

- c. Aplique el método de Taylor de orden cuatro con  $h = 0.1$  para aproximar la solución y compárela con los valores reales de  $y$ .
- d. Use las respuestas obtenidas en el inciso (c) y la interpolación cúbica fragmentaria de Hermite para aproximar  $y$  en los siguientes valores y compárelos con los valores reales de  $y$ .
- i.  $y(1.04)$                       ii.  $y(1.55)$                       iii.  $y(1.97)$
6. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = -1,$$

con la solución exacta  $y(t) = -1/t$ :

- a. Aplique el método de Taylor de orden dos con  $h = 0.05$  para aproximar la solución y compárela con los valores reales de  $y$ .
- b. Use las respuestas obtenidas en el inciso (a) y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de  $y$ , y después compárelos con los valores reales.
- i.  $y(1.052)$                       ii.  $y(1.555)$                       iii.  $y(1.978)$
- c. Aplique el método de Taylor de orden cuatro con  $h = 0.05$  para aproximar la solución y compárela con los valores reales de  $y$ .
- d. Use las respuestas generadas en el inciso (c) y la interpolación cúbica de Hermite para aproximar los siguientes valores de  $y$ , y compárelos con los valores reales.
- i.  $y(1.052)$                       ii.  $y(1.555)$                       iii.  $y(1.978)$
7. Un proyectil de masa  $m = 0.11$  kg que es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v(0) = 8$  m/s, disminuye su velocidad por efecto de la fuerza de gravedad  $F_g = -mg$  y por la resistencia del aire  $F_r = kv|v|$ , donde  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> y  $k = 0.002$  kg/m. La ecuación diferencial de la velocidad  $v$  está dada por

$$mv' = -mg - kv|v|.$$

- a. Calcule la velocidad después de 0.1, 0.2, ..., 1.0 s.
- b. Determine, con una precisión de décimas de segundo, cuándo alcanzará el proyectil su altura máxima y cuándo empezará a caer.

## 5.4 Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Taylor que vimos en la sección anterior tienen un error local de truncamiento de orden alto, pero poseen la desventaja de requerir el cálculo y evaluación de las derivadas de  $f(t, y)$ . Este es un procedimiento lento y complicado en la mayor parte de los problemas, por lo cual los métodos de Taylor rara vez se emplean en la práctica.

Los **métodos de Runge-Kutta** tienen el error local de truncamiento de orden alto, como los métodos de Taylor, pero permiten prescindir del cálculo y evaluación de las derivadas de  $f(t, y)$ . Antes de exponer las ideas en que se funda su deducción debemos enunciar el teorema de Taylor para dos variables. La demostración de este resultado viene en cualquier libro de cálculo avanzado (véase, por ejemplo, a [Fu, p. 331]).

**Teorema 5.13** Supóngase que  $f(t, y)$  y todas sus derivadas parciales de orden menor o igual que  $n + 1$  son continuas en  $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$ , y sea  $(t_0, y_0) \in D$ . Para toda  $(t, y) \in D$ , existen  $\xi$  entre  $t$  y  $t_0$  y  $\mu$  entre  $y$  y  $y_0$  con:

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y),$$

donde

$$\begin{aligned} P_n(t, y) = & f(t_0, y_0) + \left[ (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right] \\ & + \left[ \frac{(t - t_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + (t - t_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \right. \\ & \left. + \frac{(y - y_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \right] + \dots \\ & + \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (t - t_0)^{n-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j} \partial y^j}(t_0, y_0) \right] \end{aligned}$$

y

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t - t_0)^{n+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j}(\xi, \mu). \quad \blacksquare$$

A la función  $P_n(t, y)$  se le llama  **$n$ -ésimo polinomio de Taylor en dos variables** para la función  $f$  alrededor de  $(t_0, y_0)$  y  $R_n(t, y)$  es el término residual asociado a  $P_n(t, y)$ .

**EJEMPLO 1** En la figura 5.4 se muestra la gráfica de la función

$$f(t, y) = \exp \left[ -\frac{(t-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{4} \right] \cos(2t + y - 7)$$

junto con el segundo polinomio de Taylor de  $f$  alrededor de  $(2, 3)$ , es decir, el polinomio en dos variables

$$P_2(t, y) = 1 - \frac{9}{4} (t-2)^2 - 2(t-2)(y-3) - \frac{3}{4} (y-3)^2.$$

Sería tedioso obtener manualmente la diferenciación necesaria para determinar este polinomio. Por fortuna, disponemos de un procedimiento de Maple que lo hace por nosotros. Primero debemos iniciar el procedimiento del polinomio de Taylor de variables múltiples introduciendo el comando:

```
> readlib (mtaylor);
```

que produce la respuesta

```
proc()... fin proc
```

El polinomio de Taylor que necesitamos en este ejemplo lo obtenemos introduciendo el comando

