

Señal de Caos en Series de tiempo financieras. El spectrum de Lyapunov en el análisis de “sensibilidad a condiciones iniciales”

Hugo R. Balacco
Gustavo Maradona
FCE, UN de Cuyo
Mendoza-Argentina

I. Introducción

Si bien el estudio de la no linealidad y la dinámica caótica tiene algunas décadas de historia, sobre todo el contexto de la no linealidad, es recientemente (en los años noventa) cuando se ha incrementado dicho estudio no sólo en el campo teórico de la economía sino también en el empírico.

Básicamente, es de hacer notar, el esfuerzo por relacionar comportamientos de tipo caótico con modelos y conductas económicas ampliamente difundidas. A las primeras referencias correspondientes a intentos de modelizar la dinámica económica no lineal, Kaldor (1940), Hicks (1950), Goodwin (1951), actualmente, es necesario puntualizar, el creciente interés de los economistas por el comportamiento de los mercados financieros, donde es posible contemplar la aparición de no linealidades y caos por la interacción de agentes con diferentes esquemas de formación de expectativas: chartistas (extrapolativos), fundamentalistas (el tipo de cambio a largo plazo basado en los fundamentales) y "portfolio managers", con esquemas analíticos de expectativas como promedio ponderado de los esquemas correspondientes a chartistas y fundamentalistas. En este ámbito de referencia, se destacan los trabajos de Frankel y Froot (1986), Ito (1990), Cutler (1991) y Taylor and Allen (1992), entre otros.

Además, como Grandmont (1985) ha señalado, para valores diferentes de los parámetros, un modelo clásico de economía (no lineal), puede derivar en una senda de equilibrio estable (economía clásica); pero para otro conjunto de valores para los parámetros, el modelo produce soluciones más complejas captando mucho del espíritu Keynesiano.

El objetivo que se persigue en este trabajo es verificar la “sensibilidad a condiciones iniciales” como señal de caos en series de tiempo financieras, utilizando el spectrum de Lyapunov (exponentes).

El apartado II hace referencia en forma muy simple a conceptos elementales como el concepto de espacio de fase y de atractor.

En el apartado III, se presentan los aspectos básicos y salientes de la llamada “reconstrucción de la dinámica”. Se introducen los conceptos de dimensión de inserción (embedding dimension) y dimensión de correlación, como así también de demora (embedding delay); y la importancia de estos conceptos para la reconstrucción del atractor. Por último, se expone la idea subyacente en la dinámica de los exponentes de Lyapunov.

El punto IV contiene la investigación empírica para detectar señales de caos sobre la base de cuatro series financieras: Merval (Arg.), Dow Jones (USA), BOVESPA (Brasil) y FTSE (Inglaterra). Previo al cálculo del spectrum de Lyapunov, se estimó la dimensión del

atractor reconstruido (dimension fractal), utilizando los principios de Takens (1981) y Grassberger y Procaccia (1983).

Por último, el apartado V contiene las consideraciones finales.

II. Generalidades

En este apartado se intenta introducir algunos conceptos básicos que son de suma utilidad para una mejor integración de los aspectos analizados en los apartados o capítulos siguientes.

1. Espacio de fase:

Se parte de la idea de que una serie temporal finita x_t puede ser representada en un espacio de fase de acuerdo a la "dimensión de inserción" (embedding dimension) m , dando lugar a un número determinado de vectores de m componentes o "m-historias"; aspectos éstos ya tradicionales en los estudios sobre no linealidades y/o caos.

Por ejemplo para $m = 2$ se tendrá:

$$\begin{aligned} x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_N \end{aligned} \quad [1]$$

El espacio de fase (diagrama de fase) viene dado por el conjunto de los $N-1$ puntos bidimensionales:

