

Scattering of Plane SH Waves by a Semi-Cylindrical Canyon

M. D. Trifunac

Antonio Carrillo Ledesma

<http://www.mmc.igeofcu.unam.mx/acl/>

El presente trabajo tiene por objetivo el exponer los pormenores de la reproducción del ya clasico artículo [1] del Dr. Trifunac, pero adicionalmente se evaluan los efectos de cambiar la excitación del semiespacio supuesta como un tren infinito de ondas planas SH por una fuente puntual cilíndrica ubicada a R_0 de distancia del origen de coordenadas, la cual es expuesta en la sección siete.

1 El modelo

El modelo a estudiar es en dos dimensiones, el cual representa un semiespacio ($y > 0$, hacia abajo) y en donde un medio círculo de radio a ha sido removido para formar un cañón semicircular, este se muestra en la figura (1).

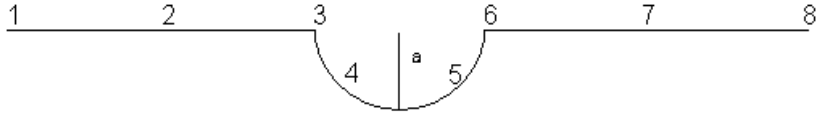


Figura 1: Cañón semicircular y puntos de observación

El semiespacio se supone elástico, isótropo y homogéneo. Las propiedades del material están dadas por la rigidez μ y la velocidad de las ondas cortantes β .

El sistema de coordenadas rectangular usado en el modelo (x, y) está centrado en el origen y se supone que y es positivo hacia abajo. El sistema coordenado cilíndrico, consistente en una distancia radial r y el ángulo θ , medido de manera positiva con respecto al eje y , coincidiendo el origen de los dos ejes coordenados, ver figura (2).

La excitación del semiespacio, U_z^i es supuesta como un tren infinito de ondas planas SH con frecuencia ω y movimiento en la dirección z , propagándose de izquierda a derecha como sigue

$$U_z^i = \exp iw(t - \frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y}). \quad (1)$$

Para un ángulo de incidencia γ la velocidad de la fase a lo largo del eje x es $c_x = \frac{\beta}{\sin \gamma}$, y la velocidad a lo largo del eje y es $c_y = \frac{\beta}{\cos \gamma}$.

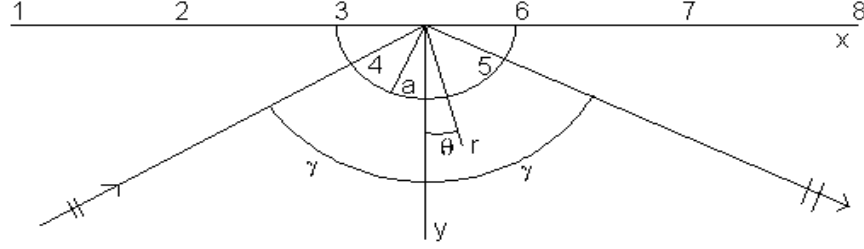


Figura 2:

En caso de no existir el cañón, la onda incidente es reflejada en el plano de la superficie libre ($y = 0$), y las ondas incidentes U_z^i y la onda reflejada U_z^r interfieren dando como resultado el movimiento en el semiespacio

$$U_z^i + U_z^r = 2 \exp \left[iw \left(t - \frac{x}{c_x} \right) \right] \cos \left(\frac{wy}{c_y} \right) \quad (2)$$

el cual es valido lejos del cañón.

Cerca del cañón, las ondas incidentes y las reflejadas U_z^i y U_z^r son dispersadas y difractadas por la superficie semicircular. A este nuevo grupo de ondas dispersadas y difractadas lo llamaremos U_z^R . Es claro que esta expresión indica un patrón estacionario que se propaga hacia la derecha. Usando los desarrollos de las funciones trigonométricas en funciones de Bessel es posible escribir la solución de (2) mediante:

$$\begin{aligned} U_z^i + U_z^r &= 2J_0(kr) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(kr) \cos 2n\gamma \cos 2n\theta \\ &\quad - 4i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(kr) \sin(2n+1)\gamma \sin(2n+1)\theta \end{aligned} \quad (3)$$

donde $J_p(x)$ es la función de Bessel de primera especie con argumento x y orden p , donde $k = \frac{\omega}{\beta}$ es el número de onda absoluto.

2 Solución analítica al modelo

El desplazamiento total U_z resultante de la incidencia de ondas planas SH , U_z^i , representa la superposición de las ondas U_z^i , U_z^r y U_z^R . Donde estas deben satisfacer la ecuación diferencial parcial de onda en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \quad (4)$$

con condiciones de frontera

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} = 0 \text{ en } \theta = \pm \frac{1}{2}\pi \text{ y } r > a \quad (5)$$

y

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0 \text{ en } r = a \text{ y } |\theta| < \frac{1}{2}\pi \quad (6)$$

Las ondas U_z^R que representan ondas salientes, ya que estas consisten en ondas dispersas y difractadas por el cañón semicircular. Debiendo satisfacer las ecuación diferencial parcial (4) y las condiciones de frontera libres de esfuerzo (5). Además, la suma de las ondas U_z^i , U_z^r y U_z^R deben satisfacer la condición de frontera (6). La onda U_z^R que satisface la ecuación (4) y (5) se escribe como

$$U_z^R = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n H_{2n}^{(2)}(kr) \cos 2n\theta + b_n H_{2n+1}^{(2)}(kr) \sin(2n+1)\theta \right] \quad (7)$$

donde $H_p^{(2)}(x)$ es la función de Hankel de segunda especie con argumento x y orden p , las constantes complejas a_n y b_n pueden ser determinadas al sustituir $U_z^i + U_z^r + U_z^R$ dentro de las condiciones de frontera (6), esto da para $n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= -2 \frac{J_1(ka)}{H_1^{(2)}(ka)}, \\ b_0 &= 4i \sin \gamma \frac{ka J_0(ka) - J_1(ka)}{ka H_0^{(2)}(ka) - H_1^{(2)}(ka)} \end{aligned} \quad (8)$$

y para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_n &= -4(-1)^n \cos 2n\gamma \frac{ka J_{2n-1}(ka) - 2n J_{2n}(ka)}{ka H_{2n-1}^{(2)}(ka) - 2n H_{2n}^{(2)}(ka)}, \\ b_n &= 4i(-1)^n \sin(2n+1)\gamma \frac{ka J_{2n}(ka) - (2n+1) J_{2n+1}(ka)}{ka H_{2n}^{(2)}(ka) - (2n+1) H_{2n+1}^{(2)}(ka)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Una vez que se conocen a_n y b_n , la solución total $U_z^i + U_z^r + U_z^R$ está definida para todo $r > a$ y $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$.

3 Solución numérica al modelo

A partir de la solución analítica al problema es necesario codificar el problema en algún lenguaje de programación en la cual se pueda expresar las funciones de Bessel y Neumann con las cuales es posible construir la función de Hankel. Para este propósito, se uso el lenguaje de programación C++ con la biblioteca científica GSL (GNU Scientific Library) [2].

La definición de la función de Hankel se realizo de la siguiente forma:

```

cdouble H(int n, int sp, ldouble x)
{
    cdouble y;
    if (sp == 1) y = cdouble (gsl_sf_bessel_Jn(n, x), gsl_sf_bessel_Yn(n, x));
    else y = cdouble (gsl_sf_bessel_Jn(n, x), - gsl_sf_bessel_Yn(n, x));
    return y;
}

```

Donde n es el orden, x es el argumento y sp es 1 para la primera especie y 2 para la segunda especie, equivalente a $H_n^{(sp)}(x)$. Para las llamadas a las funciones de Bessel y Neumann que es son proporcionadas por la librería GSL, se renombraron sólo para permitir una escritura más compacta como:

```

// Función de Bessel
ldouble J(int n, ldouble x)
{
    return gsl_sf_bessel_Jn(n, x);
}

// Función de Neumann
ldouble N(int n, ldouble x)
{
    return gsl_sf_bessel_Yn(n, x);
}

```

Donde $J(n, x)$ es la función de Bessel de primera especie con argumento x y orden n , equivalente a $J_n(x)$ y $N(n, x)$ es la función de Bessel de segunda especie con argumento x y orden n , equivalente a $Y_n(x)$ o mejor conocida como función de Neumann.

El grupo de ondas dispersadas y difractadas, correspondiente a la ecuación

$$\begin{aligned}
 U_z^i + U_z^r &= 2J_0(kr) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(kr) \cos 2n\gamma \cos 2n\theta \\
 &\quad - 4i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(kr) \sin(2n+1)\gamma \sin(2n+1)\theta
 \end{aligned}$$

que se codificó como:

```

cdouble Uir(ldouble r, ldouble t)
{
    ldouble x = 0.0, y = 0.0, kr = K * r;
    cdouble uir;
    int n;
    for (n = 1; n < N_TERMINOS; n++)
    {
        x += sig(n) * J(2*n, kr) * cos((2*n)*G) * cos((2*n)*t);
    }
}

```

```

    }
    for (n = 0; n < N_TERMINOS; n++)
    {
        y += sig(n) * J(2*n+1,kr) * sin((2*n+1)*G) * sin((2*n+1)*t);
    }
    uir = cdouble (2.0 * J(0,kr) + 4.0 * x, - 4.0 * y);
    return uir;
}

```

Las ondas U_z^R que representan ondas salientes, ya que estas consisten en ondas dispersas y difractadas a lo largo del cañón semicircular correspondientes a la ecuación

$$U_z^R = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n H_{2n}^{(2)}(kr) \cos 2n\theta + b_{nn} H_{2n+1}^{(2)}(kr) \sin(2n+1)\theta \right]$$

que se codificó como:

```

cdouble UR(ldouble r, ldouble t)
{
    ldouble kr = K * r;
    cdouble ur = cdouble(0.0,0.0);
    int n;
    for (n = 0; n < N_TERMINOS; n++)
    {
        ur += an(n) * H(2*n,2,kr) * cdouble(cos((2*n)*t),0.0) + bn(n) * H(2*n+1,2,kr)
* cdouble(sin((2*n+1)*t),0.0);
    }
    return ur;
}

```

Donde a_n corresponde a las ecuaciones

$$a_0 = -2 \frac{J_1(ka)}{H_1^{(2)}(ka)}$$

$$a_n = -4(-1)^n \cos 2n\gamma \frac{ka J_{2n-1}(ka) - 2n J_{2n}(ka)}{ka H_{2n-1}^{(2)}(ka) - 2n H_{2n}^{(2)}(ka)}.$$

Para $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ se codificaron como:

```

cdouble an(int n)
{
    ldouble ka = K * A;
    cdouble a, nu, de;
    if (n == 0)
    {
        a = cdouble(-2.0 * J(1,ka) , 0.0) / H(1, 2, ka);
    }
}

