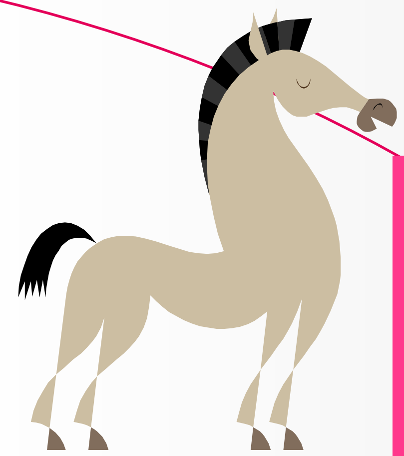
El modelo de Lorenz



El Caballito de batalla para entender el CAOS en un sistema dinámico continuo

Jeanett López-García

División de Matemáticas e Ingeniería, FES-Acatlán-UNAN

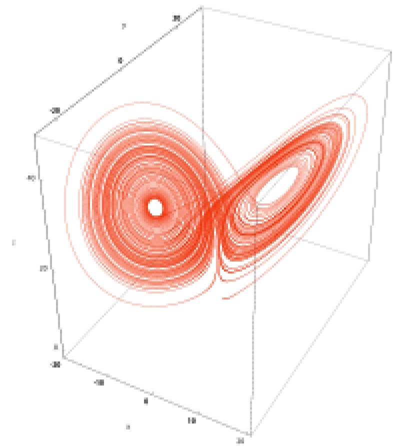
email: jeanettlg@hotmail.com

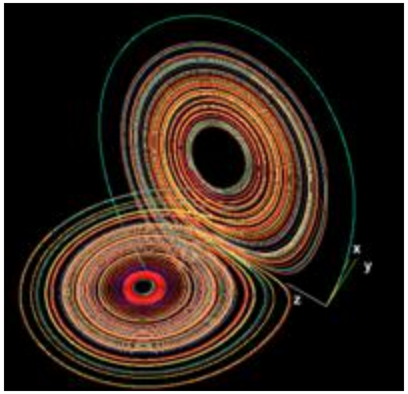
El modelo de Lorenz

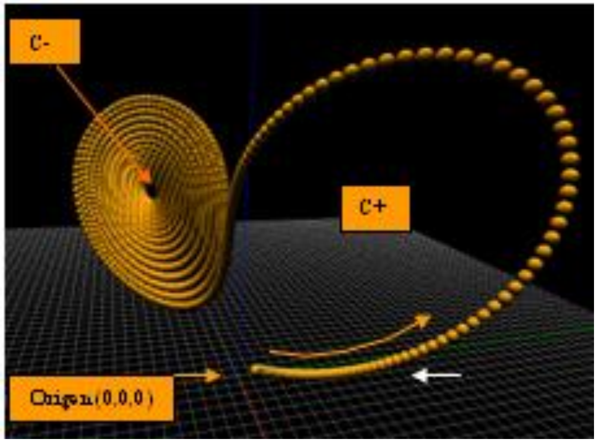
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$







Propiedades del Sistema de Lorenz

①**No linealidad:** debida a la aparición de dos términos cuadráticos: xz y xy.

②**Simetría:** si (x(t),y(t),z(t)) es solución, entonces (-x(t),-y(t),z(t)) también lo es.

$\therefore$Cualquier solución o es simétrica o tiene una compañera simétrica.

③ Contracción de volúmenes

El sistema de Lorenz es disipativo: los volúmenes en el espacio fase se contraen con velocidad exponencial

$$V(t) = V(0)\, e^{-(\sigma+1+b)\,t}$$

bajo la acción del flujo.

Esta propiedad permite demostrar que las ecuaciones de Lorenz no admiten órbitas cuasiperiódicas, ni tiene puntos fijos u órbitas cerradas repulsoras.

$\therefore$ Todos los puntos fijos han de ser sumideros o sillas y las órbitas cerradas, si existen, deben ser estables o tipo silla.

$$V(t+dt) = V(t) + \int_S (f n\, dt)\, \mathrm{d}A \Rightarrow$$

$$\dot{V} = \frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \int_S f\ n\ \mathrm{d}A = \int_V \nabla f\ \mathrm{d}V = \ \ldots\ = -(\sigma + 1 + b)V < 0$$

④ Puntos fijos

$(0,0,0)$ es punto fijo para todos los valores de los parámetros.