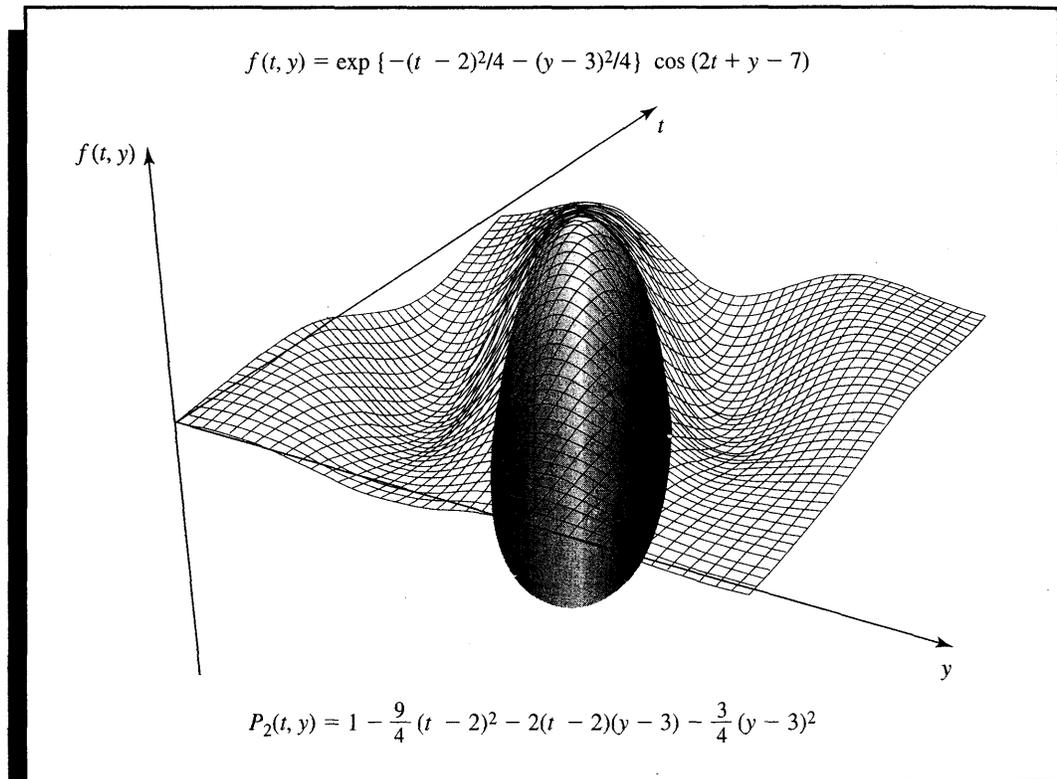
```
>mtaylor (exp(-(t-2)^2/4-(y-3)^2/4)*cos(2*t+y-7), [t=2,y=3], 3);
```

El último parámetro de este comando indica que queremos el segundo polinomio multivariado de Taylor, es decir, el polinomio cuadrático. Si este parámetro es 2, obtenemos el polinomio lineal; si es 1, obtenemos el polinomio constante. Cuando se omite este parámetro, adquiere el valor por omisión de 6 y nos da el quinto polinomio.

La respuesta que se obtiene con este comando de Maple es el polinomio

$$1 - \frac{9}{4}(t - 2)^2 - 2(t - 2)(y - 3) - \frac{3}{4}(y - 3)^2. \quad \blacksquare$$

Figura 5.4



El primer paso al derivar el método de Runge-Kutta, es determinar los valores de  $a_1$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  con la propiedad de que  $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$  aproxima

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y),$$

con un error no mayor que  $O(h^2)$ , o sea el error local de truncamiento del método de Taylor de orden dos. Dado que

$$f'(t, y) = \frac{df}{dt}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot y'(t) \quad \text{y} \quad y'(t) = f(t, y),$$

esto implica que

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot f(t, y). \quad (5.18)$$

Al desarrollar  $f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$  en su polinomio de Taylor de grado uno alrededor de  $(t, y)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1) &= a_1 f(t, y) + a_1 \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) \\ &+ a_1 \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + a_1 \cdot R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1), \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde

$$R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{\beta_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu), \quad (5.20)$$

para alguna  $\xi$  entre  $t$  y  $t + \alpha_1$  y  $\mu$  entre  $y$  y  $y + \beta_1$ .

Al igualar los coeficientes de  $f$  y sus derivadas en las ecuaciones (5.18) y (5.19), obtenemos las tres ecuaciones

$$f(t, y): \quad a_1 = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, y): \quad a_1 \alpha_1 = \frac{h}{2};$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y): \quad a_1 \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y).$$

En forma única se determina que los parámetros  $a_1$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  son

$$a_1 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{h}{2} \quad \text{y} \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y);$$

por tanto

$$T^{(2)}(t, y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) - R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right),$$

y de acuerdo con la ecuación (5.20),

$$\begin{aligned} R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) &= \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \frac{h^2}{4} f(t, y) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) \\ &+ \frac{h^2}{8} (f(t, y))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu). \end{aligned}$$

Si todas las derivadas parciales de segundo orden de  $f$  están acotadas, entonces

$$R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right)$$

es  $O(h^2)$ , o sea el orden del error local de truncamiento del método de Taylor de orden dos. En consecuencia, al utilizar el procedimiento nuevo en vez del método de Taylor de orden dos se podría agregar algún error; pero ello no aumenta el orden del error.

El método de la ecuación de diferencia que resulta al sustituir  $T^{(2)}(t, y)$  por  $f(t + (h/2), y + (h/2)f(t, y))$  en el método de Taylor de orden dos es un método específico de Runge-Kutta, conocido con el nombre de *método del punto medio*.

**Método del punto medio:**

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right), \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Puesto que sólo tres parámetros se encuentran en  $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$  y los tres se requieren en la igualdad con  $T^{(2)}$ , necesitamos una forma más compleja para cumplir las condiciones que requiere cualquiera de los métodos de Taylor de orden superior.

La forma más apropiada de cuatro parámetros con que se aproxima

$$T^{(3)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y) + \frac{h^2}{6} f''(t, y)$$

es

$$a_1 f(t, y) + a_2 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y)); \quad (5.21)$$

y ni siquiera con esto se tiene la suficiente flexibilidad para igualar el término

$$\frac{h^2}{6} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right]^2 f(t, y),$$

resultante de la expansión de  $(h^2/6)f''(t, y)$ . En consecuencia, lo mejor que podemos lograr utilizando (5.21), son métodos con el error local de truncamiento  $O(h^2)$ . No obstante, el hecho de que (5.21) tenga cuatro parámetros, da cierta flexibilidad en su elección para poder derivar varios métodos  $O(h^2)$ . Uno de los más importantes es el *método modificado de Euler*, que corresponde a seleccionar  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$  y  $\alpha_2 = \delta_2 = h$  y presenta la siguiente forma de ecuación de diferencias.