```

```

    } else {
        nu = cdouble(-4.0 * sig(n) * cos((2*n)*G) * (ka * J(2*n-1,ka) - (2*n) *
J(2*n,ka)) , 0.0);
        de = cdouble(ka,0.0) * H(2*n-1,2,ka)- cdouble(2*n,0.0) * H(2*n,2,ka);
        a = nu / de;
    }
    return a;
}

```

y b_n corresponde a las ecuaciones.

$$b_0 = 4i \sin \gamma \frac{kaJ_0(ka) - J_1(ka)}{kaH_0^{(2)}(ka) - H_1^{(2)}(ka)}$$

$$b_n = 4i(-1)^n \sin(2n+1)\gamma \frac{kaJ_{2n}(ka) - (2n+1)J_{2n+1}(ka)}{kaH_{2n}^{(2)}(ka) - (2n+1)H_{2n+1}^{(2)}(ka)}$$

Para $n = 0, 1, 2, 3$..se codificaron como:

```

cdouble bn(int n)
{
    ldouble ka = K * A;
    cdouble b, nu, de;
    if (n == 0)
    {
        nu = cdouble(0.0, 4.0 * sin(G) * (ka * J(0,ka) - J(1,ka)));
        de = cdouble(ka,0.0) * H(0, 2, ka) - H(1,2,ka);
    } else {
        nu = cdouble(0.0, 4.0 * sig(n) * sin((2*n+1) * G) * (ka * J(2*n,ka) -
(2*n+1) * J(2*n+1,ka)));
        de = cdouble(ka,0.0) * H(2*n, 2, ka)- cdouble(2*n+1,0.0) * H(2*n+1,2,ka);
    }
    b = nu / de;
    return b;
}

```

Una vez que se cuenta con estas funciones, la solución total al problema $U_z^i + U_z^r + U_z^R$ la cual esta definida para todo $r > a$ y $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ queda codificada como:

$$u = UR(s,t) + Uir(s,t);$$

donde s y t son r y θ respectivamente.

En todos los casos el radio del cañón se mantiene constante en $a = 1$ y la velocidad de las ondas de corte también se mantiene constante en $\beta = 1$. Cuando es necesario variar η , este parámetro sólo afecta a ω , y se define como $\omega = \pi\eta$, del lo anterior k queda definida como $k = \frac{\omega}{\beta}$. Para todos los cálculos siguientes, la serie de las ecuaciones (3) y (7) se truncaron a los 50 primeros términos.

Los codigos que más adelante se muestran, generan archivos de datos numéricos en 2D para cada gráfica, los cuales pueden ser graficados en cualquier paquete tipo Mathematica, Octave, Maple etc, a continuación muestro como generarlos en Mathematica a partir de los archivos generados por el programa:

Para las gráficas del tipo (7) se puede usar:

```
A = Import ["Z:\Temp\ED\DAT-P-0.25.dat"];
ListPlot[A, Prolog -> AbsolutePointSize[1]]
```

Para las gráficas del tipo (8) se puede usar:

```
A = Import["Z:\Temp\ED\DAT-P-2.00.dat"];
ListPlot[A, Axes -> False, Frame -> True, PlotRange -> {{-3.0, 3.0}, {-3.0,3.0}},
Prolog -> AbsolutePointSize[1]]
```

Para las gráficas del tipo (23) se puede usar:

```
A = Import ["Z:\Temp\ED\DAT-G-0.00.dat"];
ListPlot[A,PlotRange -> {{0, 3.0}, {0.0, 5.0}}, Prolog -> AbsolutePointSize[1]]
```

Para generar las gráficas (7), (9), (11), (13), (15), (17), (19) y (21) correspondientes a el cálculo de la amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) donde η varia de 0.25 a 2.0, que se codificó como:

```
for (e = 0.25; e <= 2.0; e +=0.25)
{
    W = M_PI * e;
    K = W / B;
    sprintf(xcad,"DAT-A-%1.2lf.dat",e);
    gf.Graba_datos(xcad);
    for (G = 0.0; G <= M_PI/2.0; G+= M_PI/6.0)
    {
        // Calculo en la parte negativa fuera del cañon
        an = - (M_PI / 2.0);
        for (x = 3.0; x > A; x -= INC)
        {
            u = UR(x*A,an) + Uir(x*A,an);
            gf.Grafica(-x,norma(u));
        }
        // Calculo en el cañon
        for (an = -M_PI/2.0; an <= M_PI/2.0; an += INC)
        {
            u = UR(A,an) + Uir(A,an);
            gf.Grafica(x*sin(an),norma(u));
        }
        // Calculo en la parte positiva fuera del cañon
        an = M_PI / 2.0;
        for (x = A; x < 3.0; x += INC)
        {
```

```

    u = UR(x*A,an) + Uir(x*A,an);
    gf.Grafica(x,norma(u));
  }
}
gf.Visualiza();
gf.Cierra_archivo_datos();
}

```

Donde por ejemplo, si tomamos $\eta = 0.25$ y graficamos la amplitud del desplazamiento vs x/a tenemos

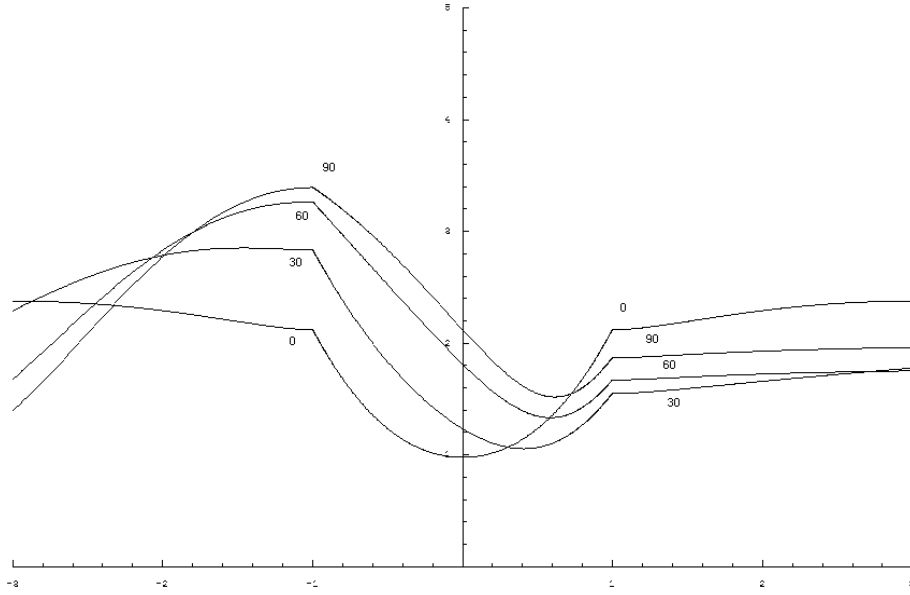


Figura 3: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.25$

Las ondas incidentes y reflejadas se interfieren mutuamente para $x/a < -1$ de una forma que esencialmente representa a un patrón permanente de ondas superpuestas sobre el movimiento que avanza a la derecha, también se muestra una tendencia decreciente al incrementar x/a .

Notese que el patrón del desplazamiento de la superficie depende significativamente de la dirección del arribo de las ondas casi horizontales, el cañón genera una zona de sombra (puntos 6 y 7) atrás del cañón, que tienden uniformemente a una desamplificación de aproximadamente 0.5.

El patrón de amplificación es bastante diferente sobre el lado del cañón cercano a la fuente. Aquí las ondas difractadas cercanas a la pared vertical

del cañón interfieren con las ondas que arriban después. El desplazamiento de amplitud oscila rápidamente entre 0 y 4.

Para generar las gráficas (8), (10), (12), (14), (16), (18), (20) y (22) correspondientes a el cálculo de la fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) donde η varia de 0.25 a 2.0, que se codificó como:

```
for (e = 0.25; e <= 2.0; e +=0.25)
{
    W = M_PI * e;
    K = W / B;
    sprintf(xcad,"DAT-P-%1.2lf.dat",e);
    gf.Graba_datos(xcad);
    for (G = 0.0; G <= M_PI/2.0; G+= M_PI/6.0)
    {
        // Calcula la parte negativa
        u = UR(A,0.0) + Uir(A,0.0);
        fs = fase(u,1);
        while (fs <= 0.0) fs += 2.0 * M_PI;
        if (e == 2.0 && G == 0.0) fs += 2.0 * M_PI;
        // Calculo en el cañon
        for (an = 0.0; an > -M_PI / 2.0; an -= INC)
        {
            u = UR(A,an) + Uir(A,an);
            xfs = fase(u,1);
            while ((fs - xfs) > M_PI/2.0) xfs += M_PI;
            while ((xfs - fs) > M_PI/2.0) xfs -= M_PI;
            fs = xfs;
            gf.Grafica(A*sin(an),fs/(2.0*M_PI));
        }
        // Calculo fuera del cañon
        an = - (M_PI / 2.0);
        for (x = A; x < 3.0; x += INC)
        {
            u = UR(x*A,an) + Uir(x*A,an);
            xfs = fase(u,0);
            while ((fs - xfs) > M_PI/2.0) xfs += M_PI;
            while ((xfs - fs) > M_PI/2.0) xfs -= M_PI;
            fs = xfs;
            gf.Grafica(-x,fs/(2.0*M_PI));
        }

        // Calcula la parte positiva
        u = UR(A,0.0) + Uir(A,0.0);
        fs = fase(u,1);
        while (fs <= 0.0) fs += 2.0 * M_PI;
        if (e == 2.0 && G == 0.0) fs += 2.0 * M_PI;
    }
}
```

```

// Calculo en el cañon
for (an = 0.0; an <= M_PI/2.0; an += INC)
{
    u = UR(A,an) + Uir(A,an);
    xfs = fase(u,1);
    while ((fs - xfs) > M_PI/2.0) xfs += M_PI;
    while ((xfs - fs) > M_PI/2.0) xfs -= M_PI;
    fs = xfs;
    gf.Grafica(A*sin(an),fs/(2.0*M_PI));
}
// Calculo fuera del cañon
an = M_PI / 2.0;
for (x = A; x < 3.0; x += INC)
{
    u = UR(x*A,an) + Uir(x*A,an);
    xfs = fase(u,0);
    while ((fs - xfs) > M_PI/2.0) xfs += M_PI;
    while ((xfs - fs) > M_PI/2.0) xfs -= M_PI;
    fs = xfs;
    gf.Grafica(x,fs/(2.0*M_PI));
}
}
gf.Visualiza();
gf.Cierra_archivo_datos();
}

```

Pese a que el algoritmo es sencillo en principio, se realizaron varios ajustes al valor calculado de la fase, ya que la fase tiene saltos de π , $-\pi$, 2π , -2π para un η fijo y un γ dado. Así que se comenzo el cálculo en $r = 0$ y $\theta = 0$ y se evitaron cambios abruptos de la fase tanto para θ positivos como θ negativos.