Si $\boldsymbol{r} > 1$, también existen un par de puntos fijos simétricos, $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^* = \pm\sqrt{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}-1)}$, $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{r}-1$.
Lorenz los llamó $\boldsymbol{C}^+$ y $\boldsymbol{C}^-$.

Cuando $\boldsymbol{r} \to 1^+$ se unen con el origen en una bifurcación de trinche.

⑤ Estabilidad lineal del origen

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = r\,x - y$$
$$\dot{z} = -b\,z$$

Linealizando al sistema de Lorenz:

$z(t) = k\,e^{-b\,t}$ representa un decaimiento exponencial a cero cuando t tiende a infinito.

Las otras dos direcciones están gobernadas por un sistema en el plano

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = r\,x - y$$

Para **r>1** es un punto silla (dos ramas estables y una inestable).

Si **r<1** el origen es un sumidero (nodo estable).

⑥ Estabilidad global del origen

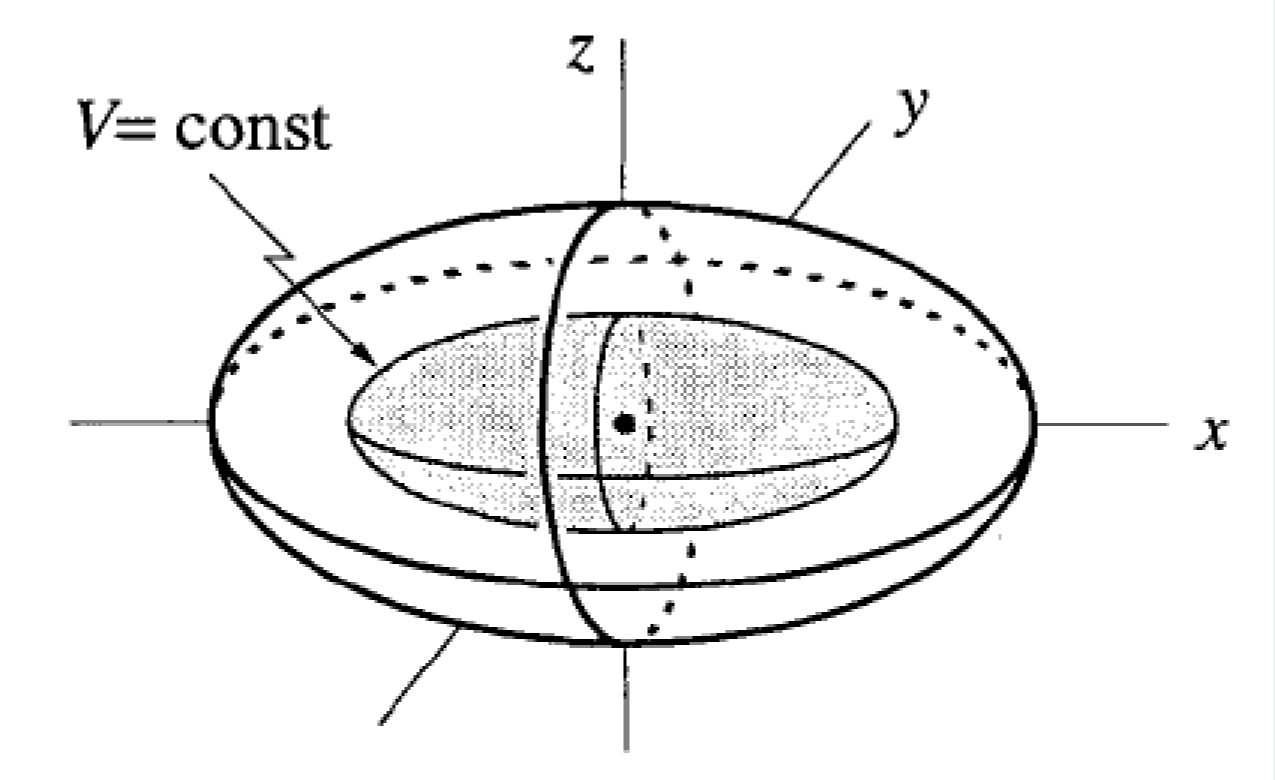
Para **r<1** el origen es globalmente estable (todas las trayectorias van a él y no hay ni ciclos límites ni caos). Para ello construiremos una función de Liapunov.