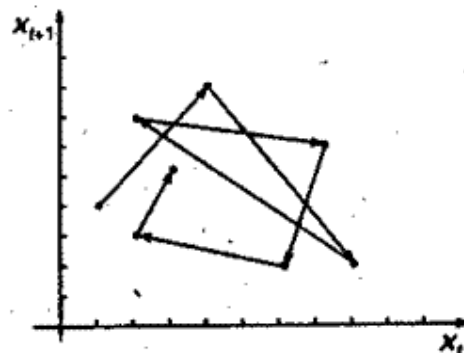
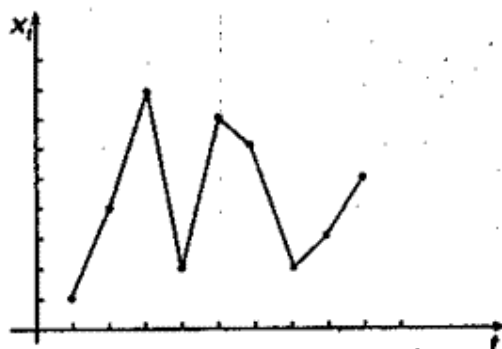
$$\begin{aligned} \gamma(2) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_t \\ x_{t+1} \end{pmatrix}, \dots \\ &= x(2)_0, x(2)_1, \dots, x(2)_t, \dots \end{aligned} \quad [2]$$

La figura N°1 reproduce los primeros datos (supuestos) de la serie $x_t = 1, 4, 8, 2, 7, 6, 2, 3, 5, \dots$ y en la figura N°2 el espacio de fase, para una dimensión de inserción $m=2$; es decir, de las primeras 2-historias

$$\gamma(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \dots \quad [3]$$

Figura N°1

Figura N°2



Si se incrementara el número de 2-historias, los puntos de la Figura N°2 permitirían ver el “grado de ocupación” del espacio bidimensional, de un conjunto de puntos acotados que podría ser el atractor extraño objeto del análisis (Nieto de Alba (1998)).

El grado de ocupación del atractor es de suma importancia a la hora de configurar una serie temporal como caótica, determinística de baja dimensión o como serie puramente aleatoria, de alta dimensión.

En Berruti (1995), puede encontrarse un ejemplo simple sobre estos aspectos. Se supone un programa de computadora que genera números aleatorios independientes e idénticamente distribuidos (i. i.d), uniformemente en $[0,1]$. Al generar una serie suficientemente grande x_t , la pregunta relevante es si la serie llena todo el intervalo $[0,1]$ o si se tiende a agrupar en algunos puntos de este intervalo. Si la primera parte de la pregunta es la correcta, se puede concluir que la serie tiene dimensión ≥ 1 .

Si ahora se considera la serie $\{x_t, x_{t+1}\}$ y se comprueba que completa el cuadrado unitario $[0,1]^2$, se dice que la serie x_t tiene dimensión ≥ 2 .

En general, si la serie de vector $m = \{x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m-1}\}$, de m-historias, llena el cubo m-dimensional $[0,1]^m$, se dice que tiene dimensión $\geq m$. Por lo tanto, un buen generador de números aleatorios debería poder llenar el cubo m-dimensional para cualquier valor de m. Por ello, para ver si una serie es generada por un sistema determinístico de dimensión baja, se debe comprobar que las m-historias de x_t no llenan el supercubo para un determinado valor de m.

2. Atractores

El tema de referencia se relaciona estrechamente con los problemas de estabilidad y equilibrio en los sistemas dinámicos. Por otra parte, sirve de introducción al concepto de atractor extraño en la matemática del caos.

Es posible afirmar que un punto x_0 atrae al movimiento $x(t)$, si:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad [4]$$

y, que es un atractor (o que es asintóticamente estable), si atrae a todos los movimientos que se inician en su entorno. Generalmente se distinguen dos tipos de atractores simples: los puntos fijos y los ciclos límites, que representan el comportamiento a que llega un estado estable o que se repite continuamente. Por lo tanto, el sistema se dice que es límite cuando es asintóticamente estable en el sentido convencional, o lo que es equivalente, al cabo de cierto tiempo, se encuentra atrapado en el ciclo, definiendo un estado estacionario no constante, sino oscilatorio. En estos sistemas es relevante fijar la atención en el comportamiento de largo plazo. Esto es, concentrarse en las propiedades asintóticas del sistema dinámico, el atractor del sistema. Es decir, el conjunto de puntos al que convergen todas las trayectorias originadas en un rango de condiciones iniciales.

Tal como se puntualizó anteriormente, en los sistemas simples, las órbitas en el espacio de fase se aproximan a un punto fijo, y los atractores son puntuales; o bien son órbitas con ciclo límite y atractores periódicos. En ambos casos el sistema es predecible.

En el caso del atractor extraño se verifica, entre otras cosas, un conjunto innumerable de ciclos de períodos arbitrariamente grande y un conjunto de trayectorias no periódicas.