Donde por ejemplo, si tomamos $\eta = 0.25$, y graficamos la fase, $\phi(x/a)/2\pi$ vs x/a tenemos

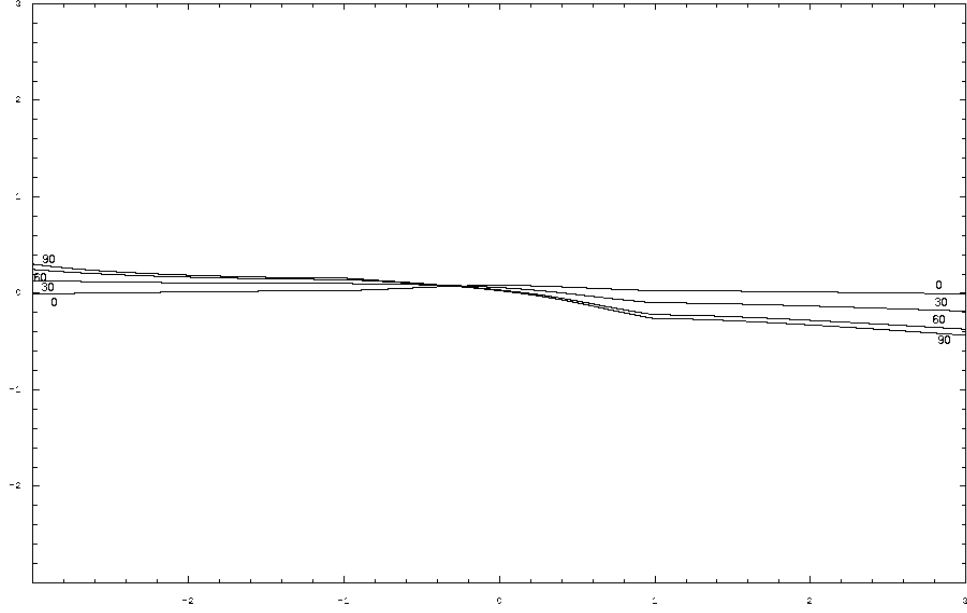


Figura 4: Fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.25$

Donde las variaciones más lejanas de $\phi(x/a)$ resultan de la dispersión y difracción a lo largo del cañón semicircular. La complejidad del desplazamiento de la superficie, causada por el cañón semicircular, aparentemente decrece cuando η es pequeña i.e. para las ondas incidentes con número de onda grande comparada con el radio del cañón a .

Para generar las gráficas (23), (24), (25) y (26) correspondientes a el cálculo del espectro típico de amplificación para $\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$, que se codificó como:

```
for (G = 0.0; G <= M_PI/2.0; G+= M_PI/6.0)
{
    sprintf(xcad, "DAT-G-%1.2lf.dat", G);
    gf.Graba_datos(xcad);
    for (e = 0.05; e <= 3.0; e += INC)
    {
        W = M_PI * e;
        K = W / B;
        // Punto r = 3 an= -PI/2
        u = UR(3.0*A, -M_PI/2.0) + Uir(3.0*A, -M_PI/2.0);
        gf.Grafica(e, norma(u));
        // Punto r = 2 an= -PI/2
        u = UR(2.0*A, -M_PI/2.0) + Uir(2.0*A, -M_PI/2.0);
        gf.Grafica(e, norma(u));
        // Punto r = 1 an= -PI/2
        u = UR(1.0*A, -M_PI/2.0) + Uir(1.0*A, -M_PI/2.0);
        gf.Grafica(e, norma(u));
        // Punto r = 1 an= -PI/6
        u = UR(A, -M_PI/6.0) + Uir(A, -M_PI/6.0);
        gf.Grafica(e, norma(u));
        // Punto r = 1 an= PI/6
        u = UR(A, M_PI/6.0) + Uir(A, M_PI/6.0);
        gf.Grafica(e, norma(u));
        // Punto r = 1 an= PI/2
        u = UR(3.0*A, M_PI/2.0) + Uir(3.0*A, M_PI/2.0);
        gf.Grafica(e, norma(u));
        // Punto r = 2 an= PI/2
        u = UR(2.0*A, M_PI/2.0) + Uir(2.0*A, M_PI/2.0);
        gf.Grafica(e, norma(u));
        // Punto r = 3 an= PI/2
        u = UR(1.0*A, M_PI/2.0) + Uir(1.0*A, M_PI/2.0);
        gf.Grafica(e, norma(u));
    }
    gf.Visualiza();
    gf.Cierra_archivo_datos();
}
```

Donde por ejemplo, si tomamos $\gamma = 0^\circ$, y graficamos la amplitud del desplazamiento vs $\omega a / \pi \beta$ tenemos

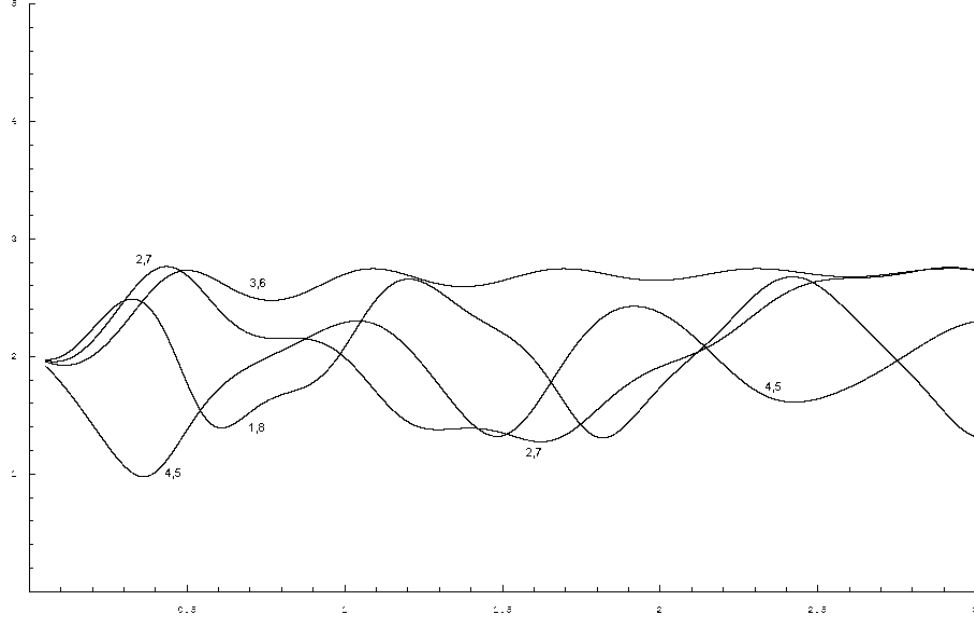


Figura 5: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 0^\circ$

Los puntos de observación 1 a 8 son mostrados en la siguiente figura

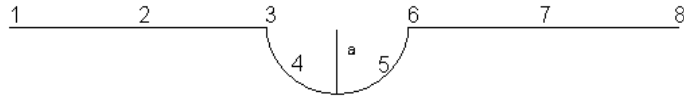


Figura 6: Cañon semicilíndrico y puntos de observación

La amplificación para ondas incidentes verticales con $\eta < 3$, es menor que 1.5, aunque para los puntos a lo largo de x/a , la reducción de amplitudes puede ser bastante grande, tendiendo a cero el desplazamiento de la amplitud, el comportamiento global del nivel de amplificación permanece cercano a 1.

Para un número de onda muy grande correspondientes a $\eta \rightarrow 0$, las amplitudes del desplazamiento de la superficie tienden a 2 para todo x/a y es visible en las gráficas (23), (24), (25) y (26).

4 Interpretación de resultados del modelo

En las figuras (7), (9), (11), (13), (15), (17), (19) y (21) , se muestra la dependencia del desplazamiento de la superficie con respecto al ángulo γ ($\gamma = 0, 30, 60$ y 90°) para un valor del parámetro η fijo. Las ondas incidentes y reflejadas se interfieren mutuamente para $x/a < -1$ de una forma que esencialmente representa a un patrón permanente de ondas superpuestas sobre el movimiento que avanza a la derecha. Esto es especialmente evidente en las figuras (16), (18), (20) y (22), donde las fases del diagrama muestran una secuencia de salto en la fase de al menos 180° .

Los diagramas en las figuras (7), (9), (11), (13), (15), (17), (19) y (21) muestran una tendencia decreciente al incrementar x/a . Esta manera global de la naturaleza del movimiento es gobernado por la propagación de las ondas, de izquierda a derecha.

En la ausencia del cañón, la dependencia de fase sobre el eje x en el medio espacio $y > 0$, debe de ser

$$\phi(x/a) = (-\omega a/\beta) \sin \gamma(x/a)$$

además cuando el valor de γ o $\omega a/\beta$ se incrementan, la parte negativa de $\omega a/\beta \sin \gamma$ de la fase se incrementa con respecto a x/a . Esta tendencia general de la fase $\phi(x/a)$ graficada contra x/a es mostrada en las gráficas (8), (10), (12), (14), (16), (18), (20) y (22) donde las variaciones más lejanas de $\phi(x/a)$ resultan de la dispersión y difracción a lo largo del cañón semicircular. La complejidad del desplazamiento de la superficie, causada por el cañón semicircular, aparentemente decrece cuando η es pequeña i.e. para las ondas incidentes con número de onda grande comparada con el radio del cañón a . Para un número de onda muy grande correspondientes a $\eta \rightarrow 0$, las amplitudes del desplazamiento de la superficie tienden a 2 para todo x/a y es visible en las gráficas (23), (24), (25) y (26). Esto es concordante con la noción común que las grandes ondas no se aprecian en la topografía irregular de pequeño tamaño.

El espectro típico de amplificación se muestra en las gráficas (23), (24), (25) y (26) dada la amplitud del desplazamiento, o equivalentemente , las funciones de transferencia para $\gamma = 0, 30, 60$ y 90° graficadas versus la frecuencia adimensional $\eta = \omega a/\pi\beta$, las cuales fueron calculadas para una excitación cuya amplitud es igual a 1. Usando la terminología de la ingeniería sísmica, el espectro de amplificación en las gráficas (23), (24), (25) y (26) representan una importante amplificación causada por el cañón semicircular con radio a .

La amplificación para ondas incidentes verticales gráfica (23) y para $\eta < 3$, es menor que 1.5 aunque para los puntos a lo largo de x/a , la reducción de amplitudes puede ser bastante grande, tendiendo a cero el desplazamiento de la amplitud, el comportamiento global del nivel de amplificación permanece cercano a 1.

Conforme se incrementa el ángulo γ de 0 a 90° , el movimiento cercano a los puntos 5, 6, 7 y 8 ver gráficas (24), (25) y (26) sistemáticamente decrece y tiende a un nivel de amplificación cercano a 0.5 para el intervalo del parámetro

η considerado. Mientras que la región entre los puntos 1 y 2 y a la izquierda del punto 1 es caracterizada por un patrón oscilatorio de amplia amplificación con un nivel de amplificación cercano a 1. En el punto 3 del cañón se muestra una amplificación que tiende a 2 para $\gamma = 90^\circ$.