$$V(x,y,z)=\frac{1}{\sigma}x^2+y^2+z^2$$

La función es estrictamente decreciente si **r<1** y **(x,y,z) ≠(0,0,0)** y la derivada es nula sólo en el **(0,0,0)**.

El origen es globalmente estable si **r<1**.

Función de Liapunov



$$V(x,y,z)=\frac{1}{\sigma}x^2+y^2+z^2$$

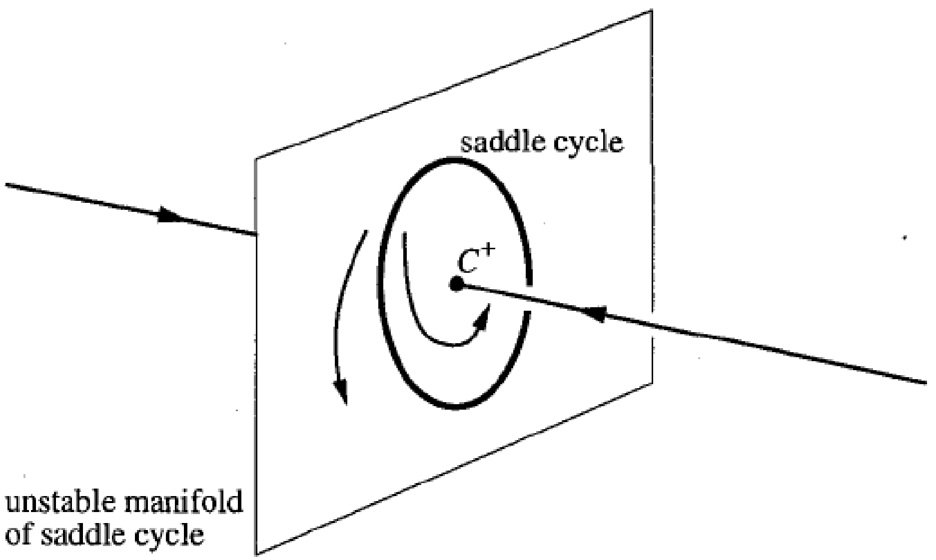
$$\frac{1}{2}\dot{V}=-\left[x-\frac{r+1}{2}y\right]^2-\left[1-\left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right]y^2-bz^2$$

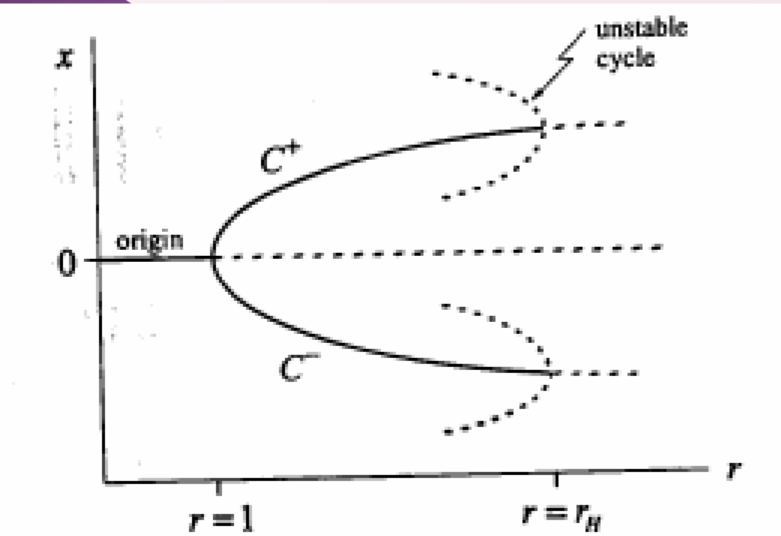
⑦ Estabilidad de C+ y C-

Para $r>1$. Puede verse que $C^{+\,-}$ son estables para $1<r<r_H=\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$.

