
7	±0.9491079123 ±0.7415311856 ±0.4058451514 0.0000000000	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837	$\frac{2^{15}\cdot 7!^4}{15\cdot 14!^3} f^{14)}(c)$

Se puede demostrar que la forma general del término de error es:

$$E_n[f] = \frac{2^{n+1} n!^4}{(2n+1)(2n)!^3} f^{2n)}(c) \quad (-1 \le c \le 1)\,. \tag{11}$$

Como conclusión práctica puede observarse que las abscisas y los pesos de las fórmulas de Newton-Cotes son más sencillos que los de las de Gauss-Legendre (números irracionales); por este motivo, el primer método es más útil y práctico en los cálculos manuales, mientras que para la utilización del segundo, sobre todo a medida que aumenta el valor de *n,* será más adecuado realizar los cálculos mediante ordenador.

Justificación de regla de Gauss-Legendre con *n* nodos (o la elección de sus abscisas).

Planteamiento del problema:

Se trata de encontrar la regla de n puntos

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$

de grado polinomial $2n-1$, es decir, que integre exactamente cualquier polinomio de grado no mayor que $2n-1$. Para ello, tanto los pesos w_k como las abscisas x_k de los nodos quedan por determinar ($2n$ condiciones para integrar exactamente polinomios con $2n$ coeficientes).

Solución dada:

Fijaremos las abscisas $\{x_k\ (k=1,...,n)\}$ de los n nodos coincidiendo con las n raíces del polinomio de Legendre de grado n. Una vez hecho esto, calcularemos los correspondientes pesos $\{w_k\ (k=1,...,n)\}$ de la fórmula integrando los polinomios de Lagrange asociados con los nodos, o mediante coeficientes indeterminados.

Justificación de la solución:

Sabemos que, en general, la fórmula resultante integrará exactamente cualquier polinomio de grado $n-1$ que pase por los puntos $\{x_k, f(x_k)\}$; no obstante mostraremos que en este caso especial (abscisas coincidentes con las raíces del polinomio de Legendre) el grado polinomial de la fórmula es muy superior a $n-1$. De hecho es igual a $2n-1$.

Sea $p_{2n-1}(x)$ un polinomio cualquiera de grado $2n-1$, y sea $\varphi_n(x)$ el polinomio de Legendre de grado n. Dividiendo el primero entre el segundo:

$$\begin{array}{l|l} p_{2n-1}(x) & \varphi_n(x) \\ \hline \psi_{n-1}(x) & a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad p_{2n-1}(x)=\varphi_n(x)\left(a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)+\psi_{n-1}(x) \quad (12)$$

donde $\psi_{n-1}(x)$ es el resto de la división (polinomio de grado $n-1$). Integrando:

$$\int_{-1}^{1} p_{2n-1}(x)dx = \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\left(a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\right)dx + \int_{-1}^{1} \psi_{n-1}(x)dx$$

La primera integral del segundo miembro se anula porque, siendo $\varphi_n(x)$ un polinomio de Legendre, es ortogonal a todos los polinomios de grado inferior:

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)x^k dx = 0 \qquad (k=0,...,n-1)$$

Por tanto:
$$\int_{-1}^{1} p_{2n-1}(x)dx = \int_{-1}^{1} \psi_{n-1}(x)dx$$

Además, como $\{x_k\ (k=1,...,n)\}$ son las n raíces de $\varphi_n(x)$, sustituyendo en (12):

$$p_{2n-1}(x_k)=\psi_{n-1}(x_k) \qquad (k=1,...,n)$$

También hemos deducido ya (segundo paso de la solución) los n pesos w_k que integran exactamente cualquier polinomio de grado $n-1$ muestreado en las abscisas $\{x_k\ (k=1,...,n)\}$.

En conclusión:

$$\int_{-1}^{1} p_{2n-1}(x)dx = \int_{-1}^{1} \psi_{n-1}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_k\psi_{n-1}(x_k) = \sum_{k=1}^{n} w_k p_{2n-1}(x_k)$$

que es lo que queríamos demostrar: la regla de n nodos integra exactamente cualquier polinomio de grado $2n-1$ si los nodos coinciden con las raíces del polinomio de Legendre.