El arribo de las ondas sísmicas se consideró de izquierda a derecha, pero también pueden arribar de derecha a izquierda obteniéndose resultados cualitativamente iguales pero invirtiendo el orden de los puntos.

Notese que el patrón del desplazamiento de la superficie depende significativamente de la dirección del arribo de las ondas casi horizontales, el cañón genera una zona de sombra (puntos 6 y 7) atrás del cañón, que tienden uniformemente a una desamplificación de aproximadamente 0.5. El patrón de amplificación es bastante diferente sobre el lado del cañón cercano a la fuente. Aquí las ondas difractadas cercanas a la pared vertical del cañón interfieren con las ondas que arriban después. El desplazamiento de amplitud oscila rápidamente entre 0 y 4.

5 Aplicaciones del modelo

En el mundo real hay pocas configuraciones geológicas que pueden ser modeladas por un cañón semicircular, una de estas configuraciones es el cañón Kern en Sierra Nevada, EU. En los casos en los cuales la sección transversal es sólo aproximadamente semicircular y suficientemente grande para permitir el uso de la teoría emanada de un modelo de dos dimensiones, permitiría usar el modelo simple de la figura (7), el cual puede ser usado aproximadamente para ondas cuya longitud de onda sea grande comparada con el radio del cañón circular.

El Dr. Trifunac, consideró el cañón de Pacoima en la presa Pacoima, localizado a varias millas al norte de San Fernando, California, EU. En el cual durante el sismo del 9 de febrero de 1971, se contaba con un acelerógrafo AR-240, localizado cerca del sur de la presa, este registro una fuerte aceleración.

Con un radio de 75 a 175 m y con una topografía muy rugosa, se pudo aproximar usando un cañón semicircular con radios entre los 100 y 150 m, para el propósito del estudio cualitativo del análisis de ondas largas. La velocidad de corte en las rocas de la región de Pacoima Dam es aproximadamente de $\beta = 2.5$ km/s. Así, tenemos que los parámetros del modelo quedan definidos como $a \simeq 0.125km$, $\eta = \omega a / \pi \beta$ con $\eta = f/10$ donde $\omega = 2\pi f$. El movimiento sísmico grabado por el acelerógrafo muestra energía cercana a 10 cps, o $\eta < 1$ en este modelo. La mayoría de los componentes de las ondas SH (esencialmente componentes S74° W) generaron ángulos del parámetro γ entre 20 y 60°.

Así, se mostró que usado este modelo es posible simular cualitativamente los datos grabados por el acelerógrafo, mostrando como se ven afectadas las ondas sísmicas por el cañón semicircular. Sugiriendo esto, que el acelerógrafo fue afectado poco por la topografía superficial.

