

# BIFURCACIONES Y CAOS EN UN MODELO DE EXPECTATIVAS DE PRECIOS

*M<sup>a</sup> Rosa Arranz Sombría*

*M<sup>a</sup> Pilar Pérez González*

*David Pérez Román*

**RESUMEN.**—En este trabajo estudiamos el comportamiento dinámico de un modelo de precios expresado por una ecuación en diferencias no lineal unidimensional, dependiente de un parámetro.

En su análisis, encontramos un escenario de bifurcaciones que doblan el periodo y determinamos un comportamiento caótico del modelo para valores del parámetro en el intervalo  $[1.307554, 1.61023]$ , salvo aquellos que corresponden a las llamadas ventanas. Además del estudio teórico, realizamos también el análisis de algunas series generadas a partir del modelo.

Como consecuencia de la presencia de caos tenemos un comportamiento no predecible de los precios a pesar de ser un modelo determinista.

## 1. INTRODUCCION Y CONCEPTOS PREVIOS

La utilización de sistemas dinámicos no lineales en Economía ha experimentado un fuerte auge en los últimos años.

Esto es debido a las grandes posibilidades que ofrecen en la modelización de las fluctuaciones y ciclos económicos de manera endógena. La evolución de algunas variables económicas de comportamiento muy irregular, puede venir representada por la dinámica de sistemas caóticos cuyo comportamiento es sumamente rico en irregularidad y complejidad.

El empleo de dinámicas caóticas en Economía se inició con los trabajos de Stutzer (1980), Benhabid y Day (1981) y en la actualidad constituye un área de investigación cada vez más amplia.

En este trabajo, vamos a estudiar el comportamiento dinámico de un modelo discreto no lineal de evolución de los precios de un bien. El modelo se basa en el planteado por Golberg<sup>1</sup> (1964) de una forma lineal.

<sup>1</sup> Golberg, S., *Introducción a las Ecuaciones en Diferencias Finitas*. Marcombo, 1964.

Una vez construído el modelo, estudiamos el diagrama de bifurcación y exponentes de Lyapunov, para terminar con el estudio de series generadas a partir del modelo y las conclusiones obtenidas.

Comenzamos exponiendo las definiciones y resultados principales que vamos a emplear tanto para el estudio del modelo como para el análisis de las series.

Se dice que  $p$  es un *punto periódico de periodo  $k$*  si  $f^k(p) = p$  y  $f^j(p) \neq p$  para  $a \leq j < k$ , donde  $f^k$  denota la aplicación  $f \circ f \circ \dots \circ f$ .

Sea  $p$  un punto periódico de periodo  $k$ , se llama *ciclo u órbita de periodo  $k$*  al conjunto.

$$\{p_0 = p, p_1 = f(p), \dots, p_{k-1} = f^{k-1}(p)\}$$

Una órbita es *superestable* si  $\prod_{i=0}^{k-1} f'(p_i) = 0$

Sea  $x_t$  una serie de números reales. Se dice que dicha serie admite una explicación determinista diferenciable si existen  $y_0 \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables tales que

$$y_{t+1} = f(y_t) \quad x_t = h(y_t), \quad t \geq 0,$$

es decir, tenemos un sistema dinámico generado por  $f$  y una función  $h$  que nos permite observarlo.

Bajo ciertas condiciones podemos estudiar propiedades de la dinámica del sistema a partir de una sola serie de observaciones. Sea  $x_t, t = 1, \dots, N$  una serie de números reales se llama espacio de fases reconstruído con dimensión de inmersión  $m \in \mathbb{N}$  y retardo  $\tau \in \mathbb{N}$  al conjunto formado por los vectores de  $\mathbb{R}^m$ :

$$x_t^m = (x_t, x_{t+\tau}, \dots, x_{t+(m-1)\tau}) \in \mathbb{R}^m, \quad 1 \leq t \leq N - (m-1) \cdot \tau$$

Los vectores  $x_t^m$  reciben el nombre de *m-historias*.

El teorema de Takens<sup>2</sup> asegura que la dinámica generada en el espacio de fases reconstruído es equivalente a la dinámica del sistema original cuando  $m \geq 2n + 1$ . Esto nos permite analizar propiedades del sistema de partida como la dimensión de correlación del atractor o los exponentes de Lyapunov a través de una serie de datos.