**Método modificado de Euler:**

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))],$$

para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

El otro método importante  $O(h^2)$  es el *de Heun*, que corresponde a  $a_1 = \frac{1}{4}$ ,  $a_2 = \frac{3}{4}$  y  $\alpha_2 = \delta_2 = \frac{2}{3}h$ , y que tiene la forma de ecuación de diferencia siguiente.

**Método de Heun:**

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4} [f(t_i, w_i) + 3f(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}hf(t_i, w_i))],$$

para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Ambos se clasifican como métodos de Runge-Kutta de orden dos, que es el orden de su error local de truncamiento.

**EJEMPLO 2** Supóngase que aplicamos los métodos de Runge-Kutta de orden dos a nuestro ejemplo

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5,$$

con  $N = 10$ ,  $h = 0.2$ ,  $t_i = 0.2i$  y  $w_0 = 0.5$  en cada caso. Las ecuaciones de diferencias son

$$\text{Método del punto medio: } w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.218;$$

$$\text{Método modificado de Euler: } w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.216;$$

$$\text{Método de Heun: } w_{i+1} = 1.22w_i - 0.0088i^2 - 0.008i + 0.217\bar{3},$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, 9$ . La tabla 5.5 contiene los resultados de estos cálculos. Para este problema, es mejor el método del punto medio, seguido por el método de Heun. ■

**Tabla 5.5**

$t_i$	$y(t_i)$	Método del punto medio	Error	Método modificado de Euler	Error	Método de Heun	Error
0.0	0.5000000	0.5000000	0	0.5000000	0	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8280000	0.0012986	0.8260000	0.0032986	0.8273333	0.0019653
0.4	1.2140877	1.2113600	0.0027277	1.2069200	0.0071677	1.2098800	0.0042077
0.6	1.6489406	1.6446592	0.0042814	1.6372424	0.0116982	1.6421869	0.0067537
0.8	2.1272295	2.1212842	0.0059453	2.1102357	0.0169938	2.1176014	0.0096281
1.0	2.6408591	2.6331668	0.0076923	2.6176876	0.0231715	2.6280070	0.0128521
1.2	3.1799415	3.1704634	0.0094781	3.1495789	0.0303627	3.1635019	0.0164396
1.4	3.7324000	3.7211654	0.0112346	3.6936862	0.0387138	3.7120057	0.0203944
1.6	4.2834838	4.2706218	0.0128620	4.2350972	0.0483866	4.2587802	0.0247035
1.8	4.8151763	4.8009586	0.0142177	4.7556185	0.0595577	4.7858452	0.0293310
2.0	5.3054720	5.2903695	0.0151025	5.2330546	0.0724173	5.2712645	0.0342074

Aunque podemos aproximar  $T^{(3)}(t, y)$  con el error  $O(h^3)$  mediante una expresión de la forma

$$f(t + \alpha_1, y + \delta_1 f(t + \alpha_2, y + \delta_2 f(t, y))),$$

que contiene cuatro parámetros, el álgebra con que se determinan  $\alpha_1$ ,  $\delta_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\delta_2$  es complicada y, por lo mismo, no la explicaremos aquí. De hecho, el método de Runge-Kutta de orden tres que resulta de esta expresión generalmente no se emplea. El método de Runge-Kutta de mayor uso es el de orden cuatro y, en la forma de la ecuación en diferencias, se da por el siguiente método.

**Método de Runge-Kutta de orden cuatro:**

$$w_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3),$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ . Este método tiene el error local de truncamiento  $O(h^4)$ , siempre que la solución  $y(t)$  tenga cinco derivadas continuas. Se introduce la notación  $k_1, k_2, k_3, k_4$  en él para prescindir de las anidaciones sucesivas en la segunda variable de  $f(t, y)$  (véase el ejercicio 17). En el algoritmo 5.2 se pone en ejecución el método de Runge-Kutta de orden cuatro.

**ALGORITMO****5.2****Método de Runge-Kutta de orden cuatro**

Para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

en  $(N + 1)$  números uniformemente espaciados en el intervalo  $[a, b]$ :

**ENTRADA** extremos  $a, b$ ; entero  $N$ ; condición inicial  $\alpha$ .

**SALIDA** aproximación  $w$  a  $y$  en los  $(N + 1)$  valores de  $t$ .

**Paso 1** Tome  $h = (b - a)/N$ ;

$$t = a;$$

$$w = \alpha;$$

**SALIDA**  $(t, w)$ .

**Paso 2** Para  $i = 1, 2, \dots, N$  haga pasos 3-5.

**Paso 3** Tome  $K_1 = hf(t, w)$ ;

$$K_2 = hf(t + h/2, w + K_1/2);$$

$$K_3 = hf(t + h/2, w + K_2/2);$$

$$K_4 = hf(t + h, w + K_3).$$

**Paso 4** Tome  $w = w + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ ; (Calcule  $w_i$ .)

$$t = a + ih. \quad (\text{Calcule } t_i.)$$

**Paso 5** **SALIDA**  $(t, w)$ .

**Paso 6** **PARAR**. ■

**EJEMPLO 3**

Al aplicar el método de Runge-Kutta de orden cuatro para obtener aproximaciones a la solución del problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5,$$

con  $h = 0.2$ ,  $N = 10$  y  $t_i = 0.2i$  obtenemos los resultados y los errores que se proporcionan en la tabla 5.6. ■

Tabla 5.6

$t_i$	Valores exactos $y_i = y(t_i)$	Método de Runge-Kutta de orden cuarto $w_i$	Error $ y_i - w_i $
0.0	0.5000000	0.5000000	0
0.2	0.8292986	0.8292933	0.0000053
0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
0.8	2.1272295	2.1272027	0.0000269
1.0	2.6408591	2.6408227	0.0000364
1.2	3.1799415	3.1798942	0.0000474
1.4	3.7324000	3.7323401	0.0000599
1.6	4.2834838	4.2834095	0.0000743
1.8	4.8151763	4.8150857	0.0000906
2.0	5.3054720	5.3053630	0.0001089

El mayor esfuerzo de cálculo que se requiere para aplicar los métodos de Runge-Kutta es la evaluación de  $f$ . En los métodos de segundo orden, el error local de truncamiento es  $O(h^2)$ , y el costo es realizar dos evaluaciones funcionales por paso. El método de Runge-Kutta de orden cuatro requiere cuatro evaluaciones por paso y el error local de truncamiento es  $O(h^4)$ . Butcher (véase un resumen en [But]) estableció la relación entre la cantidad de evaluaciones por paso y el orden del error local de truncamiento que aparece en la tabla 5.7. En ésta se indica por qué los métodos de un orden menor que cinco con un tamaño menor de paso se prefieren a los de orden superior con un tamaño mayor de paso.