Es necesario aclarar que no hay unidad de criterio en cuanto a la definición de un atractor extraño, sobre todo desde el punto de vista matemático. Algunos autores hablan de atractor extraño cuando se trata de un atractor con estructura fractal.

En un atractor de este tipo, las variables pasan de un estado a otro en forma “aparentemente” aleatoria; es decir, caótica.

Los objetos fractales se caracterizan, primero, por la autosimilitud; es decir, por tener la misma estructura en todas las escalas (“copo de nieve”, “coliflor”, etc.). Cada parte del objeto fractal se puede ver como una escala reducida del todo. Matemáticamente, un ejemplo preciso y clásico es el del conjunto de Cantor. La segunda característica de los fractales es su dimensión no entera, desde que el sistema no ocupa todo el espacio que le corresponde, porque la dimensión es inferior al número de grados de libertad necesarios para la especificación completa del sistema.

Por último, en Barnett, Medio and Serletis (1999, pág. 14) se encuentra un interesante párrafo que, a título de resumen, capta las ideas precedentes:

“Attractors with an orbit structure more complicated than that of periodic or quasiperiodic systems are called chaotic or strange attractors. The strangeness of an attractor mostly refers to its geometric characteristic of being a “fractal” set, whereas chaotic is often referred to a dynamic property, known as “sensitive dependence on initial conditions”, or equivalently, “divergence of nearby orbits”. Notice that strangeness, as defined by fractal dimension, and chaoticity, as defined by sensitive dependence on initial conditions, are independent properties. Thus, we have chaotic attractors that are not fractal and strange attractors that are not chaotic.”

III. Reconstrucción de la dinámica

Un supuesto fundamental del análisis de series temporales caóticas es que una serie de tiempo (escalar) observada x_t contiene información acerca del proceso (probablemente multiecuacional) que generó dicha serie. Este proceso se puede representar como un vector de s componentes, $Y_{t+1} = f(Y_t)$ para todo t , donde f marca la dinámica del sistema. En la práctica sólo se dispone de observaciones con relación a x_t , variable que depende del vector de estado Y_t . Por lo tanto, es necesario utilizar la dinámica contenida en x_t para inferir sobre la dinámica desconocida correspondiente a Y_t .

Las consecuencias prácticas de este enfoque son obvias. No interesa mucho cuán complejo es un sistema dinámico. Si una sola variable de ese sistema (x_t) está disponible, es posible reconstruir el espacio de fase (phase-space) original a través de técnicas de inserción (embedding). El teorema de inserción de Takens (time-delay embedding theorem, (1981)), señala que muchas de las propiedades topológicas fundamentales del atractor original en el espacio de estado, se conservan y pueden ser inferidas a partir del espacio de fase reconstruido en base a las m -historias de la serie de valores observados. Es decir, en

principio es posible estimar medidas invariantes del atractor original en el espacio de fase (como su dimensión fractal y los exponentes de Lyapunov) directamente desde el atractor reconstruido pues, como se dijo, es topológicamente equivalente al original.

Un método adecuado, aunque no el único, de reconstruir el espacio de fase desde una serie de tiempo escalar es el de coordenadas o parámetros de demora (delay coordinates).

El método fue introducido en un contexto teórico de sistemas dinámicos por Packard (1980), Ruelle y Takens (1981) en forma independiente. Más precisamente, el método fue demostrado numéricamente por Packard (1980) y formalmente aplicado por Takens (1981).

En general, Takens (1981), demuestra que si m es la dimensión de inserción y n la dimensión del atractor reconstruido, debe ser $m \geq 2n + 1$. Si el sistema es puramente aleatorio, al aumentar la dimensión de inserción no existe para los valores estimados de n una “cota” o valor de convergencia. En el caso de probable ruido caótico aparece un valor finito para m , que implica convergencia o “cota” para n .

Así, sobre la base del vector demora o vector de retardos (delay vector) pueden formarse los vectores del espacio de fase del atractor reconstruido:

$$x(k) = [x(k), x(k - \tau), \dots, x(k - (m - 1)\tau)] \quad [5]$$

donde m es la dimensión de inserción y τ es el rezago o demora temporal (delay). Por lo tanto, dentro de esta metodología, la selección de los parámetros m y τ es de suma importancia desde que tales parámetros influyen definitivamente en la calidad de los resultados obtenidos.