6 Gráficas

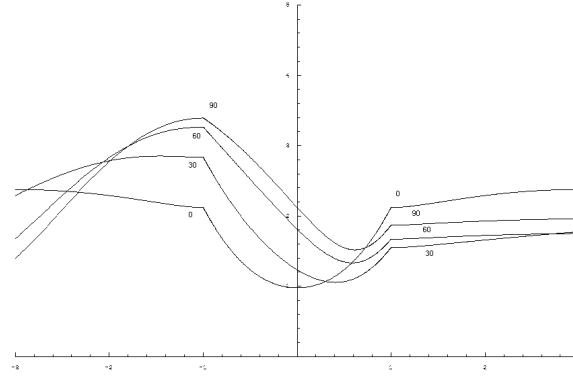


Figura 7: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.25$

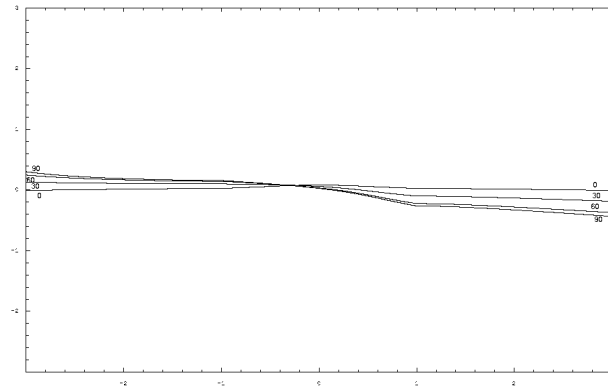


Figura 8: Fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.25$

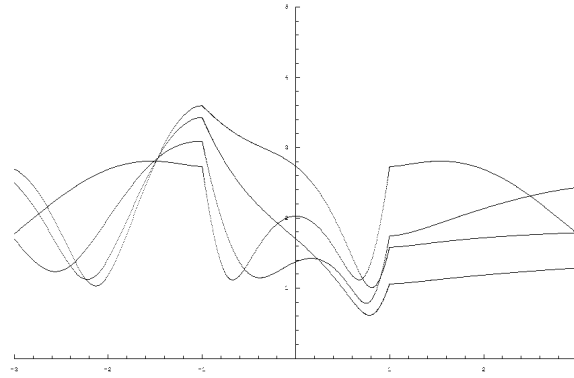


Figura 9: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.50$

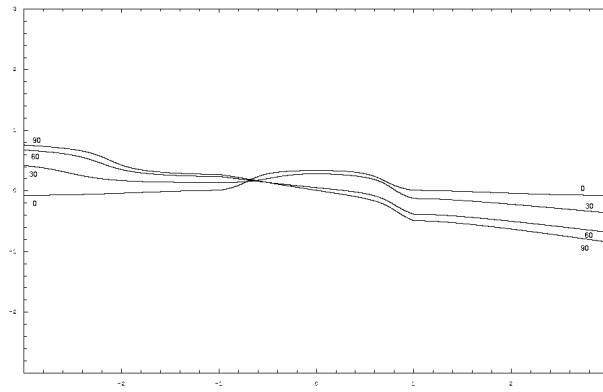


Figura 10: Fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.50$

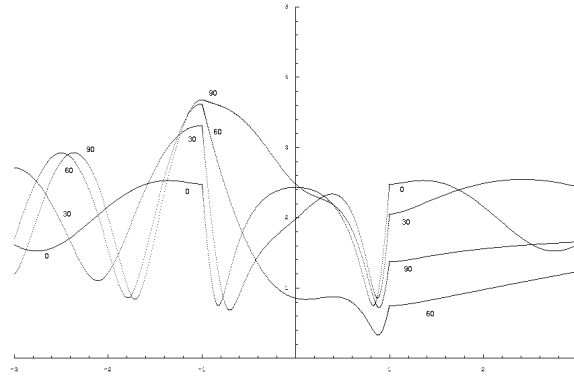


Figura 11: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.75$

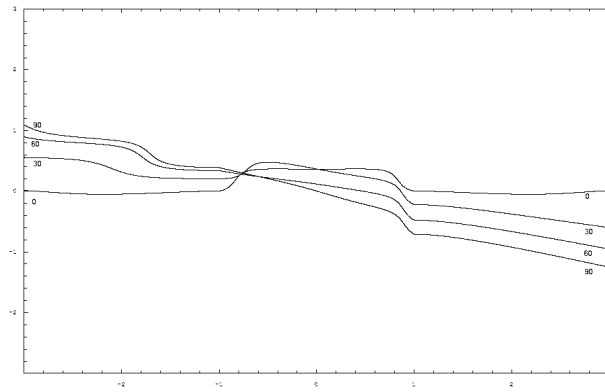


Figura 12: Fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.75$

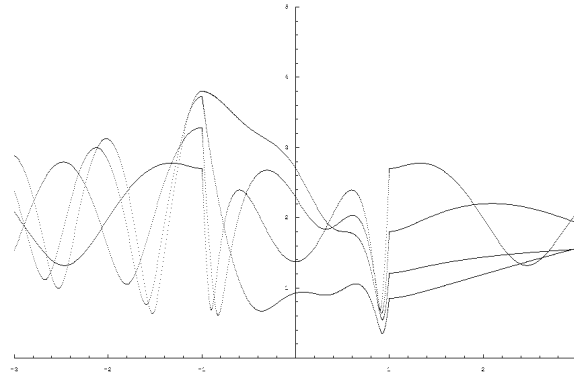


Figura 13: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.00$

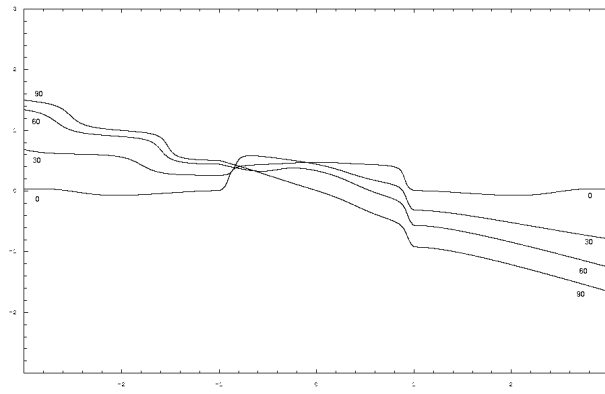


Figura 14: Fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.00$

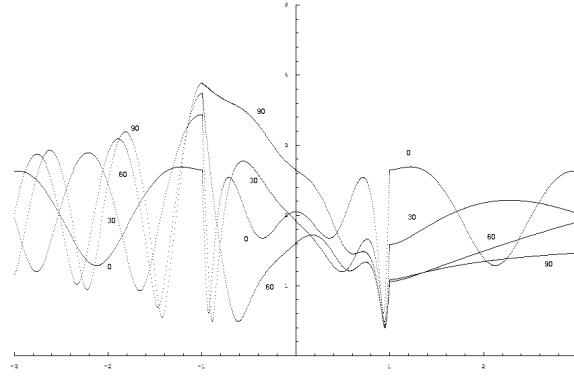


Figura 15: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.25$

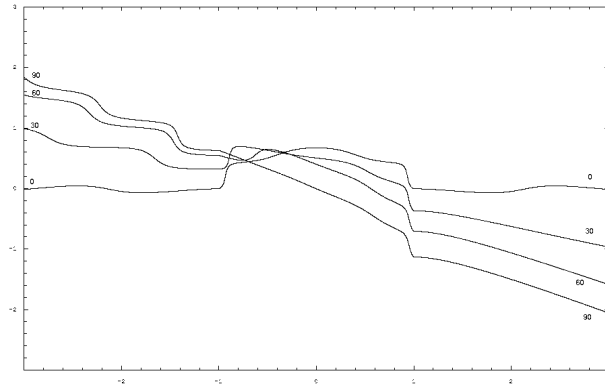


Figura 16: Fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.25$

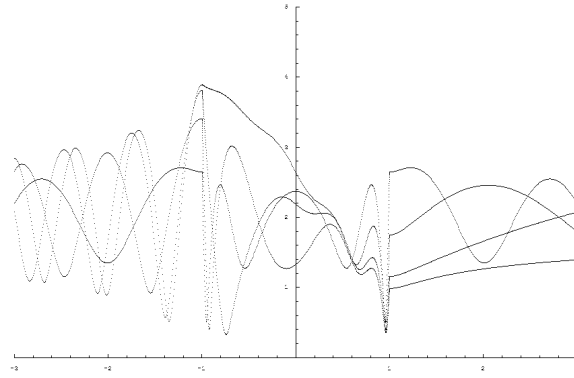


Figura 17: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.50$

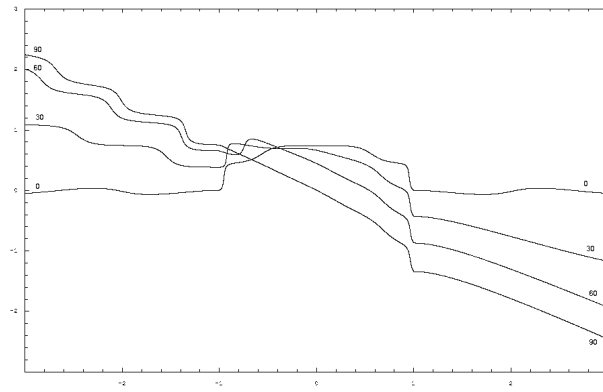


Figura 18: Fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.50$

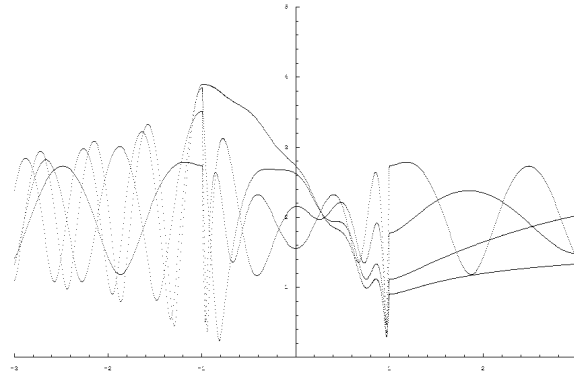


Figura 19: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.75$

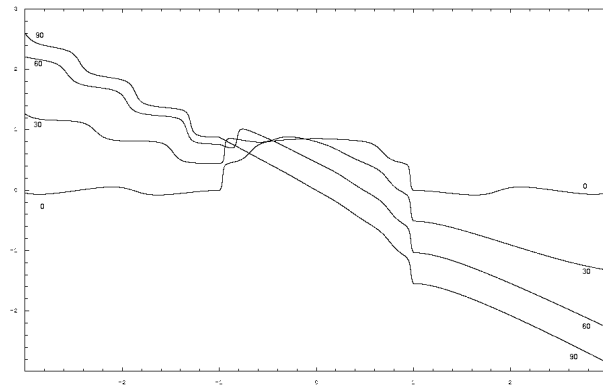


Figura 20: Fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.75$

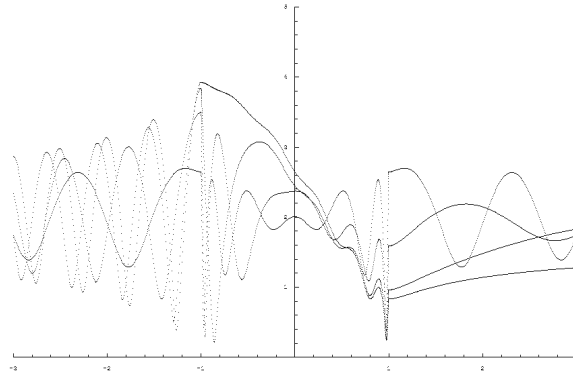


Figura 21: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 2.0$

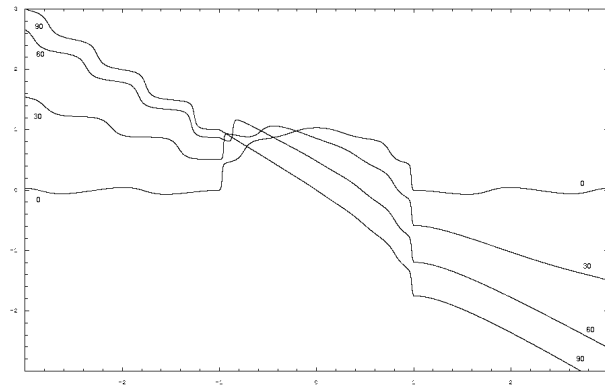


Figura 22: Fase para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 2.0$

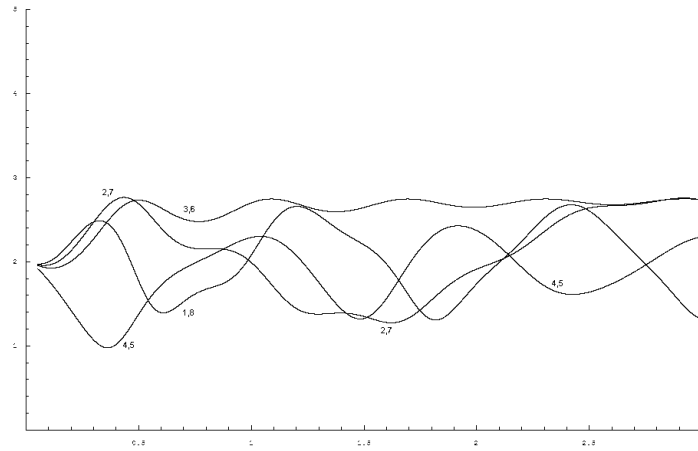


Figura 23: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 0^\circ$

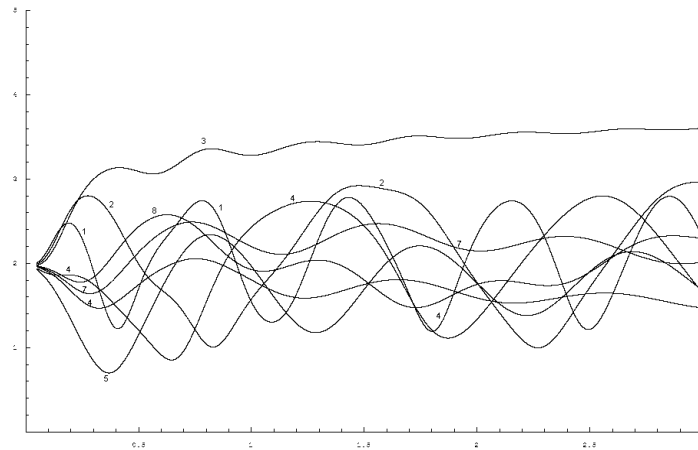


Figura 24: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 30^\circ$

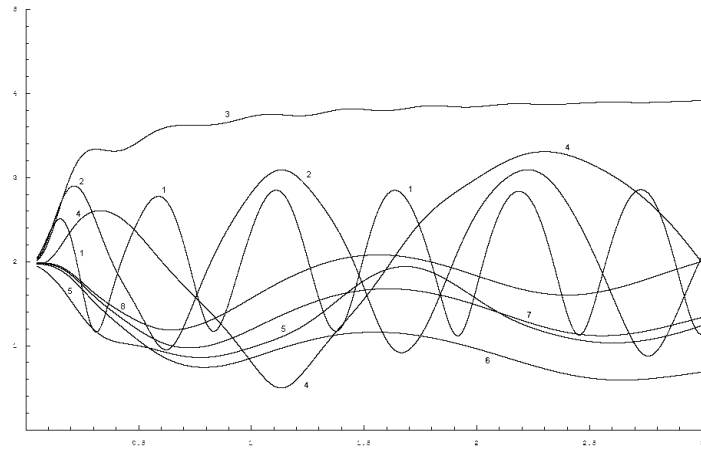


Figura 25: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 60^\circ$

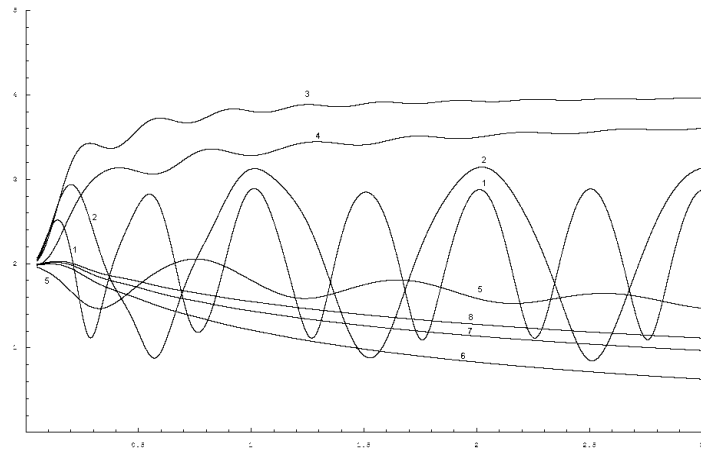


Figura 26: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 90^\circ$

7 Fuente puntual cilíndrica

Hasta aquí, sólo se reprodujo los resultados del Dr. Trifunac, ahora se consirerará la excitación del semiespacio por una fuente puntual cilíndrica ubicada a Ro de distancia del origen de coordenadas en lugar del tren infinito de ondas planas SH , la ecuación (2) queda expresada como

$$\begin{aligned} U_z^i + U_z^r = & 2J_0(kr) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{2n}^{(2)}(kRo)}{H_0^{(2)}} J_{2n}(kr) \cos 2n\gamma \cos 2n\theta \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}^{(2)}(kRo)}{H_0^{(2)}} J_{2n+1}(kr) \sin(2n+1)\gamma \sin(2n+1)\theta \end{aligned} \quad (10)$$

donde $J_p(x)$ es la función de Bessel de primera especie con argumento x y orden p , donde $k = \frac{\omega}{\beta}$ es el número de onda absoluto.