Tabla 5.7

Evaluaciones por paso	2	3	4	$5 \leq n \leq 7$	$8 \leq n \leq 9$	$10 \leq n$
El mejor error local de truncamiento posible	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

Una medida con que se comparan los métodos de orden menor de Runge-Kutta se describe así:

Como el método de Runge-Kutta de orden cuatro requiere realizar cuatro evaluaciones por paso, deberá dar respuestas más exactas que las del método de Euler con un cuarto del tamaño de paso para que sea mejor. De manera análoga, si queremos que el método de Runge-Kutta de orden cuatro sea mejor, deberá ofrecer una mayor precisión con el tamaño de paso  $h$  que el método de segundo orden con el tamaño de paso  $\frac{1}{2}h$ , porque el método de orden cuatro requiere el doble de evaluaciones por paso.

En el siguiente ejemplo se explica la superioridad del método de Runge-Kutta de cuarto orden según esta medida.

**EJEMPLO 4** Para el problema

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5,$$

El método de Euler con  $h = 0.025$ , el método del punto medio con  $h = 0.05$  y el método de Runge-Kutta de cuarto orden con  $h = 0.1$  se comparan en los puntos de la red 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5. Todos requieren 20 evaluaciones funcionales para determinar los valores incluidos en la tabla 5.8 con que se aproxima  $y(0.5)$ . En este ejemplo, el método de cuarto orden resulta evidentemente superior. ■

Tabla 5.8

$t_i$	Valores exactos	Método de Euler $h = 0.025$	Método modificado de Euler $h = 0.05$	Método de Runge-Kutta de cuarto orden $h = 0.1$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000
0.1	0.6574145	0.6554982	0.6573085	0.6574144
0.2	0.8292986	0.8253385	0.8290778	0.8292983
0.3	1.0150706	1.0089334	1.0147254	1.0150701
0.4	1.2140877	1.2056345	1.2136079	1.2140869
0.5	1.4256394	1.4147264	1.4250141	1.4256384

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.4

- Aplique el método modificado de Euler para aproximar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial y compare después los resultados con los valores reales.

  - $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ , con  $h = 0.5$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ .
  - $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ , con  $h = 0.5$ ; solución real  $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$ .
  - $y' = 1 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ , con  $h = 0.25$ ; solución real  $y(t) = t \ln t + 2t$ .
  - $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ , con  $h = 0.25$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$ .
- Repita el ejercicio 1 aplicando el método de Heun.
- Repita el ejercicio 1 aplicando el método del punto medio.
- Aplique el método modificado de Euler para aproximar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial y compare después los resultados con los valores reales.

  - $y' = y/t - (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 1$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = t/(1 + \ln t)$ .
  - $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = 0$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = t \tan(\ln t)$ .
  - $y' = -(y + 1)(y + 3)$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = -2$ , con  $h = 0.2$ ; solución real  $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$ .
  - $y' = -5y + 5t^2 + 2t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$ , con  $h = 0.1$ ; solución real  $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$ .
- Use los resultados del ejercicio 4 y la interpolación lineal para aproximar los valores de  $y(t)$  y después compare los resultados con los valores reales.

  - $y(1.25)$  y  $y(1.93)$
  - $y(2.1)$  y  $y(2.75)$
  - $y(1.3)$  y  $y(1.93)$
  - $y(0.54)$  y  $y(0.94)$

6. Repita el ejercicio 4 aplicando el método de Heun.
7. Repita el ejercicio 5 usando los resultados del ejercicio 6.
8. Repita el ejercicio 4 aplicando el método del punto medio.
9. Repita el ejercicio 5 usando los resultados del ejercicio 8.
10. Repita el ejercicio 1 aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.
11. Repita el ejercicio 4 aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.
12. Use los resultados del ejercicio 11 y la interpolación cúbica de Hermite para aproximar los valores de  $y(t)$  y compare las aproximaciones con los valores reales.
  - a.  $y(1.25)$  y  $y(1.93)$
  - b.  $y(2.1)$  y  $y(2.75)$
  - c.  $y(1.3)$  y  $y(1.93)$
  - d.  $y(0.54)$  y  $y(0.94)$
13. Demuestre que el método del punto medio, el método modificado de Euler y el método de Heun ofrecen las mismas aproximaciones al problema de valor real

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$

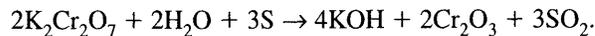
para cualquier elección de  $h$ . ¿Por qué es así?

14. Fluye agua de un tanque cónico invertido provisto de un orificio circular, con una velocidad

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi r^2 \sqrt{2g} \frac{\sqrt{x}}{A(x)},$$

donde  $r$  es el radio del orificio,  $x$  es la altura del nivel del líquido medido desde el vértice del cono y  $A(x)$  es el área de la sección transversal del tanque, a  $x$  unidades por arriba del orificio. Suponga que  $r = 0.1$  pies,  $g = 32.1$  pies/s<sup>2</sup>, y que el tanque tiene un nivel inicial de agua de 8 pies y un volumen inicial de  $512(\pi/3)$  pies<sup>3</sup>.