1. Dimensión de inserción

Un requisito crucial en el análisis numérico de sistemas dinámicos es la selección de la dimensión de inserción. En el típico caso de una serie de tiempo x_t , dicha selección, según el teorema de Takens, implica determinar el número de puntos previos necesarios que deben ser utilizados para la estimación del punto siguiente. Es decir, para cualquier sistema dinámico de dimensión finita, un punto determinado puede ser expresado en función de los n puntos anteriores, siendo n la dimensión del atractor reconstruido del sistema en cuestión. La idea central del procedimiento utilizado en este trabajo se basa en el hecho de que cuando el proceso bajo análisis es caótico, la dimensión del atractor en el espacio de fase reconstruido (n) es independiente de la dimensión de inserción (m). Esto significa que en alguna etapa del análisis, al variar m , la dimensión del atractor reconstruido deja de variar, aparece acotado (ver Grassberger y Procaccia (1983)).

Es importante consignar una síntesis del algoritmo propuesto por Grassberger y Procaccia. Para ello, dada una serie temporal x_t compuesta por T observaciones, se define el coeficiente de correlación integral de la siguiente manera:

$$C_m(\varepsilon) = \frac{[\text{número de pares } (i, j) : \|x(m)_i - x(m)_j\| < \varepsilon, i \neq j]}{N_m^2 - N_m} \quad [6]$$

donde $N_m = T - (m - 1)$ es el número de posible m -historias, y ε un número suficientemente pequeño. Luego, se define el coeficiente de correlación dimensional en términos del coeficiente de correlación integral como:

$$\alpha(m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log Cm(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad [7]$$

y, finalmente se obtiene el coeficiente de correlación dimensional del atractor extraño en el espacio reconstruido como:

$$\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(m) \quad [8]$$

En síntesis, para modelos caóticos, al crecer el valor de m , α alcanza su límite en algún valor finito (no necesariamente entero), llamado “saturación de la dimensión de inserción”. Esta dimensión representa una medida de la correlación espacial de los datos en un atractor generado por un sistema dinámico.

Para procesos puramente aleatorios (ruido blanco), nunca se alcanzará el nivel de saturación, ya que todas las dimensiones del espacio de fase reconstruido se utilizan por los datos en cada dimensión de inserción. Es decir, si m tiende a infinito, α también tiende a infinito.

2. Tiempo de demora

Un segundo problema relacionado con el “método de reconstrucción” es la determinación de la demora τ (delay) en el vector (5). Si la demora reconstruida es muy pequeña cada coordenada es casi la misma y el atractor reconstruido se concentraría a lo largo de la línea identidad o "diagonal" del espacio de fase. Por otra parte, si la demora reconstruida es relativamente grande, sucesivas coordenadas de demora aparecerán como causalmente no relacionadas y el atractor reconstruido no representará la verdadera dinámica. Estos problemas reciben el nombre de redundancia e irrelevancia, respectivamente.

Existen métodos alternativos para determinar la demora τ . En este trabajo, se utiliza el denominado mutual información promedio (average mutual information, AMI).

La exposición completa de este procedimiento está lejos de los objetivos de este trabajo; sin embargo, es posible acotar que la función AMI puede ser considerada como una generalización (es decir lineal + no lineal) de la función de autocorrelación que sólo suministra una medida de la dependencia lineal, en promedio sobre todas las observaciones, en función de ciertos rezagos. Específicamente, AMI suministra en promedio cierta cantidad de información sobre x_{t+j} dado x_t . Fraser and Swinney (1986) sugieren que un buen estimador de la demora es el primer mínimo de la serie AMI (τ) (proper reconstruction delay).

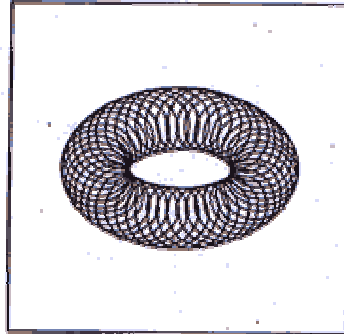
3. Exponentes de Lyapunov

Fernández Díaz (1995) distingue tres tipos de atractores simples (predecibles), punto fijo, ciclo límite y toro.