Donde al hacer que Ro tienda a ∞ , tenemos que $\frac{H_{2n}^{(2)}(kRo)}{H_0^{(2)}} \rightarrow (-1)^n$ y $\frac{H_{2n+1}^{(2)}(kRo)}{H_0^{(2)}} \rightarrow -4i(-1)^n$ por ello, se recupera el modelo original

$$\begin{aligned} U_z^i + U_z^r = & 2J_0(kr) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(kr) \cos 2n\gamma \cos 2n\theta \\ & - 4i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(kr) \sin(2n+1)\gamma \sin(2n+1)\theta \end{aligned} \quad (11)$$

El desplazamineto total U_z resultante de la incidencia de ondas puntuales cilíndricas, U_z^i , representa la superposición de las ondas U_z^i , U_z^r y U_z^R . Donde estas deben satisfacer la ecuación diferencial parcial de onda en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \quad (12)$$

con condiciones de frontera

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} = 0 \text{ en } \theta = \pm \frac{1}{2}\pi \text{ y } r > a \quad (13)$$

y

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0 \text{ en } r = a \text{ y } |\theta| < \frac{1}{2}\pi \quad (14)$$

Las ondas U_z^R que representan ondas salientes, ya que estas consisten en ondas dispersas y difractadas por el cañón semicircular. Debiendo satisfacer las ecuación diferencial parcial (12) y las condiciones de frontera libres de esfuerzo (13). En adición, la suma de las ondas U_z^i , U_z^r y U_z^R deben satisfacer la condición

de frontera (14). La onda U_z^R que satisface la ecuación (12) y (13) se escribe como

$$U_z^R = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n H_{2n}^{(2)}(kr) \cos 2n\theta + b_n H_{2n+1}^{(2)}(kr) \sin(2n+1)\theta \right] \quad (15)$$

donde $H_p^{(2)}(x)$ es la función de Hankel de segunda especie con argumento x y orden p , las constantes complejas a_n y b_n pueden ser determinadas al sustituir $U_z^i + U_z^r + U_z^R$ dentro de las condiciones de frontera (14), esto da para $n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= -2 \frac{J_1(ka)}{H_1^{(2)}(ka)}, \\ b_0 &= 4i \sin \gamma \frac{ka J_0(ka) - J_1(ka)}{ka H_0^{(2)}(ka) - H_1^{(2)}(ka)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Y para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_n &= -4 \frac{H_{2n}^{(2)}(kRo)}{H_0^{(2)}} \cos 2n\gamma \frac{ka J_{2n-1}(ka) - 2n J_{2n}(ka)}{ka H_{2n-1}^{(2)}(ka) - 2n H_{2n}^{(2)}(ka)}, \\ b_n &= 4 \frac{H_{2n+1}^{(2)}(kRo)}{H_0^{(2)}} \sin(2n+1)\gamma \frac{ka J_{2n}(ka) - (2n+1) J_{2n+1}(ka)}{ka H_{2n}^{(2)}(ka) - (2n+1) H_{2n+1}^{(2)}(ka)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Donde al hacer que Ro tienda a ∞ , tenemos que $\frac{H_{2n}^{(2)}(kRo)}{H_0^{(2)}} \rightarrow (-1)^n$ y $\frac{H_{2n+1}^{(2)}(kRo)}{H_0^{(2)}} \rightarrow -4i(-1)^n$ por ello, se recupera el modelo original

$$\begin{aligned} a_n &= -4(-1)^n \cos 2n\gamma \frac{ka J_{2n-1}(ka) - 2n J_{2n}(ka)}{ka H_{2n-1}^{(2)}(ka) - 2n H_{2n}^{(2)}(ka)} \\ b_n &= 4i(-1)^n \sin(2n+1)\gamma \frac{ka J_{2n}(ka) - (2n+1) J_{2n+1}(ka)}{ka H_{2n}^{(2)}(ka) - (2n+1) H_{2n+1}^{(2)}(ka)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Una vez que se conocen a_n y b_n , la solución total $U_z^i + U_z^r + U_z^R$ está definida para todo $r > a$ y $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$.

8 Gráficas

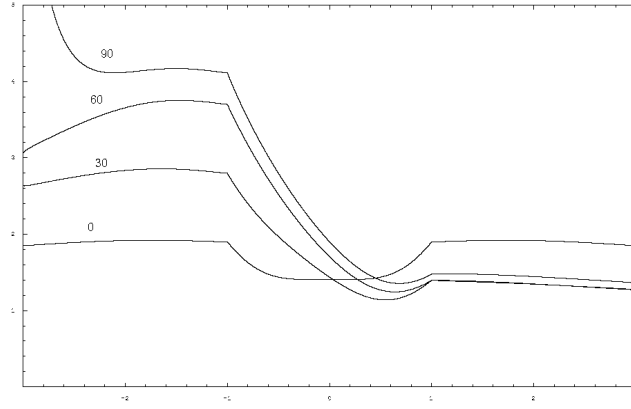


Figura 27: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una fuente puntual cilíndrica ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.25$ y $Ro = 3.0$

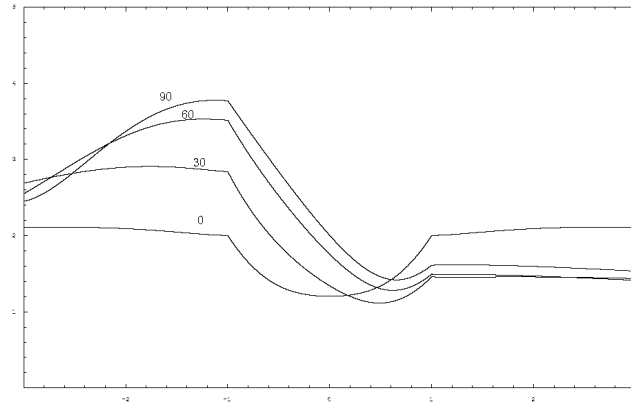


Figura 28: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una fuente puntual cilíndrica ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.25$ y $Ro = 5.0$

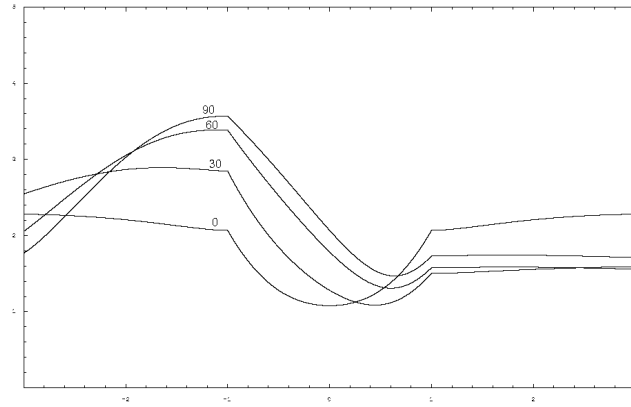


Figura 29: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una fuente puntual cilíndrica ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.25$ y $Ro = 10.0$

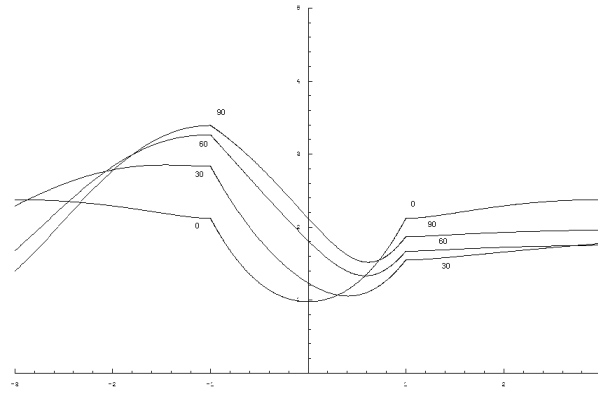


Figura 30: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.25$

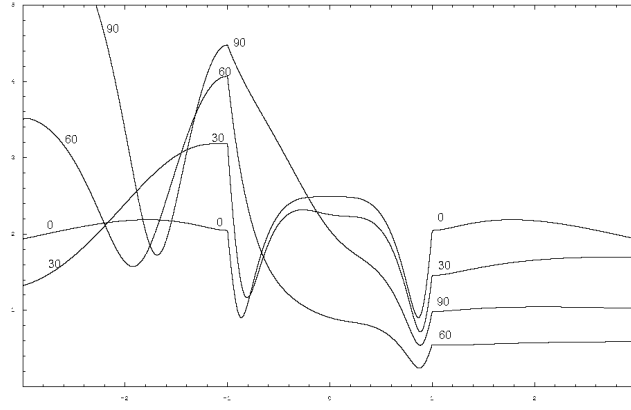


Figura 31: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una fuente puntual cilíndrica ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.75$ y $Ro = 3.0$

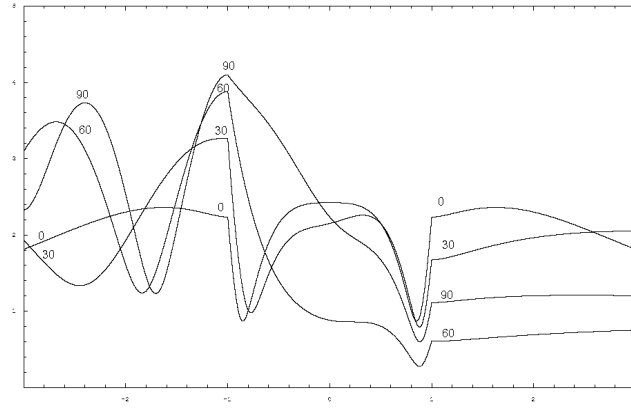


Figura 32: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una fuente puntual cilíndrica ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.75$ y $Ro = 5.0$

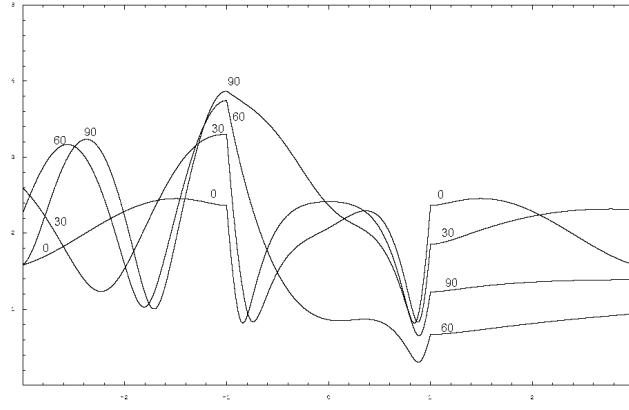


Figura 33: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una fuente puntual cilíndrica ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.75$ y $Ro = 10.0$

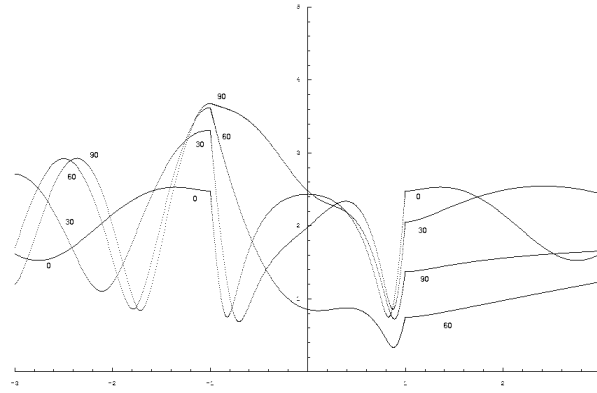


Figura 34: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 0.75$

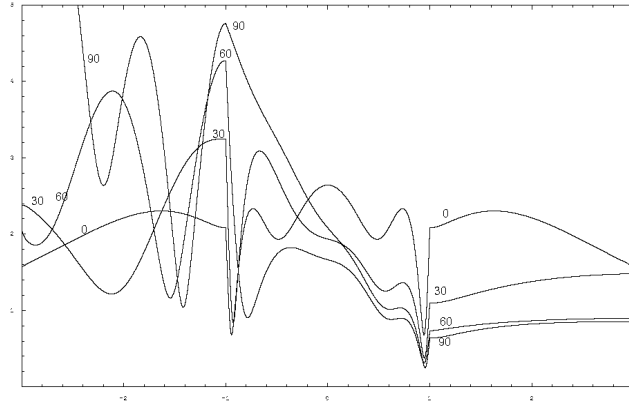


Figura 35: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una fuente puntual cilíndrica ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.25$ y $Ro = 3.0$