- a. Calcule el nivel del agua después de 10 min con  $h = 20$  s.
  - b. Determine, con una exactitud de 1 min, cuándo se vaciará el tanque.
15. La reacción química irreversible en la cual dos moléculas de dicromato sólido de potasio ( $K_2Cr_2O_7$ ), dos moléculas de agua ( $H_2O$ ) y tres átomos de azufre sólido (S) se combinan para producir tres moléculas de dióxido gaseoso de azufre ( $SO_2$ ), cuatro moléculas de hidróxido sólido de potasio (KOH) y dos moléculas de óxido sólido de cromo ( $Cr_2O_3$ ), puede representarse simbólicamente por la ecuación estequiométrica:



Si originalmente se dispone de  $n_1$  moléculas de  $K_2Cr_2O_7$ ,  $n_2$  moléculas de  $H_2O$  y  $n_3$  moléculas de S, la siguiente ecuación diferencial describe la cantidad  $x(t)$  de KOH después del tiempo  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = k \left( n_1 - \frac{x}{2} \right)^2 \left( n_2 - \frac{x}{2} \right)^2 \left( n_3 - \frac{3x}{4} \right)^3,$$

donde  $k$  es la constante de velocidad de la reacción. Si  $k = 6.22 \times 10^{-19}$ ,  $n_1 = n_2 = 2 \times 10^3$  y  $n_3 = 3 \times 10^3$ , ¿cuántas unidades de hidróxido de potasio se formarán después de 0.2 s?

16. Demuestre que el método de diferencias

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + a_1 f(t_i, w_i) + a_2 f(t_i + \alpha_2, w_i + \delta_2 f(t_i, w_i)),$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , no puede tener el error local de truncamiento  $O(h^3)$  para cualquier elección de las constantes  $a_1, a_2, \alpha_2$  y  $\delta_2$ .

17. El método de Runge-Kutta de cuarto orden puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \alpha, \\
 w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{6} f(t_i, w_i) + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_1 h, w_i + \delta_1 h f(t_i, w_i)) \\
 &\quad + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_2 h, w_i + \delta_2 h f(t_i + \gamma_2 h, w_i + \gamma_3 h f(t_i, w_i))) \\
 &\quad + \frac{h}{6} f(t_i + \alpha_3 h, w_i + \delta_3 h f(t_i + \gamma_4 h, w_i + \gamma_5 h f(t_i + \gamma_6 h, w_i + \gamma_7 h f(t_i, w_i)))).
 \end{aligned}$$

Obtenga los valores de las constantes

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6 \text{ y } \gamma_7.$$

## 5.5 Control del error y el método de Runge-Kutta-Fehlberg

En la sección 4.6 vimos el uso apropiado del tamaño variable de paso para producir métodos de aproximación de la integral, con la eficiencia requerida en la cantidad de cálculos. Por sí mismo, ello tal vez no sería suficiente para preferirlos, dada la mayor complejidad de su uso. Pero presentan otra característica que los hace sumamente útiles. En el procedimiento del tamaño de paso incorporan una estimación del error de truncamiento que no requiere aproximar las derivadas superiores de la función. A estos métodos se les llama *adaptativos*, porque adaptan el número y la posición de los nodos con que se efectúa la aproximación, para garantizar que el error de truncamiento no rebase la cota especificada.

Entre el problema de aproximar el valor de una integral definida y el aproximar la solución de un problema de valor inicial existe una estrecha relación. Así pues, no debe sorprendernos que haya métodos adaptativos que aproximan las soluciones de los problemas de valor inicial y que no sólo sean eficientes, sino que además incluyan el control de error.

Un método ideal de la ecuación de diferencias

$$w_{i+1} = w_i + h_i \phi(t_i, w_i, h_i), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

para aproximar la solución  $y(t)$  al problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

deberá tener la propiedad de que, con una tolerancia  $\varepsilon > 0$ , la cantidad mínima de puntos de red servirá para asegurarse de que el error global  $|y(t_i) - w_i|$ , no rebasará  $\varepsilon$  con cualquier  $i = 0, 1, \dots, N$ . No debe sorprendernos que tener una cantidad mínima de puntos de red y el control del error global de un método de diferencias, sea incompatible con el espaciado uniforme de los puntos en los intervalos. En esta sección estudiaremos los métodos con que se controla eficientemente el error de un método de ecuación de diferencias mediante la selección apropiada de los puntos de red.

Aunque no es posible, por lo general, determinar el error global de un método, en la sección 5.10 veremos que existe una estrecha relación entre el error local de truncamiento

y el error global. Mediante métodos de orden distinto podemos predecir el error local de truncamiento y seleccionar con esta predicción un tamaño de paso que controle el error global.

Para ilustrar este método, supongamos que tenemos dos métodos de aproximación. El primero es un método de  $n$ -ésimo orden obtenido de un método de Taylor de  $n$ -ésimo orden de la forma

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\phi(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+1}),$$

que produce las aproximaciones

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + h\phi(t_i, w_i, h), \quad \text{para } i > 0, \end{aligned}$$

con el error de truncamiento  $\tau_{i+1}(h) = O(h^n)$ . En general, el método es generado al aplicar la modificación de Runge-Kutta al método de Taylor, pero la derivación específica carece de importancia.

El segundo método es similar, pero posee un orden mayor; se deriva del método de Taylor de orden  $(n + 1)$ -ésimo de la forma

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\tilde{\phi}(t_i, y(t_i), h) + O(h^{n+2}),$$

Se obtienen las siguientes aproximaciones

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0 &= a \\ \tilde{w}_{i+1} &= \tilde{w}_i + h\tilde{\phi}(t_i, \tilde{w}_i, h), \quad \text{para } i > 0, \end{aligned}$$

con un error local de truncamiento  $\tau_{i+1}(h) = O(h^{n+1})$ .