Traslación del método de Gauss-Legendre.

Supongamos que tenemos los nodos $\{x_k\}$ y los pesos $\{w_k\}$ $(k=1,...,n)$ necesarios para aplicar la regla de Gauss-Legendre con n nodos en $[-1,1]$. Entonces, para aplicar el método de Gauss-Legendre en un intervalo $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx$$

se puede usar el cambio de variable:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{b-a}{2}d\xi$$

y la relación $$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right)\frac{b-a}{2}}_{g(\xi)} d\xi = \int_{-1}^{1} g(\xi)d\xi \tag{13}$$

obteniéndose la fórmula de cuadratura:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_k\right)$$

7.6.- EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

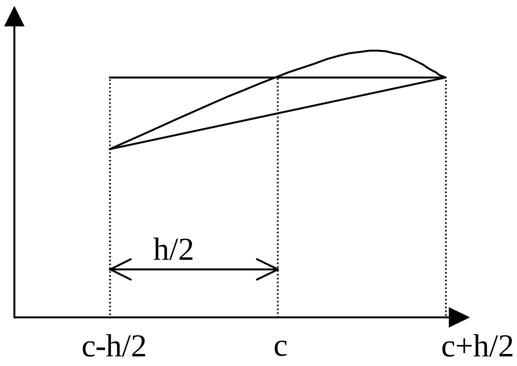
Mediante esta técnica, a partir de dos fórmulas de cuadratura del mismo orden de precisión o grado polinomial, se obtiene una mejor. Para ello, en primer lugar, es necesario desarrollar el término de error en serie de potencias de h. Por ejemplo, si se trata de una fórmula de $O(h^4)$, el término de error será de la forma:

$$E(f) = I - \tilde{I} = c_1h^4 + c_2h^5 + c_3h^6 + \cdots$$

Concretamente, para obtener el desarrollo en serie del término de error en el caso de la fórmula del trapecio, partiendo del error como diferencia del valor exacto menos el valor aproximado:

$$E_T(h) = \int_{c-h/2}^{c+h/2} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f(c-h/2) + f(c+h/2)\right],$$

y teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Taylor de f alrededor de c, y sustituyendo en la expresión anterior f(x), f(c-h/2) y f(c+h/2), se tiene:



$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3+\cdots$$

$$f(c-h/2)=f(c)-f'(c)\cdot\frac{h}{2}+\frac{f''(c)}{2!}\cdot\frac{h^2}{4}-\frac{f'''(c)}{3!}\cdot\frac{h^3}{8}+\cdots$$

$$f(c+h/2)=f(c)+f'(c)\cdot\frac{h}{2}+\frac{f''(c)}{2!}\cdot\frac{h^2}{4}+\frac{f'''(c)}{3!}\cdot\frac{h^3}{8}+\cdots$$

$$E_T(h)=-\frac{h^3}{12}\cdot f''(c)+\frac{h^5}{480}\cdot f^{iv)}(c)+\frac{h^7}{53760}f^{vi)}(c)+\cdots$$

Del mismo modo se puede obtener el desarrollo en serie de potencias de h para la fórmula del punto medio :

$$E_M(h)=\int_{c-h/2}^{c+h/2}f(x)\,dx-h\cdot f(c)=\frac{h^3}{24}\cdot f''(c)+\frac{h^5}{1920}\cdot f^{iv)}(c)+\frac{h^7}{322560}f^{vi)}(c)+\cdots$$

Las dos aplicaciones más habituales en integración numérica de la extrapolación de Richardson son:

-A dos fórmulas compuestas (distinto nº de aplicaciones de una misma fórmula simple) con dos valores distintos del tamaño de paso, por ejemplo, h y h/2.

- A dos fórmulas simple distintas con el mismo orden de precisión. Por ejemplo a las fórmulas del trapecio y del punto medio.

Veamos un ejemplo de cada una de estas dos aplicaciones.