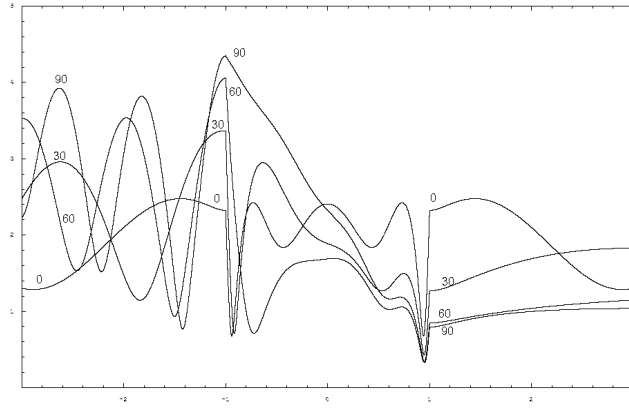


Figura 36: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una fuente puntual cilíndrica ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.25$ y $Ro = 5.0$

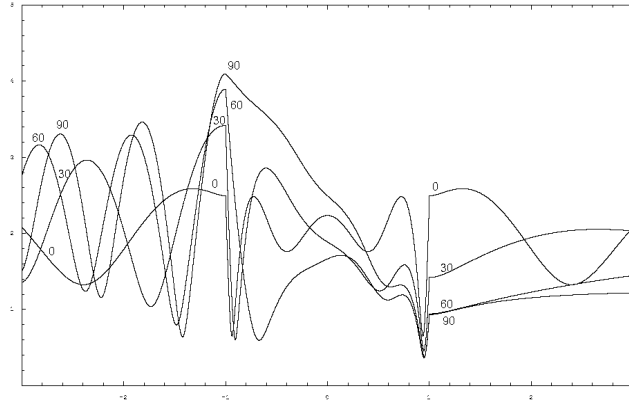


Figura 37: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una fuente puntual cilíndrica ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.25$ y $Ro = 10.0$

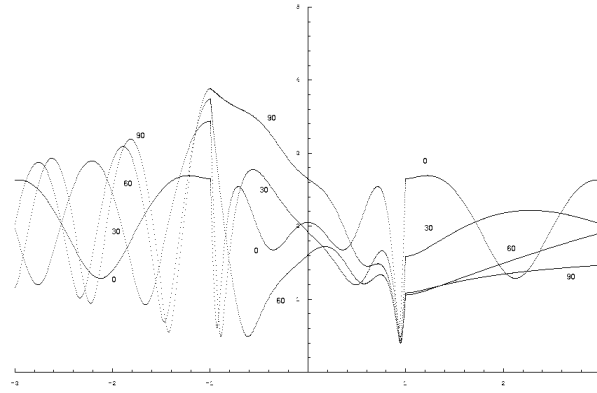


Figura 38: Amplitud del desplazamiento de la superficie para una onda plana incidente SH ($\gamma = 0, 30, 60, 90^\circ$) con $\eta = 1.25$

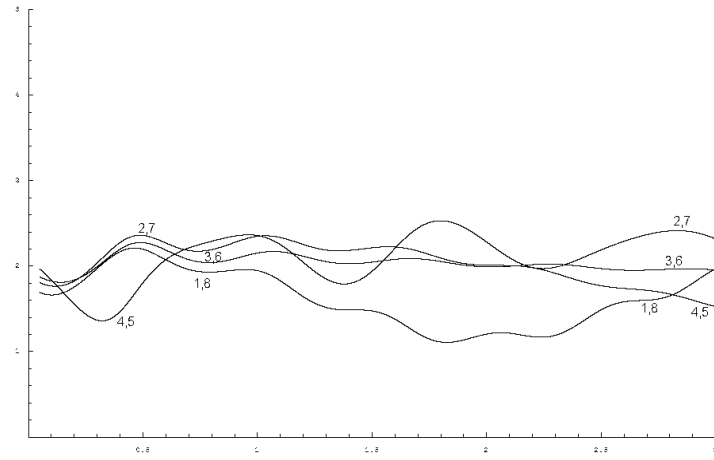


Figura 39: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 0^\circ$, con $Ro = 3.0$

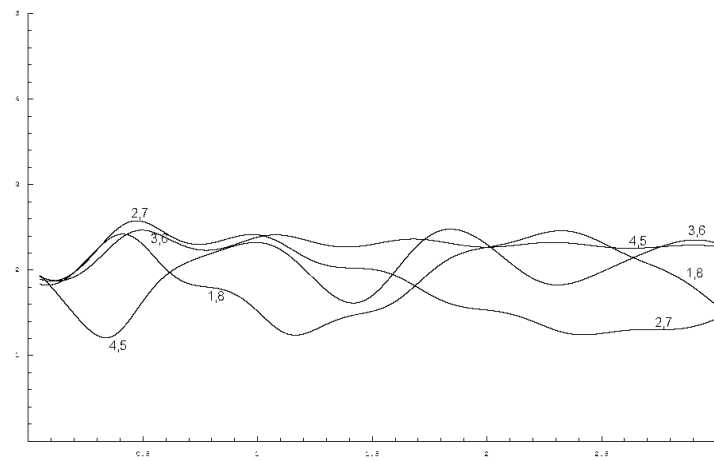


Figura 40: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 0^\circ$, con $Ro = 5.0$

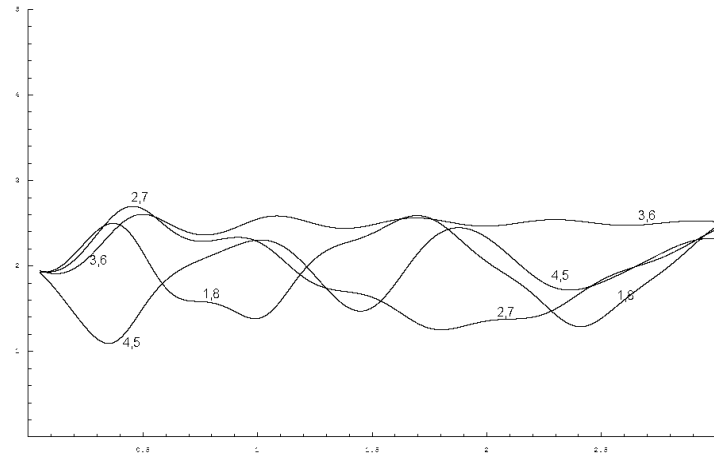


Figura 41: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 0^\circ$, con $Ro = 10.0$

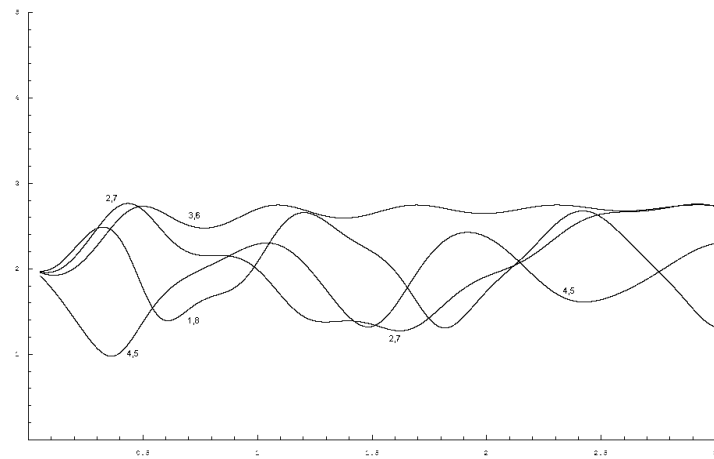


Figura 42: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 0^\circ$

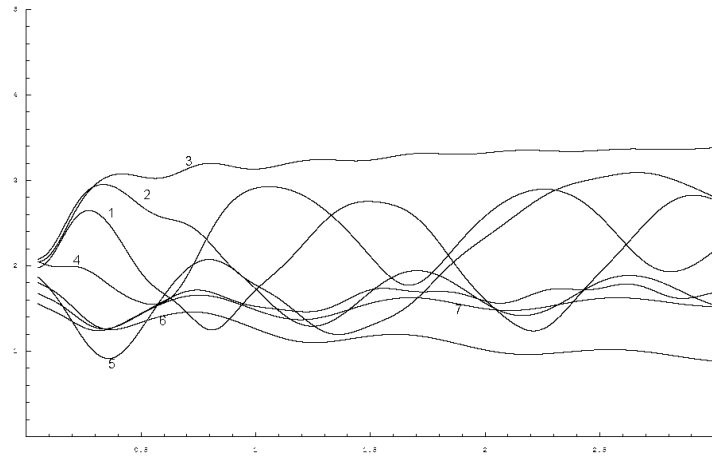


Figura 43: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 30^\circ$, con $Ro = 3.0$

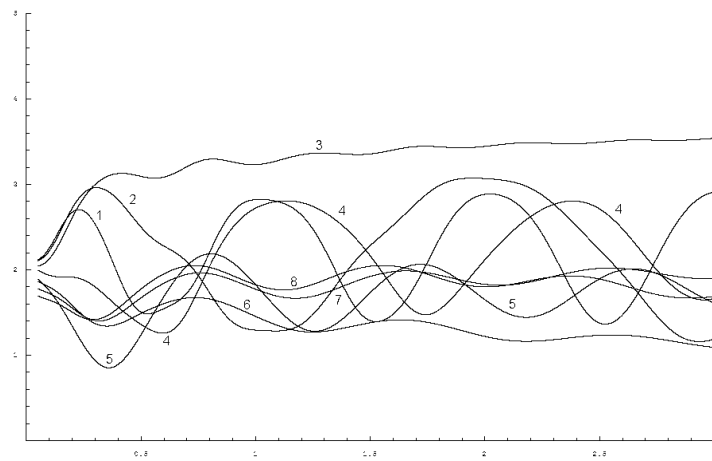


Figura 44: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 30^\circ$, con $Ro = 5.0$

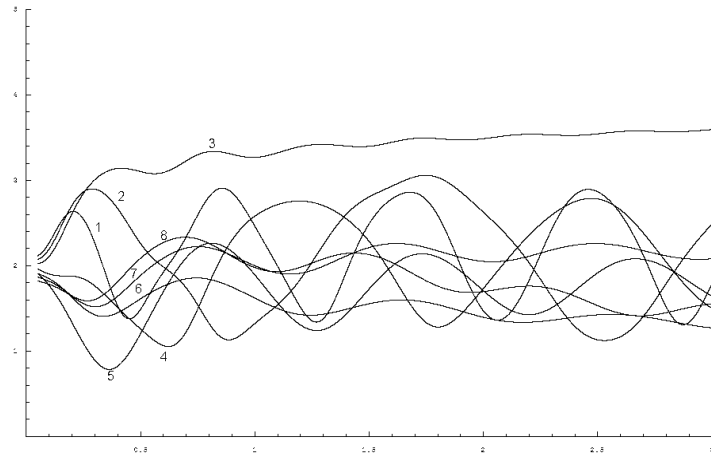


Figura 45: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 30^\circ$, con $Ro = 10.0$