Primero suponemos que  $w_i \approx y(t_i) \approx \tilde{w}_i$  y seleccionamos un tamaño de paso fijo  $h$  para generar las aproximaciones  $w_{i+1}$  y  $\tilde{w}_{i+1}$  a  $y(t_{i+1})$ . Entonces

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \phi(t_i, y(t_i), h) \\ &= \frac{y(t_{i+1}) - w_i}{h} - \phi(t_i, w_i, h) \\ &= \frac{y(t_{i+1}) - [w_i + h\phi(t_i, w_i, h)]}{h} \\ &= \frac{1}{h} (y(t_{i+1}) - w_{i+1}). \end{aligned}$$

De manera similar

$$\tilde{\tau}_{i+1}(h) = \frac{1}{h} (y(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1}),$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{1}{h} (y(t_{i+1}) - w_{i+1}) \\ &= \frac{1}{h} [(y(t_{i+1}) - \tilde{w}_{i+1}) + (\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})] \\ &= \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \frac{1}{h} (\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}). \end{aligned}$$

Pero  $\tau_{i+1}(h)$  es  $O(h^n)$  y  $\tilde{\tau}_{i+1}(h)$  es  $O(h^{n+1})$ , por lo cual la parte significativa de  $\tau_{i+1}(h)$  debe provenir de

$$\frac{1}{h} (\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}).$$

Esto nos da una aproximación calculada fácilmente del error local de truncamiento del método  $O(h^n)$ :

$$\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h} (\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}).$$

Sin embargo, el objetivo no es sólo estimar el error local del truncamiento, sino ajustar además el tamaño de paso para mantenerlo dentro de una cota especificada. Para hacerlo, ahora se supone que como  $\tau_{i+1}(h)$  es  $O(h^n)$ , existe un número  $K$  independiente de  $h$

$$\tau_{i+1}(h) \approx Kh^n.$$

Después podemos estimar el error local de truncamiento producido al aplicar el método de  $n$ -ésimo orden con un nuevo tamaño de paso  $qh$ , usando las aproximaciones originales  $w_{i+1}$  y  $\tilde{w}_{i+1}$ :

$$\tau_{i+1}(qh) \approx K(qh)^n = q^n(Kh^n) \approx q^n \tau_{i+1}(h) \approx \frac{q^n}{h} (\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}).$$

Para establecer la cota de  $\tau_{i+1}(qh)$  por  $\varepsilon$ , escogemos  $q$  tal que

$$\frac{q^n}{h} |\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}| \approx |\tau_{i+1}(qh)| \leq \varepsilon,$$

es decir, tal que

$$q \leq \left( \frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|} \right)^{1/n}.$$

Un método muy usado que utiliza esta desigualdad para controlar el error es el **método de Runge-Kutta-Fehlberg**. (Véase [Fe].) Éste consiste en emplear el método de Runge-Kutta con el error local de truncamiento de quinto orden,

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6,$$

para estimar el error local en un método de Runge-Kutta de cuarto orden dado por

$$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5,$$

donde

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_1\right),$$

$$\begin{aligned}
 k_3 &= hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\
 k_4 &= hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\
 k_5 &= hf\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\
 k_6 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2656}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).
 \end{aligned}$$

Una ventaja de este método consiste en que sólo se requieren seis evaluaciones de  $f$  por paso. Los métodos arbitrarios de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden usados de manera conjunta requieren (véase la tabla 5.7 en la sección 5.4) al menos cuatro evaluaciones de  $f$  con el método de cuarto orden y seis más con el de quinto orden, lo cual nos da un total de, por lo menos, diez evaluaciones de funciones.

En la teoría del control del error, un valor inicial de  $h$  en el  $i$ -ésimo paso se usó para obtener los primeros valores de  $w_{i+1}$  y  $\tilde{w}_{i+1}$ , que nos permitieron determinar  $q$  en ese paso, y luego se repitieron los cálculos. Este procedimiento requiere el doble de evaluaciones de funciones por paso, sin control de error. En la práctica, el valor de  $q$  a usar se selecciona de manera un poco diferente, a fin de que valga la pena el aumento de evaluaciones de funciones. El valor de  $q$  determinado en el  $i$ -ésimo paso cumple dos propósitos:

1. Para rechazar, de ser necesario, la elección inicial de  $h$  en el paso  $i$ -ésimo y repetir los cálculos por medio de  $qh$ , y
2. Para predecir una elección adecuada de  $h$  para el  $(i + 1)$ -ésimo paso.

Debido a la cuota que debe pagarse en términos de evaluaciones de funciones si se repiten los pasos,  $q$  tiende a ser elegida de manera conservadora; de hecho, en el método de Runge-Kutta-Fehlberg con  $n = 4$ , la elección común es

$$q = \left( \frac{\varepsilon h}{2|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|} \right)^{1/4} = 0.84 \left( \frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|} \right)^{1/4}.$$

En el algoritmo 5.3 para el método de Runge-Kutta-Fehlberg, se agrega el paso 9 para suprimir grandes modificaciones al tamaño del paso. Esto se hace para no tener que dedicar mucho tiempo a los tamaños pequeños de paso en las regiones donde hay irregularidades de las derivadas de  $y$ , y para evitar los grandes tamaños de paso, que pueden llevar a omitir las regiones sensibles entre los pasos. En algunos casos, en el algoritmo se omite totalmente el procedimiento que aumenta el tamaño del paso, y el procedimiento con que se disminuye el tamaño se modifica para que se incorpore sólo cuando es necesario controlar el error.

**ALGORITMO****5.3****Método de Runge-Kutta-Fehlberg**

Para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

con un error local de truncamiento que no rebase la tolerancia especificada:

**ENTRADA** extremos  $a, b$ ; condición inicial  $\alpha$ ; tolerancia  $TOL$ ; tamaño máximo de paso  $hmáx$ ; tamaño mínimo de paso  $hmín$ .

**SALIDA**  $t, w, h$  donde  $w$  aproxima a  $y(t)$  y se usó el tamaño de paso  $h$  o un mensaje de que se rebasó el tamaño mínimo de paso.