Como se muestra en la Figura N°3, este último tiene la forma semejante a la de una “rosquilla” que describe movimientos que constan de dos oscilaciones independientes llamadas, a veces, movimientos cuasiperiódicos, siendo las oscilaciones eléctricas un claro ejemplo en el ámbito de la física. En general, en este tipo de atractores, las órbitas que

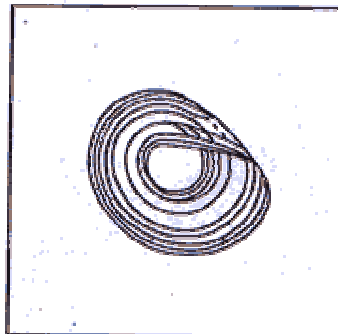
comienzan cerca las unas de las otras, permanecen siempre cercanas, posibilitando la predicción en el largo plazo.

Figura N°3



Tiro

Figura N°4



Atractor extraño

Mediante los exponentes de Lyapunov pueden distinguirse estos atractores de un cuarto tipo de atractor que resume un comportamiento caótico (o extraño) de estructura más complicada (Figura N°4).

La idea central es que estos exponentes sirven para medir en un sistema dinámico la sensibilidad a condiciones iniciales. Esto se hace mediante una función exponencial, en donde el exponente determina la tasa de divergencia de órbitas que parten desde puntos muy próximos.

Para un sistema unidimensional, tal que $x_{t+1} = f(x_t)$ y partiendo desde dos puntos x_0 y $x_0 + \varepsilon$, en cada iteración las órbitas se van separando de tal forma, que después de N iteraciones estos dos puntos próximos se han convertido en $f^N(x_0)$ y $f^N(x_0 + \varepsilon)$. Sobre la base de la hipótesis de crecimiento exponencial de la diferencia (exponente $\tau(x_0)$ positivo), dependiente del punto de partida x_0 para el cual se analiza la sensibilidad a condiciones iniciales, se tiene:

$$\left| f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0) \right| = \varepsilon \exp^{\tau(x_0)N} \quad [9]$$

Si se supone que la distancia inicial ε tiende a cero y que el número de iteraciones $N \rightarrow \infty$, después de tomar logaritmos se tiene

$$\tau(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| \quad [10]$$

Teniendo en cuenta que $f^N(x_0)$ es una función compuesta, por ej., $f^2(x_0) = f(x_1) = f(f(x_0))$, y según la regla de la “cadena”, se obtiene la derivada:

$$\frac{df^2(x)}{d(x)} = f'(x_1)f'(x_0) \quad [11]$$

en general:

$$\frac{df^N(x)}{d(x)} = \prod_0^{N-1} f'(x_i) \quad [12]$$

y, el exponente $\tau(x_0)$ sería (en la parte empírica se denominan λ_i):

$$\begin{aligned} \tau(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_0^{N-1} f'(x_i) \right| = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \log |f'(x_i)| \end{aligned} \quad [13]$$

donde para casi todo x_0 , este límite es el mismo.

El signo de los exponentes de Lyapunov es especialmente importante en la tipificación de diferentes tipos de comportamientos dinámicos. En particular, la presencia de un exponente de Lyapunov positivo indicaría que órbitas cercanas divergen exponencialmente en una determinada dirección. Por lo tanto, un exponente de Lyapunov positivo está íntimamente relacionado con la imposibilidad o extrema dificultad para predecir en un sistema dinámico, lo que constituye un rasgo fundamental de un comportamiento caótico.

IV. Investigación Empírica

Tal como se puntualizó precedentemente, la investigación empírica se efectivizó sobre la base de la metodología propuesta por Sano y Sawada (1985) y Holzfuss y Lauterborn (1988), para series de tiempo observadas. El método permite obtener la AMI, la dimensión de Grassberger-Procaccia y los exponentes de Lyapunov (spectrum de Lyapunov), tanto positivos como negativos.

Las series utilizadas corresponden a los índices Merval (Argentina, 619 observaciones), BOVESPA (Brasil, 612 observaciones), DOW JONES (USA, 626 observaciones) y FTSE (Inglaterra, 660 observaciones); la fuente consultada fue info@Patagon.com.ar. Los datos son de frecuencia diaria y cotizaciones al "cierre", y el período analizado va desde el 02/01/98 hasta junio del 2000 inclusive.

La única transformación que sufrieron los datos originales es la estandarización. A cada punto de la serie correspondiente se le sustrajo la media y se dividió por la dispersión correspondiente a la serie respectiva.