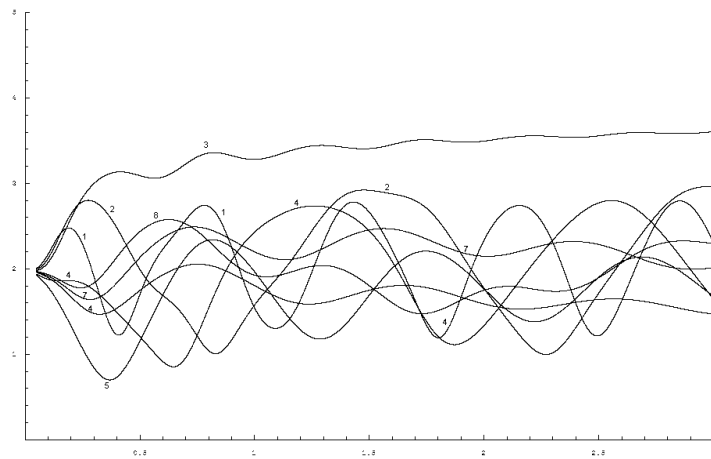


Figura 46: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 30^\circ$

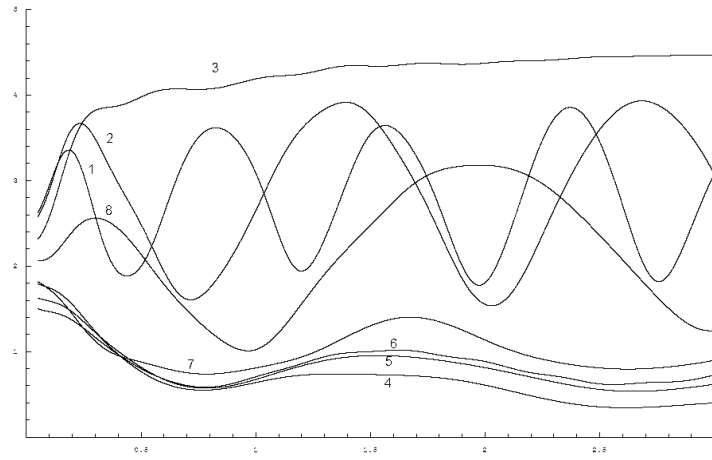


Figura 47: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 60^\circ$, con $Ro = 3.0$

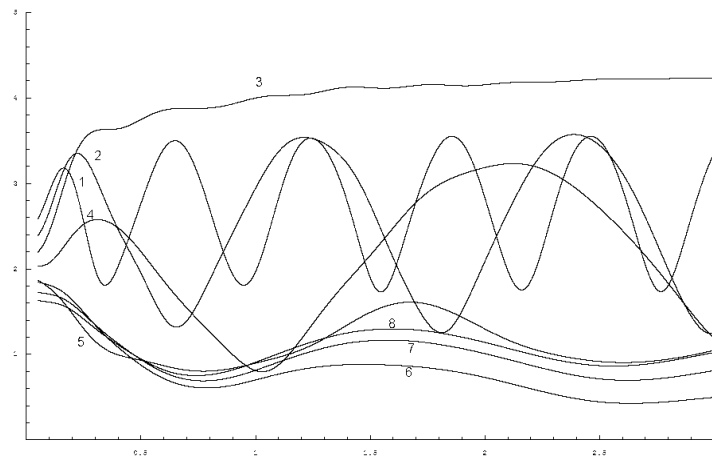


Figura 48: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 60^\circ$, con $Ro = 5.0$

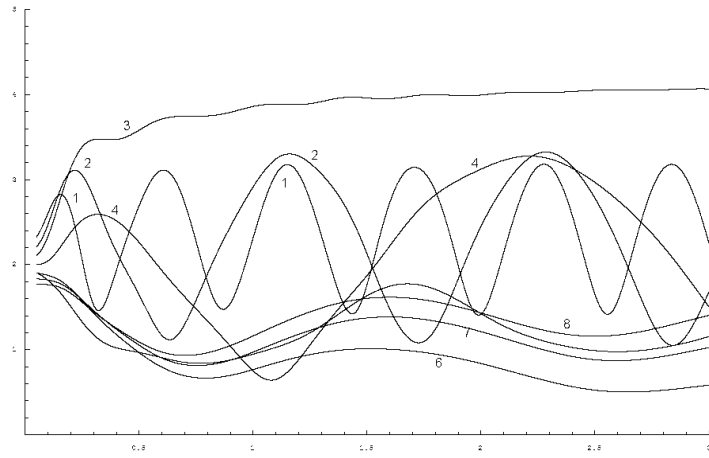


Figura 49: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 60^\circ$, con $Ro = 10.0$

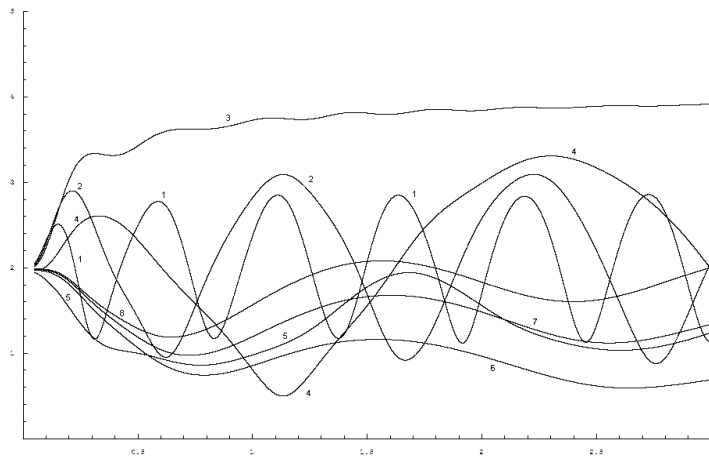


Figura 50: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 60^\circ$

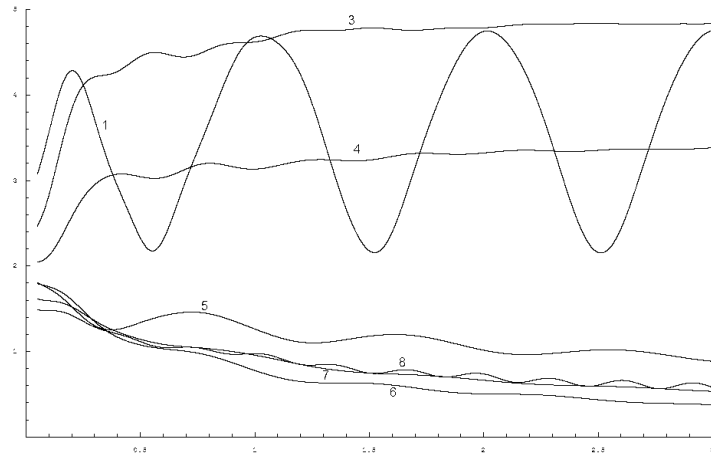


Figura 51: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 90^\circ$, con $Ro = 3.0$

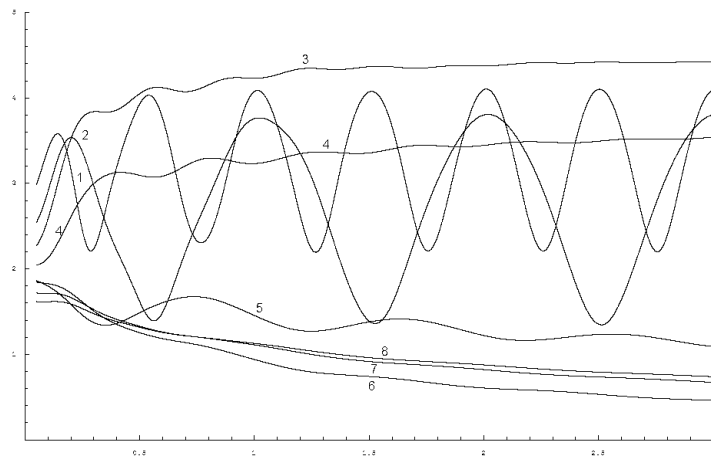


Figura 52: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 90^\circ$, con $Ro = 5.0$

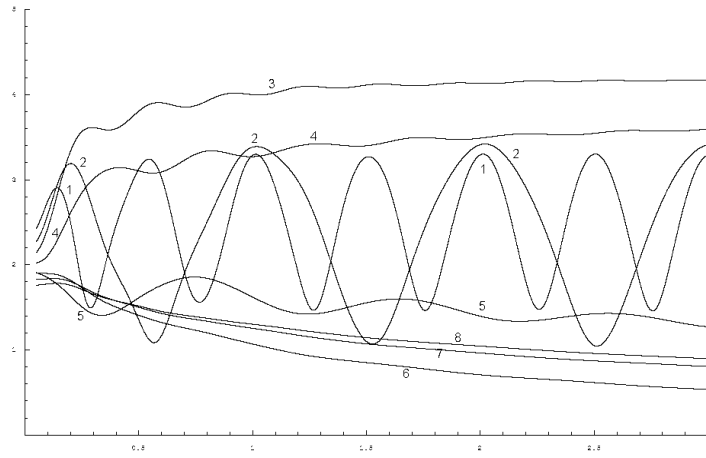


Figura 53: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 90^\circ$, con $Ro = 10.0$

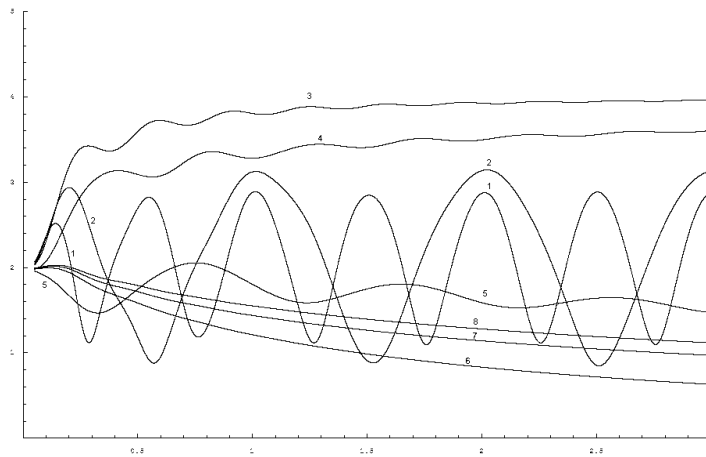


Figura 54: Espectro típico de amplificación para $\gamma = 90^\circ$

9 ¿Qué más se puede hacer?

Otras cosas que se pueden continuar expandiendo sobre este modelo es:

- Cálculos para frecuencias mayores,
- Efectos de la atenuación y
- Cálculo de sismogramas sintéticos

10 Bibliografía

[1] M. D. Trifunac, Scatteering of Plane SH Waves by a Semi-Cylindrical Canyon, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 267-281 (1973).

[2] GNU Scientific Library (GSL), <http://www.gnu.org/software/gsl/>

[3] George Arfken, Matemathical Methods for Phsicists, Academic Prest, 3 ED.