**Paso 1** Tome  $t = a$ ;  
 $w = \alpha$ ;  
 $h = hmáx$ ;  
 $BAND = 1$ ;  
**SALIDA** ( $t, w$ ).

**Paso 2** Mientras ( $BAND = 1$ ) haga pasos 3-11.

**Paso 3** Tome  $K_1 = hf(t, w)$ ;  
 $K_2 = hf(t + \frac{1}{4}h, w + \frac{1}{4}K_1)$ ;  
 $K_3 = hf(t + \frac{3}{8}h, w + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2)$ ;  
 $K_4 = hf(t + \frac{12}{13}h, w + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3)$ ;  
 $K_5 = hf(t + h, w + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4)$ ;  
 $K_6 = hf(t + \frac{1}{2}h, w - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5)$ .

**Paso 4** Tome  $R = \frac{1}{h} \left| \frac{1}{360}K_1 - \frac{128}{4275}K_3 - \frac{2197}{75240}K_4 + \frac{1}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6 \right|$ .

(Nota:  $R = \frac{1}{h} \left| \tilde{w}_{i+1} - w_{i+1} \right|$ .)

**Paso 5** Si  $R \leq TOL$  entonces haga pasos 6 y 7.

**Paso 6** Tome  $t = t + h$ ; (aproximación aceptada).

$$w = w + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5.$$

**Paso 7** **SALIDA** ( $t, w, h$ ).

**Paso 8** Tome  $\delta = 0.84(TOL/R)^{1/4}$ .

**Paso 9** Si  $\delta \leq 0.1$  entonces tome  $h = 0.1h$   
o si  $\delta \geq 4$  entonces tome  $h = 4h$   
de otro modo tome  $h = \delta h$ . (Calcule de nuevo  $h$ .)

**Paso 10** Si  $h > hmáx$  entonces tome  $h = hmáx$ .

**Paso 11** Si  $t \geq b$  entonces tome  $BAND = 0$   
de otro modo si  $t + h > b$  entonces tome  $h = b - t$   
de otro modo si  $h < hmín$  entonces  
tome  $BAND = 0$ ;  
**SALIDA** ('rebasado  $h$  mínimo').  
(Procedimiento terminado de manera no satisfactoria.)

**Paso 12** (El procedimiento se completó.)  
**PARAR.**

**EJEMPLO 1** Utilizaremos el algoritmo 5.3 para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5,$$

que tiene la solución  $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ . La entrada del algoritmo es la tolerancia  $TOL = 10^{-5}$ , un tamaño máximo de paso  $h_{\max} = 0.25$  y un tamaño mínimo de paso  $h_{\min} = 0.01$ . Los resultados se muestran en la tabla 5.9. Las dos últimas columnas de la tabla contienen los resultados del método de quinto orden. Con valores pequeños de  $t$ , el error es menor que el del método de cuarto orden, pero es mayor que cuando  $t$  aumenta. ■

**Tabla 5.9**

$t_i$	$y_i = y(t_i)$	RKF-4			RKF-5		
		$w_i$	$h_i$	$R_i$	$ y_i - w_i $	$\hat{w}_i$	$ y_i - \hat{w}_i $
0	0.5	0.5			0.5		
0.2500000	0.9204873	0.9204886	0.2500000	$6.2 \times 10^{-6}$	$1.3 \times 10^{-6}$	0.9204870	$2.424 \times 10^{-7}$
0.4865522	1.3964884	1.3964910	0.2365522	$4.5 \times 10^{-6}$	$2.6 \times 10^{-6}$	1.3964900	$1.510 \times 10^{-6}$
0.7293332	1.9537446	1.9537488	0.2427810	$4.3 \times 10^{-6}$	$4.2 \times 10^{-6}$	1.9537477	$3.136 \times 10^{-6}$
0.9793332	2.5864198	2.5864260	0.2500000	$3.8 \times 10^{-6}$	$6.2 \times 10^{-6}$	2.5864251	$5.242 \times 10^{-6}$
1.2293332	3.2604520	3.2604605	0.2500000	$2.4 \times 10^{-6}$	$8.5 \times 10^{-6}$	3.2604599	$7.895 \times 10^{-6}$
1.4793332	3.9520844	3.9520955	0.2500000	$7 \times 10^{-7}$	$1.11 \times 10^{-5}$	3.9520954	$1.096 \times 10^{-5}$
1.7293332	4.6308127	4.6308268	0.2500000	$1.5 \times 10^{-6}$	$1.41 \times 10^{-5}$	4.6308272	$1.446 \times 10^{-5}$
1.9793332	5.2574687	5.2574861	0.2500000	$4.3 \times 10^{-6}$	$1.73 \times 10^{-5}$	5.2574871	$1.839 \times 10^{-5}$
2.0000000	5.3054720	5.3054896	0.0206668		$1.77 \times 10^{-5}$	5.3054896	$1.768 \times 10^{-5}$

Para ejecutar el método de Runge-Kutta-Fehlberg usando Maple, se utiliza el comando `dsolve` con la opción numérica. Considere el problema de valor inicial del ejemplo 1. El comando

```
>g:=dsolve({D(y)(t)=y(t)-t*t+1,y(0)=0.5},y(t),numeric);
```

devuelve el procedimiento

```
g := proc(rkf45_x)... end
```

Como se indica en el ejemplo, podemos evaluar y por medio de

```
>g(2.0);
```

que nos da

```
[t = 2.0, y(t) = 5.305471958400194]
```

## CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.5

1. Aplique el método de Runge-Kutta-Fehlberg con la tolerancia  $TOL = 10^{-4}$ ,  $h_{\max} = 0.25$  y  $h_{\min} = 0.05$  para aproximar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial. Después, compare los resultados con los valores reales.