En el primer caso se considera la fórmula del trapecio compuesta n veces y 2n veces, es decir, con amplitudes del subintervalo iguales a :

$$h_1=\frac{b-a}{n}=h \qquad y \quad h_2=\frac{b-a}{2n}=\frac{h}{2}$$

Llamando I al valor exacto e I_1 , I_2, a los valores aproximados , se tiene:

$$I=I_1+c_1h^2+c_2h^3+\cdots$$
$$I=I_2+c_1(h/2)^2+c_2(h/2)^3+\cdots$$

Multiplicando la 2ª ecuación por 4 y restándole la 1ª conseguimos que desaparezca el término en h^2 , y se obtiene:

$$3I = 4I_2 - I_1 - c_2 h^3 / 2 + \cdots \;\Rightarrow\; I = \frac{4I_2 - I_1}{3} + O(h^3)$$

una fórmula que tiene un orden de precisión igual a 3, superior al de las dos de partida.

En el segundo caso se van a considerar las fórmulas del trapecio y del punto medio:

$$I = I_T - \frac{h^3}{12} \cdot f''(c) + O(h^5)$$
$$I = I_M + \frac{h^3}{24} \cdot f''(c) + O(h^5)$$

Multiplicando la 2ª ecuación por 2 y sumándole la 1ª, se anulan los términos en h^3, con lo que la fórmula resultante tiene un orden de precisión de $O(h^5)$. Esta fórmula es precisamente la 1ª fórmula de Simpson.

$$3I = I_T + 2I_M + O(h^5) \;\Rightarrow\; I = \frac{I_T + 2I_M}{3} + O(h^5)$$

7.7.- TEMA 7. EJERCICIOS.

1.— Obtener una fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio, así como los correspondientes términos de error, siendo las fórmulas de la forma:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_1 f(0) + a_2 f(1/2)$$

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx h\left[a_0 f(-h) + a_1 f(0) + a_2 f(h)\right]$$

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f(1/4) + a_1 f(1/2) + a_2 f(3/4)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx a_0 f(-1/2) + a_1 f(0) + a_2 f(1/2)$$

2.— Calcular $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ utilizando la regla de los trapecios compuesta con 2 y 4 subintervalos, y aplicando posteriormente extrapolación de Richardson para calcular una tercera aproximación.

Sol: $I_2 = 7/6$; $I_4 = 67/64$; $I_R = 11/10$

3.— Evaluar $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ por medio de:

a) La regla del trapecio.
b) La primera regla de Simpson.
c) La segunda regla de Simpson.

Acotar el error de truncatura en cada caso.

Sol: a) $I_1 = 0.625$, $|E(f)| \leq 0.5$; b) $I_2 = 0.504630$, $|E(f)| \leq 0.04167$;
c) $I_3 = 0.502188$, $|E(f)| \leq 0.01852$

4.— Obtener a partir de la primera y segunda reglas de Simpson, mediante la extrapolación de Richardson, una fórmula con un error menor, y aplicarla al caso

$$\int_0^3 (x^4 - x^2 + 1)dx$$

Sol: $I \approx 213/5$

5.— Utilizando la regla de los trapecios y la primera regla de Simpson calcular

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5)dx$$

Obtener una cota del error cometido.

Sol: $I_1 = 26$, $|E(f)| \leq 28/3$; $I_2 = 62/3$, $|E(f)| = 0$

6.— Evaluar $\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5)dx$ utilizando la regla trapezoidal y la fórmula abierta de integración de un punto, obteniendo a partir de estas dos un valor mejor mediante la extrapolación de Richardson.

Sol: $I = 62/3$

7.— Calcular la integral $\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5)dx$, aplicando:

a) La regla del trapecio dos veces.
b) La regla del trapecio cuatro veces.

c) Obtener un valor mejor a partir de los dos anteriores.

Sol: $I_2 = 22$, $I_4 = 21$

8.— Utilizar una fórmula de cuadratura gaussiana para obtener un valor aproximado de $\int_1^3 (x^3 + x^2 + x + 1)dx$

Sol: $I = 104/3$

9.— Evaluar $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ por medio de dos fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre con dos y tres puntos.

Sol: $I_2 = 0.497041$, $I_3 = 0.499874$

10.—Usar la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre de cinco puntos para calcular

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Sol: $I = 0.693147$

11.—Calcular $\int_{-1}^0 (x^3 + x^2)dx$ utilizando la fórmula de los trapecios compuesta, garantizando que el error de truncatura cometido sea menor que $\varepsilon = 0.03$.