En el valor r_H se desestabilizan vía una **Bifurcación de de Hopf subcrítica** (los ciclos inestables tienen una variedad en 2-D inestable y una en 1-D estable "ciclo silla"), al acercarnos a la bifurcación el ciclo colapsa a un punto silla.

Más allá de éste valor, nada podemos decir sobre el comportamiento de las soluciones... Aunque sabemos que no pueden ser expelidas al infinito. A partir de la bifurcación cualquier ciclo límite debe ser inestable.

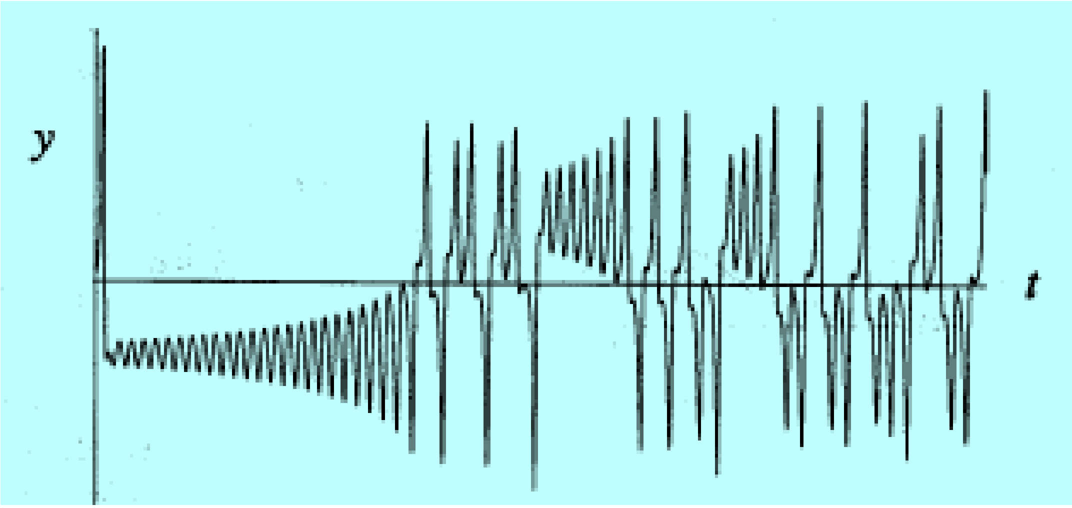




Movimiento Aperiódico

(Haciendo uso de Integración Numérica)

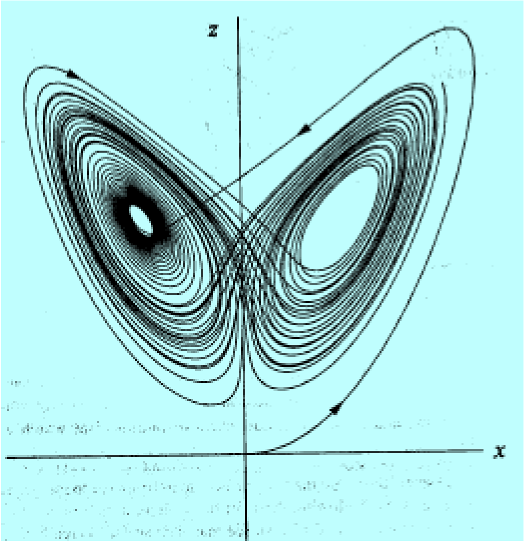
Lorenz integró las ecuaciones para σ=10, b=8/3 y r=28 (para estos valores de σ y b, $r_H \approx 24.74$) y condición inicial (0,1,0), cercana al punto silla en el origen.



¡La solución para y(t) resulta ser un movimiento aperiódico!