- a.  $y' = y/t - (y/t)^2$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ .
- b.  $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ ; solución real  $y(t) = t + 1/(1 - t)$ .
- c.  $y' = 1 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ; solución real  $y(t) = t \ln t + 2t$ .
- d.  $y' = \cos 2t + \sen 3t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ; solución real  $y(t) = \frac{1}{2} \sen 2t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{4}{3}$ .
2. Use el algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg con la tolerancia  $TOL = 10^{-4}$  para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.
- a.  $y' = (y/t)^2 + y/t$ ,  $1 \leq t \leq 1.2$ ,  $y(1) = 1$ , con  $hmáx = 0.005$  y  $hmín = 0.02$ .
- b.  $y' = \sen t + e^{-t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ , con  $hmáx = 0.25$  y  $hmín = 0.02$ .
- c.  $y' = 1/t(y^2 + y)$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = -2$ , con  $hmáx = 0.5$  y  $hmín = 0.02$ .
- d.  $y' = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = 0$ , con  $hmáx = 0.5$  y  $hmín = 0.02$ .
3. Aplique el método de Runge-Kutta-Fehlberg con la tolerancia  $TOL = 10^{-6}$ ,  $hmáx = 0.5$  y  $hmín = 0.05$  para aproximar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial. Después, compare los resultados con los valores reales.
- a.  $y' = y/t - (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 4$ ,  $y(1) = 1$ ; solución real  $y(t) = t/(1 + \ln t)$ .
- b.  $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$ ,  $1 \leq t \leq 3$ ,  $y(1) = 0$ ; solución real  $y(t) = t \tan(\ln t)$ .
- c.  $y' = -(y + 1)(y + 3)$ ,  $0 \leq t \leq 3$ ,  $y(0) = -2$ ; solución real  $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$ .
- d.  $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$ ; solución real  $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$ .
4. El método de Runge-Kutta-Verner se basa en las fórmulas

$$w_{i+1} = w_i + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6$$

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8,$$

donde

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{6}, w_i + \frac{1}{6}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{4h}{15}, w_i + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + \frac{5h}{6}, w_i - \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{12}{5}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5\right),$$

$$k_7 = hf\left(t_i + \frac{h}{15}, w_i - \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5\right),$$

$$k_8 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7\right).$$

El método de sexto orden  $\tilde{w}_{i+1}$  sirve para estimar el error en el método de quinto orden  $w_{i+1}$ . Construya un algoritmo semejante al de Runge-Kutta-Fehlberg y repita el ejercicio 3 usando este nuevo método.

5. En la teoría de la propagación de enfermedades contagiosas (véase [Ba1] o [Ba2]), podemos utilizar una ecuación diferencial relativamente elemental para predecir el número de individuos de la población infectados en un tiempo dado, siempre y cuando realicemos las suposiciones de simplificación adecuadas. En particular, supongamos que todos los individuos de una población fija tienen la misma probabilidad de infectarse y que, una vez infectados, permanecen en ese estado. Si con  $x(t)$  denotamos al número de individuos vulnerables en el tiempo  $t$  y si con  $y(t)$  denotamos al número de los infectados, podemos suponer, razonablemente, que la rapidez con que el número de los infectados cambia es proporcional al producto de  $x(t)$  y  $y(t)$ , porque la rapidez depende del número de individuos infectados y del número de individuos vulnerables que existen en ese tiempo. Si la población es lo suficientemente numerosa para suponer que  $x(t)$  y  $y(t)$  son variables continuas, podemos expresar el problema como

$$y'(t) = kx(t)y(t),$$

donde  $k$  es una constante y  $x(t) + y(t) = m$  es la población total. Podemos reescribir esta ecuación para que contenga sólo  $y(t)$  como

$$y'(t) = k(m - y(t))y(t).$$

- a. Suponiendo que  $m = 100\,000$ ,  $y(0) = 1000$ ,  $k = 2 \times 10^{-6}$ , y que el tiempo se mide en días, encuentre una aproximación al número de individuos infectados al cabo de 30 días.
- b. La ecuación diferencial del inciso (a) se denomina *ecuación de Bernoulli* y puede transformarse en una ecuación diferencial lineal en  $u(t)$  tomando  $u(t) = (y(t))^{-1}$ . Aplique este método para encontrar la solución exacta de la ecuación, bajo los mismos supuestos del inciso (a); después, compare el valor verdadero de  $y(t)$  en la aproximación aquí dada. ¿Qué es  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ ? ¿Concuerda esto con lo que usted intuye?
6. En el ejercicio anterior, todos los individuos infectados permanecieron en la población y propagaron la enfermedad. Una propuesta más realista consiste en introducir una tercera variable  $z(t)$ , que representa el número de las personas a quienes en un tiempo dado  $t$  se les separa de la población infectada por aislamiento, recuperación y la subsecuente inmunidad o fallecimiento. Naturalmente esto viene a complicar el problema, pero podemos demostrar (véase [Ba2]) que se puede obtener una solución aproximada en la forma

$$x(t) = x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)} \quad \text{y} \quad y(t) = m - x(t) - z(t),$$

donde  $k_1$  es la rapidez de la infección,  $k_2$  es la rapidez del aislamiento y  $z(t)$  se obtiene de la ecuación diferencial

$$z'(t) = k_2(m - z(t) - x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)}).$$

Los autores no conocen método alguno para resolver directamente este problema y, por lo mismo, es necesario aplicar un procedimiento numérico. Obtenga una aproximación a  $z(30)$ , a  $y(30)$  y a  $x(30)$ , suponiendo que  $m = 100\,000$ ,  $x(0) = 99\,000$ ,  $k_1 = 2 \times 10^{-6}$ , y que  $k_2 = 10^{-4}$ .

## 5.6 Métodos multipasos

Los métodos que hemos explicado hasta ahora se llaman **métodos de un paso**, porque la aproximación del punto de red  $t_{i+1}$  contiene información proveniente de uno solo de los puntos anteriores de red  $t_i$ . Aunque estas técnicas pueden usar la información relativa a la