La noción de dimensión de correlación introducida por Grassberger y Procaccia (1983) está basada en la correlación integral dada por:

$$C(m, r) = \lim_{Nm \rightarrow \infty} \frac{1}{N_m^2} \sum_{i,j=1}^{N_m} H(r - \|x_i^m - x_j^m\|),$$

2 Medio, A. y Gallo, G., *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press, 1992, p. 180.

donde  $N_m$  es el número de puntos del espacio de fases reconstruido, la norma empleada es la del supremo y  $H$  es la función de Heaviside definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Entonces la dimensión de correlación está dada por:

$$C(m) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Log } C(m, r)}{\log r}.$$

Si el sistema dinámico es caótico  $C(m)$  se estabiliza en algún valor  $D$  cuando  $m$  crece. El valor  $D$ , es la *dimensión de correlación del atractor*. Sin embargo, esta condición no es suficiente para detectar caos.

Por otra parte, una consecuencia del caos determinista es la fuerte dependencia de las condiciones iniciales, lo que supone la divergencia de trayectorias que parten de condiciones iniciales muy próximas. Una forma de medir el grado de divergencia es por medio de los exponentes de Lyapunov:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left( \frac{p_i(t)}{p_i(0)} \right),$$

donde  $p_i(0)$  es el radio de una bola pequeña tomada en el instante  $t = 0$  y  $p_i(t)$  es el radio en el eje  $i$  del elipsoide consecuencia de la evolución de la bola por la acción del sistema.

## 2. MODELO

Nuestro objetivo es determinar la evolución de los precios de un bien en función de su demanda.

Denotamos por  $r(t)$  la cantidad de dinero que aparece en el mercado de demanda en  $t$  y  $p(t)$  al precio del bien en el instante  $t$ .

Goldberg considera dos hipótesis de linealidad:

- La relación precio-dinero de mercado es constante, es decir

$$p(t) = K r(t).$$

- Los especuladores actúan en función de los cambios en el nivel de precios de acuerdo con la expresión

$$r(t+1) = R + \alpha(p(t+1) - p(t)),$$

donde  $R$  es el nivel normal de inversión que se supone constante.

En nuestro modelo consideramos un comportamiento no lineal de los especuladores. Suponemos que éstos se rigen por cambios absolutos en el nivel de precios y por cambios relativos respecto a un precio de referencia  $q$ . De esta forma, el comportamiento de la oferta de dinero satisface la ecuación:

$$r(t+1) = R + \alpha \left( (p(t+1) - p(t)) - \left( \frac{p(t+1)}{q} \right)^2 (q - p(t+1)) \right),$$

donde suponemos que el precio de referencia  $q$  está relacionado con el nivel normal de inversión  $R$  de tal forma que  $R = \alpha q$ .

Así la ecuación resultante es

$$r(t+1) - R = \frac{R}{q} \left( (p(t+1) - p(t)) - \left( \frac{p(t)}{q} \right)^2 (q - p(t)) \right).$$

Como  $p(t+1) = K r(t+1)$ , aceptando la hipótesis de linealidad precio-dinero de mercado tenemos

$$\begin{aligned} p(t+1) &= \frac{Kq}{q - KR} \left( R - \frac{R}{q} p(t) - \frac{R}{q} \left( \frac{p(t)}{q} \right)^2 (q - p(t)) \right) \\ &= \frac{KqR}{q - KR} - \frac{KR}{q - KR} p(t) - \frac{KR}{q - KR} \left( \frac{p(t)}{q} \right)^2 (q - p(t)). \end{aligned}$$

Si denotamos por  $a = \frac{Kr}{q - KR}$ , la expresión anterior se puede escribir como

$$p(t+1) = \frac{a}{q^2} (p(t) - q) (p(t)^2 - q^2),$$

de donde la ecuación que determina la evolución de los precios, es una ecuación en diferencias no lineal que depende únicamente de  $K$ , pues  $q$  y  $R$  se suponen conocidos. Para tener un comportamiento positivo de los precios tomamos  $q > KR$ . Así la función que determina la evolución del modelo es

$$f(p) = \frac{a}{q^2} (p - q) (p^2 - q^2),$$

que consideraremos definida en  $[0, \infty)$  pues los precios son variables positivas.

En primer lugar probamos que podemos reducir el estudio de los ciclos de  $f$  al de los ciclos de  $g$ , siendo

$$g(p) = a(p - 1)(p^2 - 1),$$

una función que depende sólo del parámetro  $a$ .