Atractor extraño

Cuando la trayectoria es vista en el espacio tridimensional se asemeja a un par de alas de mariposa. A este tipo de conjuntos se les llama atractor extraño, es el conjunto límite de volumen cero que atrae todas las trayectorias.



Es un objeto fractal, formado por un número infinito de superficies. Es un conjunto de volumen nulo pero área infinita y su dimensión fractal es 2.05.

Definición alternativa del caos

- El caos es un comportamiento aperiódico a tiempos largos en un sistema determinista que exhibe sensibilidad respecto a condiciones iniciales.

¿Qué es un Atractor?

- ***El término atractor es difícil de definir con exactitud. No hay un acuerdo completo acerca de la definición de atractor.***

- ***Informalmente, un atractor es un conjunto del espacio fase para las que todas o algunas trayectorias convergen.***

Generalización del concepto Atractor

- ***Un atractor es un conjunto cerrado A con las siguientes propiedades (Strogatz, 2000):***
- ***1) A es un conjunto invariante: cualquier trayectoria x(t) que comienza en A pemanece en A para todos los tiempos.***

  2) A atrae a un conjunto abierto de condiciones iniciales: hay un conjunto abierto U que contiene a A tal que si x(0) pertenece a U, entonces la distancia desde x(t) a A tiende a 0 cuando t -> infinito.

  Esto significa que A atrae todas las trayectorias que comienzan suficientemente cerca de ella. El más grande U es la llamada cuenca de atracción de A.
  3) A es mínimal: no hay un subconjunto propio de A que satisface las condiciones 1 y 2.

Sensibilidad ante Condiciones Iniciales:

Divergencia exponencial de trayectorias cercanas

El sistema exhibe sensibilidad respecto a las condiciones iniciales.

Pequeñas incertidumbres se amplifican rápidamente.

Si comparamos una solución $x(t)$ con otra $x(t)+\delta(t)$, en estudios numéricos del atractor se encuentra que

$$||\delta(t)|| \sim ||\delta_0|| e^{\lambda t}$$

esto es, las trayectorias se separan exponencialmente rápido.

El número λ es el exponente de Liapunov de la trayectoria.