Sol: $n = 4$, $I_4 = 0.078125$

12.—¿Qué valor de h sería necesario considerar para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$$

con 5 decimales correctos utilizando la regla de Simpson compuesta?

Sol: $h = \pi/24$

13.—A partir de los datos de la siguiente tabla:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$y(x)$	1.000	1.284	1.649	2.117	2.718	3.490	4.482	5.755	7.389

Estimar $\int_0^2 y(x)dx$ de la forma más adecuada.

Sol: 6.389

14.—Aplicar la fórmula de Gauss-Legendre de dos nodos para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)dt$$

Sol: I = 0.998473

15.—Se desea calcular $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$.

a) Utilizar la primera regla de Simpson con 9 nodos.

b) Utilizar la segunda regla de Simpson con 4 nodos.

c) Obtener cotas del error de truncatura.

d) Dadas las tres primeras raíces x_i del polinomio de Legendre de grado 5 y sus respectivos pesos w_i, completar la tabla con los valores que faltan

x_i	–0.9062	–0.5385	0.0000
w_i	0.2369	0.4786	0.5689

Calcular el valor aproximado de la integral utilizando la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre con 5 nodos.

Sol: a) $I = 2.00269$, $|E(f)| = 0.000415$; b) $I = 2.040524$, $|E(f)| = 0.047225$; d) $I = 1.999868$

16.—Dada la integral $I = \int_2^3 (5-x)^{-1}dx$, se pide:

a) Determinar el número de veces que hay que componer la regla de Simpson para obtener el valor de I con un error $\varepsilon = 10^{-4}$.

b) Obtener dicha integral con la precisión pedida.

Sol: a) $n = 2$; b) $I = 0.405471$

17.—Calcular un valor aproximado de $\int_1^{1.3} \sqrt{x}dx$ usando los datos de la siguiente tabla:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$x^{1/2}$	1.0000	1.0247	1.0488	1.0724	1.0954	1.1180	1.1402

a) Considerando la fórmula trapezoidal.

b) Considerando la primera regla de Simpson.

c) Considerando la fórmula trapezoidal compuesta.

d) Considerando la fórmula de Simpson compuesta.

e) Obtener cotas del error de truncatura en cada caso.

Sol: a) 0.32103, $|E(f)| \leq 0.00056$; b) 0.32149, $|E(f)| \leq 7.91 \cdot 10^{-7}$;
c) 0.32147, $|E(f)| \leq 1.56 \cdot 10^{-5}$; d) 0.32148, $|E(f)| \leq 10^{-8}$

18.—Con los datos de la siguiente tabla

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	–3	–4	–3	0	5	12	21	32	45

Calcular $\int_1^9 f(x)dx$

a) Utilizando la primera regla de Simpson compuesta.

b)Realizando dos aplicaciones de la fórmula abierta:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3) + \frac{14h^5}{45} f^{iv)}(c)$$

¿Por qué coinciden los resultados?

Sol: 248/3

19.—Sabiendo que $\int_0^{0.8} f(x)dx = 2$ y $\max\limits_{0\le x\le 0.8}\left|f^{iv}(x)\right| \le 3$, y siendo conocida la función por los datos de la siguiente tabla:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8
$f(x)$	5	8	6	3	0	-3	-3	5

emplear la primera regla de Simpson compuesta para estimar $f(0.7)$.

Sol: $f(0.7) \approx 3$

20.—La función $f(x) = 10 - 38.6x + 74.07x^2 - 40.1x^3$ se usa en el cálculo de la siguiente tabla de datos:

x	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.95	1.20
$f(x)$	10.00	6.84	4.00	4.20	5.51	5.77	1.00

Evaluar $\int_0^{1.2} f(x)dx$ utilizando de forma adecuada una combinación de las reglas primera y segunda de Simpson y de la regla de los trapecios para obtener la mayor precisión posible. Hallar una cota del error cometido.

Sol: 6.07908

21.—Aproximar $\int_1^{3} L(x)dx$ con un error ≤ 0.02, utilizando la fórmula abierta del punto medio compuesta.

Sol: 1.30022(5 aplicaciones)