De las AMI para cada uno de estos indicadores, los valores seleccionados (embedding delay) de demora son los siguientes: 6 para el Merval, 4 para el DOW JONES (también se probó 7), 9 para el BOVESPA y 5 para FTSE. Estos valores corresponden a los respectivos primeros mínimos, en correspondencia con las sugerencias de Fraser and Swinney (1986).

Cuadro N°1
Mutual Información (Average Mutual Information, (AMI))

Delay	MERVAL	D. JONES	BOVESPA	FTSE
1	2.9255	3.17535	3.26425	2.61273
2	2.30418	2.75551	2.79878	1.99928
3	2.07831	2.47864	2.50462	1.9468
4	2.02046	2.34626*	2.32291	1.71157
5	1.72071	2.37829	2.2202	1.59493*
6	1.70433*	2.18945	2.03259	1.71712
7	1.79806	2.06108	2.02927	1.42348
8	1.81851	2.06497	1.96934	1.50645
9	1.60197	2.12275	1.86311*	1.35738
10	1.52932	2.12176	2.0147	1.2792
11	1.66423	1.96478	1.96459	1.21104
12	1.74733	2.05736	1.94783	1.20008
13	1.62128	1.93202	1.89273	1.21917
14	1.65335	1.92502	1.75432	1.26857
15	1.6276	1.85489	1.72859	1.17044
16	1.41473	1.89003	1.71722	1.3155
17	1.42992	1.78448	1.7032	1.15512
18	1.54049	1.81629	1.64426	1.21934
19	1.43414	1.80223	1.63183	1.10555
20	1.6237	1.88159	1.74236	1.12131

El paso siguiente se basó en el análisis de la dimensión de inserción, m. Es decir, se investigó la posibilidad de que para valores crecientes de la dimensión de inserción, la dimensión de correlación (a) se tornara independiente de aquella, y alcanza una “cota” o convergencia. Esto último puede ser considerado como un comportamiento no aleatorio, y de esta manera se continuaría con la investigación de la posibilidad de comportamiento caótico a través del cómputos de los exponentes de Lyapunov utilizando las respectivas dimensiones de correlación.

Cuadro N°2
Valores de “cota” (convergencia) para la Dimensión de Correlación

Variable	Dimensión de Inserción (embedding dimension)	Dimensión de Correlación (fractal dimension)
MERVAL		
		
	10	4.76 ...
	11	4.76 ...
	12	4.76 ...
DOW JONES		
		
	11	4.72 ...
	12	4.72 ...
	13	4.72 ...
BOVESPA: FTSE:		
		
No existe convergencia para la Dimensión de Correlación		
No existe convergencia para la Dimensión de Correlación		

Según los resultados obtenidos, Cuadro N°2, sólo apareció convergencia en la serie del Merval y Dow Jones y no en Bovespa y FTSE.

Por lo tanto estas dos series se dejaron de lado y el cómputo de los exponentes de Lyapunov se efectivizó sólo para las series Merval y Dow Jones, utilizando una dimensión para el atractor reconstruido igual a 5. En ambos casos, de conformidad a los resultados obtenidos de acuerdo al análisis en el sentido de Gassberger-Procaccia y al principio de Takens.

La última etapa de la investigación empírica, se basó en el cálculo del spectrum de Lyapunov para las series Merval y Dow Jones. El programa desarrollado por J. Brush (1996) que utiliza una versión modificada del algoritmo de Sano y Sawada (1985) debida a Holzfuss y Lauterborn (1988), utiliza un método directo de estimación. En términos muy simplificados, el método consiste en medir la sensibilidad a condiciones iniciales "rastreado" las propagaciones de pequeñas colecciones de vectores del espacio de estado (suficientemente cercanas entre sí a partir del punto inicial), y determinando su tasa de crecimiento en varias direcciones a través de una descomposición de valor singular de esa colección de vectores. Realizando las renormalizaciones apropiadas (de lo contrario existirá sesgo en la estimación) los promedios en logaritmos de estas tasas de cambio serán un buen estimador de los exponentes de Lyapunov.