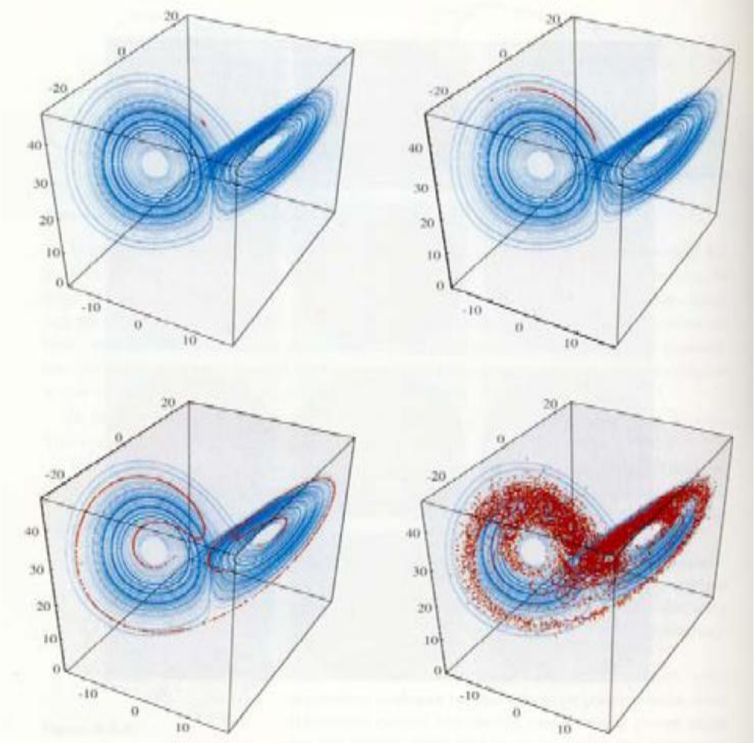


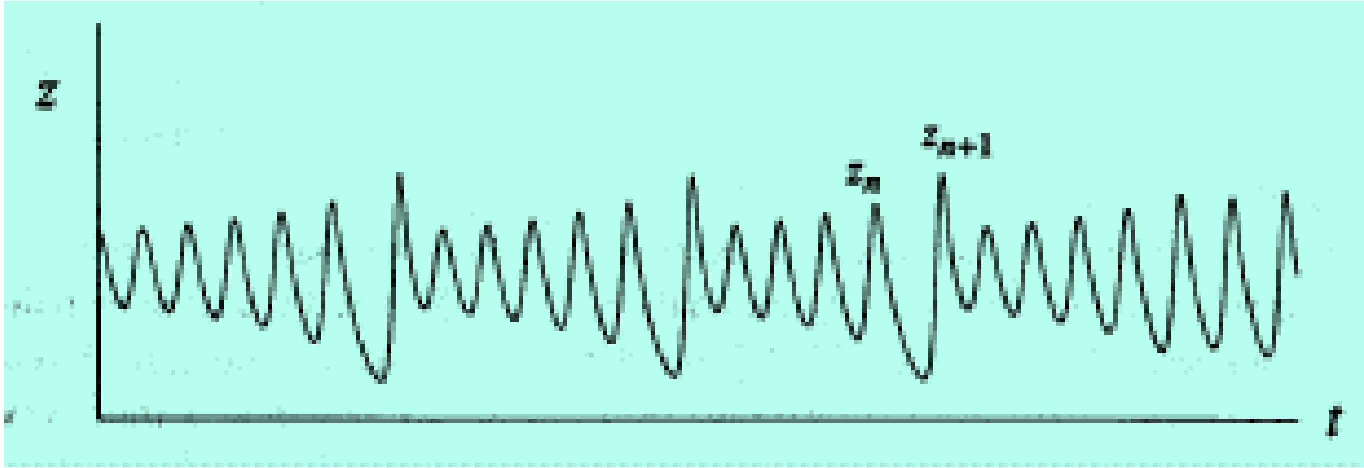
Plate 2: Divergence of nearby trajectories on the Lorenz attractor (Section 9.3). The Lorenz attractor is shown in blue. The red points show the evolution of a small blob of 10,000 nearby initial conditions, at times $t = 3$, 6, 9, and 15. As each point moves according to the Lorenz equations, the blob is stretched into a long thin filament, which then wraps around the attractor. Ultimately the points spread over much of the attractor, showing that the final state could be almost anywhere, even though the initial conditions were almost identical. This sensitive dependence on initial conditions is the signature of a chaotic system.

Plate inspired by a similar illustration in Crutchfield et al. (1986). Numerical integration and computer graphics by Thanos Siapas, using Equation (9.2.1) with parameters $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

Mapeo de Lorenz

El mapeo de Lorenz es una herramienta para analizar la dinámica de un atractor extraño.

Consiste en: calcular z(t) (serie de tiempo) y definir la sucesión z_n como la sucesión de máximos locales de z(t). La idea es predecir z_{n+1} a partir de z_n.

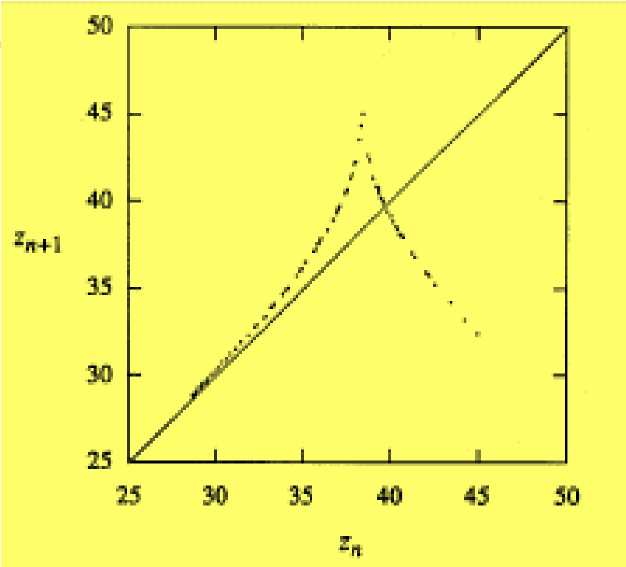


Mapa de Lorenz

Proporciona información sobre la dinámica en el atractor

Los datos de la serie temporal caótica caen "aparentemente" en una curva sencilla. ¡Se puede extraer orden a partir del caos!