A continuación se presenta una aproximación al método utilizado, el algoritmo de Wolf (1985), que sólo permite estimar el mayor de los exponentes de Lyapunov; sobre la base de la dimensión del atractor reconstruido, se parte de pares de vectores del espacio de estado suficientemente cercanos:

$$\|x(n)_i - x(n)_j\| < \varepsilon \quad [14]$$

$$i \neq j$$

Siendo ε un número suficientemente pequeño. Luego, para cada iteración y en presencia de señal caótica, cada órbita se va separando de forma tal que al cabo de t iteraciones la distancia inicial $d(0)$ diverge de la distancia actual $d(t)$ a una tasa exponencial, aproximada por un exponente de Lyapunov positivo:

$$\log d_t(i) \approx \log d_t(0) + \lambda_1 i \quad [15]$$

que representa un conjunto de líneas aproximadamente paralelas con una pendiente proporcional a λ_1 . La ecuación [15] se estima por MCO.

En el cuadro N°3 se exponen los exponentes de Lyapunov para las series Merval y Bovespa.

De acuerdo con estos resultados, es posible concluir la existencia de señal de caos en ambas series, desde que al menos un exponente es positivo:

If the largest Lyapunov exponent is positive, i.e. $\lambda_1 > 0$, the system is chaotic and has the aforementioned property of "sensitive dependence on initial conditions" (Bask, M. (1998)).

Cuadro N°3
Exponentes de Laypunov (Lyapunov spectrum)

MERVAL				
T	Epsilon	Dimensión del atractor	Embedding delay	Valores de λ
619	0.19	5	6	$\lambda_1 = 0.0138558$ $\lambda_2 = -0.0287049$ $\lambda_3 = -0.0576175$ $\lambda_4 = -0.0903458$ $\lambda_5 = -0.179381$

DOW JONES				
T	Epsilon	Dimensión del atractor	Embedding delay	Valores de λ
626	0.11	5	4	$\lambda_1 = 0.789967$ $\lambda_2 = 0.167238$ $\lambda_3 = 0.0255401$ $\lambda_4 = -0.0490005$ $\lambda_5 = -0.0767455$

Observaciones:

- 1) El valor de epsilon corresponde a la máxima distancia permitida en la búsqueda de "vecinos" con los cuales chequear la sensibilidad a condiciones iniciales. Según Brush (1996) los valores razonables van desde 0.05 a 0.2.
- 2) Al realizar las estimaciones correspondientes al Dow Jones con un embedding delay de 7 no se alteraron mayormente las conclusiones en términos de Lambda..

V. Consideraciones finales

En la investigación de "sensibilidad a condiciones iniciales", los exponentes de Lyapunov han sido intensamente utilizados en los últimos años por economistas y econométristas interesados en dinámica caótica.

En este trabajo, previo al cálculo de los exponentes, se hizo necesario estimar la dimensión de inserción sobre la base de la "cota" o convergencia de la dimensión de correlación de Grassberger-Procaccia; y, utilizando el principio de Takens, para estimar la dimensión del atractor reconstruido.

Sobre esta metodología, es necesario destacar algunos aspectos restrictivos. En economía, en ciertos casos, no es posible disponer de una serie tan extensa y ausente de ruido como las que están disponible en otras áreas, p.e., los datos experimentales de la física.

Con relación a la relativa escasa extensión de la muestra, se podría justificar el uso de tales muestras, sobre la base de la naturaleza fractal del atractor caótico (autosimilitud).

Además, las series económicas y financieras poseen ruido y si este es importante, la dimensión del atractor reconstruido, muy probablemente, tendrá sesgo "hacia arriba". Este hecho, pudo, de alguna manera, haber incidido en los valores hallados de dimensión del atractor, en los casos de las series MERVAL y DOW JONES.

Una manera de solucionar este problema, para futuros estudios, sería no trabajar directamente sobre la serie, sino sobre los valores estimados o ajustados, correspondientes a una estructura o modelo no lineal; p.e., un NARIMA (modelo ARIMA no lineal).

Otra alternativa, el mayor uso, es la propuesta por Nychka, Ellner, Galant and Mc Caffrey (1992), quienes aplican los exponentes de Lyapunov a una función estimada utilizando un ajuste “neural nets” no paramétrico.

Por otra parte, existe en la actualidad bibliografía disponible crítica de los trabajos empíricos sobre caos, Granger (1994) y Benhabib (1992), entre otros. Sin embargo, como Barnett, Medio and Serletis (1998) han puntualizado, resulta muy difícil obtener una opinión convincente en pro o en contra de tales hallazgos con relación a la relevancia para la teoría económica, desde que “testear” caos en correspondencia directa con un modelo económico es una alternativa considerada muy lejos del “estado de las artes”.