La función $\mathbf{z_{n+1}=f(z_n)}$ define el mapeo de Lorenz.



Observe que en realidad f(z) no es curva perfecta.

Mapa de Lorenz $\neq$ Mapa de Poincaré

NOTA: Este enfoque trabaja sólo si el atractor es muy plano —casi una superficie bidimensional— (Recuerde que la dim. fractal es 2.05).

Exploración del espacio de Parámetros

Conforme variamos el parámetro **r** manteniendo fijos: **σ** y **b** del modelo, encontramos multitud de soluciones posibles: exóticos ciclos límites agrupados en nudos, pares de ciclos límites unidos, caos intermitente, periodicidad ruidosa,…, y atractores extraños.

Hay una bifurcación homoclínica (ciclos que colisionan con una silla dando lugar a una órbita homoclínica) en **r=13.926** …

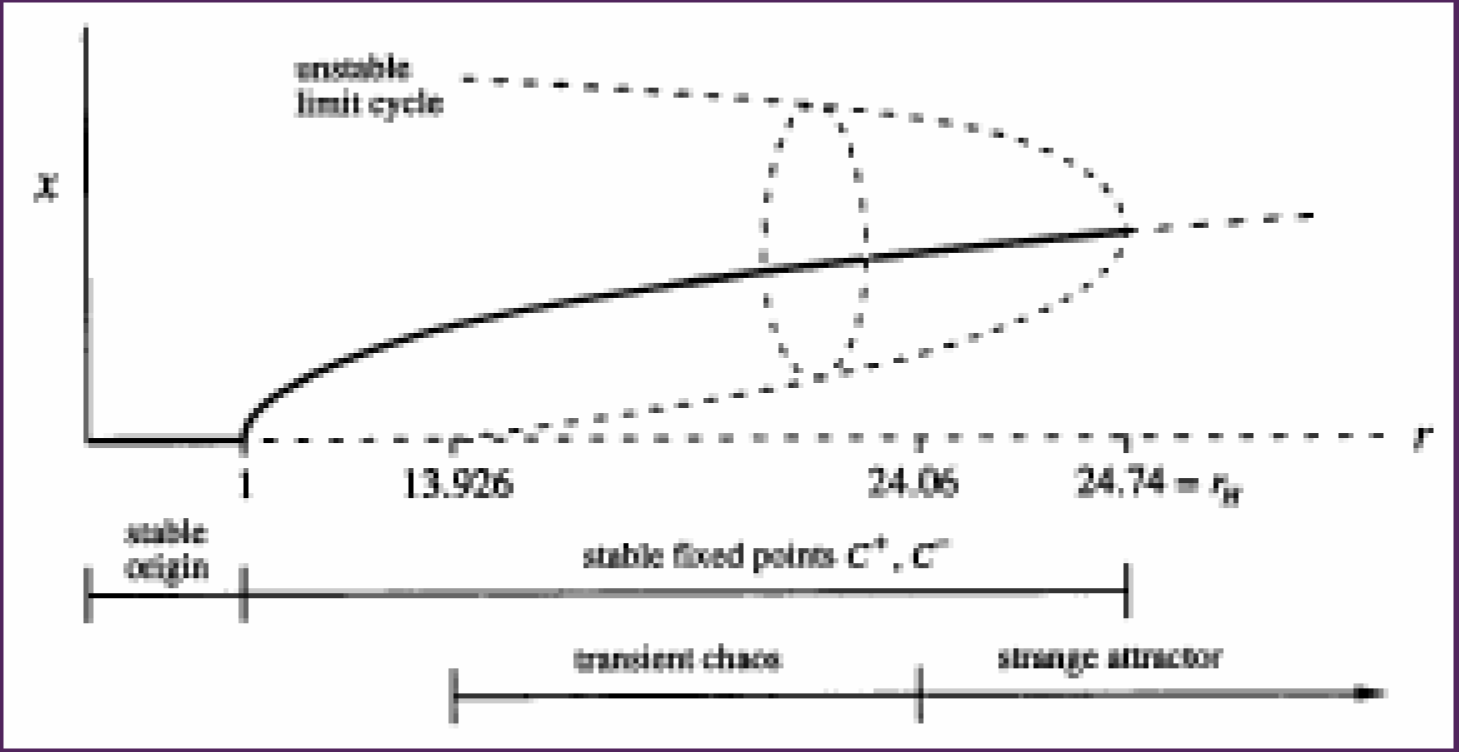
Su aparición (al aumentar **r**) da lugar una fenomenología muy rica.