Por último, resulta muy ilustrativa la conclusión que sobre el tema exponen estos autores.

However, as we argued in the previous section, we do not have the slightest idea of whether or not the economy exhibits chaotic nonlinear dynamics (and hence we are not justified in excluding the possibility). Until the difficult problems of testing for chaos “within the structure of the economic system” are solved, the best that we can do is to test for chaos in economic data, without being able to isolate its source. But even that objective has proven to be difficult. While there have been many published test for chaotic dynamics, little agreement exists among economists about the correct conclusions.

Bibliografía

1. Aguirre, L. A. y Aguirre, A., A tutorial introduction to nonlinear dynamics in Economics, Texto para discussão N°88, Univ. Federal de Minas Gerais, Brasil, 1995.
2. Balacco, H. y Vera de Serio, Virginia N., Dinámica no lineal en Economía. Un análisis introductorio. Jornadas de AAEP, Bahía Blanca, Noviembre 1997.
3. Barnett, W., Medio, A. And Serletis, A., Nonlinear and Complex dynamics in Economics, mimeo Washington University, 1998.
4. Bask, M., Essays on Exchange Rate: Deterministic Chaos and Technical Analysis. Mimeo, Dep. of Economics, Umea University, Suecia, 1998.
5. Beker, V. A., Economic Nonequilibrium, Instability and Chaos, XXIX Reunión anual de la Asociación Argentina de Economía Política, FCE, Universidad Nacional de la Plata, Tomo 2, La Plata, 1994.
6. Berruti, A., Economía dinámica. Modelos caóticos. Mimeo Fac. de Ciencias Económicas, UN de Cuyo, 1995.
7. Brock, W. A. y Dechert, D. W., Non-linear dynamical systems: instability and chaos in economics, Handbook of Mathematical Economics, Vol. 4, 2210-2235, Amsterdam, 1991.
8. Brock, W. A. y Malliaris, A., Differential equations, stability and chaos in dynamic economics, Amsterdam, Elsevier, 1989.
9. Brush, Jeff, "NLD TOOLBOX. User's Guide. Version 2.0", may, 1996.
10. Campbell, J. Y., Lo, A. W., Mackinlay, A. C., Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press, 1997.
11. Cutler, D. M., Poterba, J.M. and Summers, L.H., Speculative Dynamics. Review of Economic Studies, (1991), 58, 529-546.
12. Dornbusch, R., Expectations and Exchange Rate Dynamics, Journal of Political Economy, 84, 1161-1176, 1976.
13. Fernández, Díaz, A., La Economía de la Complejidad, ed. Mc-GrawHill, 1994.
14. Grandmont, J., On Endogenous Competitive Business Cycles. Econometrica, setiembre 1985, 53 (5).
15. Granger, C.W.J., Is Chaotic Economic Theory Relevant for Economics?. J. Of Intern and Comparative Economic, 1994, 3., pp. 346-349.
16. Holzfuss, J. And Lauterborn, W., L., Lyapunov exponents from a time series of acoustic chaos. Physical Review Letters, Vol. 39, N°4, 1989.
17. Hsieh, D., Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates, Journal of Business, 62, 339-368, 1989.
18. Hsieh, D., Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets, Journal of Finance, 46, 1839-1877, 1991.

19. Ito, T., Foreign Exchange Rate Expectations: Micro Survey Data. The American Economic Review (1990), 80, 434-449.
20. Lo, A., and A. C. MacKinlay, Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test, Review of Financial Studies, 1, 41-66, 1988,.
21. Nieto de Alba, U., Historia del tiempo en Economía, ed. Mc Graw Hill, 1998.
22. Peitgen, H., Jürgens, H. y Saupe, D., Chaos and Fractals. New Frontiers of Scienc, New York, Springer-Verlag, 1992.
23. Perko, L., Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1991.
24. Peters. E., Chaos and Order in the Capital Markets, 2da. Ed. John Willey, 1996.
25. Sano M., and Sawada Y., Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series. Physical Review Letters, 55, 1082-1085.
26. Taylor, S.J., And Allen, H., The use of Technical Analysis in the Foreign Exchange Market. Journal of International Money and Finance, (1992), 11, 304-314.
27. Weiss, M. D., Nonlinear and chaotic dynamics: an economist's guide. The Journal of Agricultural Economics Research, Vol. 43, N°3, 2-17, 1991.