V. gr. en **r=21** se observa caos transitorio (no es caótico pero muestra sensibilidad respecto condiciones iniciales) que demuestra que un sistema determinista puede ser impredecible aun cuando el estado final sea muy simple.

Diagrama de Bifurcación

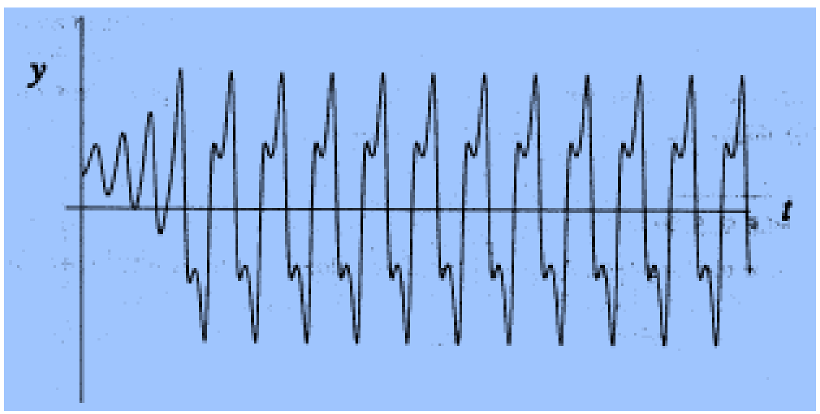
Para $24.06<r<24.74$ coexisten los puntos fijos con atractores extraños. Así podemos tener histéresis entre caos y equilibrio al variar **r** y que perturbaciones suficientemente grandes pueden inducir transiciones entre estos estados tan distintos.

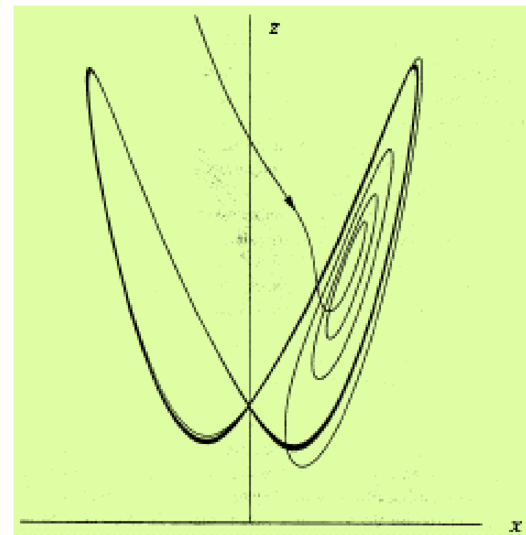
El diagrama de bifurcación para **σ=10**, **b=8/3** y **r** variable es:



Exploración por el espacio de Parámetros

Es interesante ver que la dinámica puede volver a ser simple si **r** es suficientemente grande. Las simulaciones numéricas indican que si r>313 el sistema tiene un atractor global que es un ciclo límite. Vemos un ejemplo para r=350.





En el límite **r→∞** se pueden obtener resultados analíticos sobre las ecuaciones. Para valores de **r** entre 28 y 313 la historia es mucho más complicada. Para la mayoría de los valores de **r** encontramos caos pero también se encuentran ventanas de comportamiento periódico para 99.524...<r<100.795..., 145<r<166 y r>214.4.

Referencias

❖ 1994. S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison-Wesley.