Se verifica lo siguiente

$$p \text{ es un punto fijo de } f^n \text{ si y solo si } \frac{p}{q} \text{ es un punto fijo de } g^n.$$

Este resultado es consecuencia inmediata de la igualdad

$$f^n(p) = q \cdot g^n\left(\frac{p}{q}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

que se puede probar por inducción sobre  $n$ .

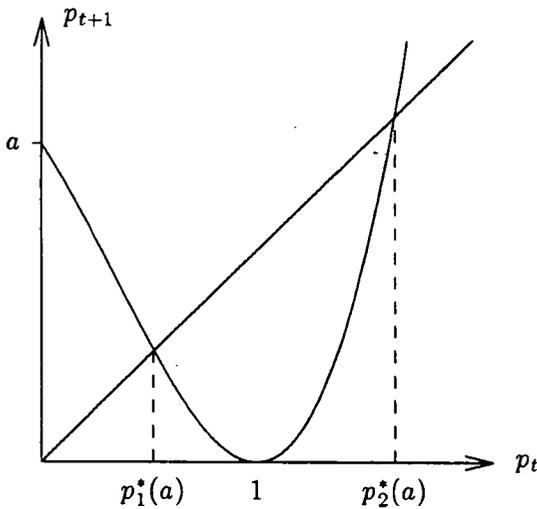


FIG. 1. Gráfica de la función  $g(p)$ .

Por tanto para el estudio de los ciclos del modelo, analizaremos la función  $g$  definida en  $[0, \infty)$  que aparece representada en figura 1.

### 3. PUNTOS DE BIFURCACION Y DIAGRAMA

Observando la figura 1, podemos ver que el punto  $p_2^*(a)$  es siempre un punto fijo inestable, sin embargo, la estabilidad de  $p_1^*(a)$  depende del valor

de  $a$ . Si  $g'(p_i^*(a)) = -1$ , tenemos una bifurcación de flip, el punto se transforma en inestable y aparece un ciclo de período dos.

La derivada de la función  $g$  es  $g'(p) = a(p-1)(3p+1)$ . Resolviendo la ecuación  $g'(p) = -1$  encontramos dos raíces distintas  $r_1(a)$  y  $r_2(a)$  siempre que  $a > \frac{3}{4}$ . Como consecuencia, si se verifica que  $r_1(a) \leq p_i^*(a) \leq r_2(a)$ , el punto  $p_i^*(a)$  será inestable. Hemos comprobado gráficamente que esta relación se verifica aproximadamente para  $a > 0.7555$ . Este hecho, junto con la existencia de ciclos de período 3 (caos en el sentido de Li/Yorke) para valores del parámetro en el intervalo  $[1.51023, 1.60178]^3$ , nos lleva a pensar en la existencia de un escenario de bifurcaciones que doblan el período. El diagrama obtenido para el modelo es el que aparece en la figura 2.

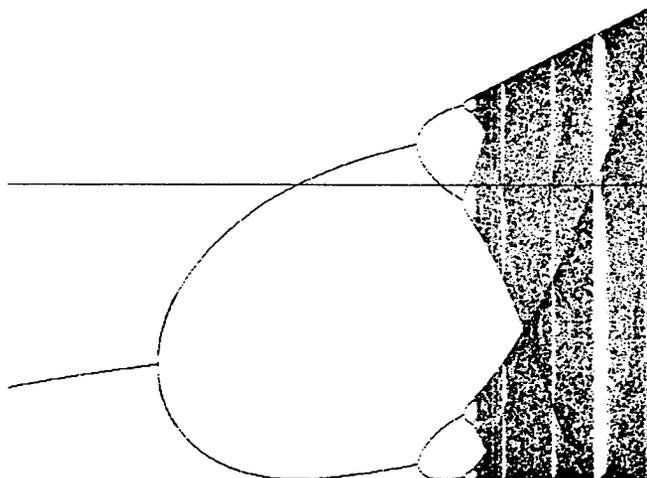


Fig. 2. Diagrama de bifurcación al variar al parámetro  $a$  en el rango  $0.5 \leq a \leq 1.6$ .

Denotaremos por  $a_n$ ,  $n \geq 1$ , al  $n$ -ésimo punto de bifurcación; es decir, el valor del parámetro que determina el paso de la existencia de un ciclo de período  $2^{n-1}$  a un ciclo de período  $2^n$ . Estos valores forman una sucesión creciente convergente con límite  $a_\infty$ , valor del parámetro que determina el comienzo de la zona de comportamiento caótico del modelo. Basándonos en las aproximaciones gráficas obtenidas para los primeros puntos de bifurcación, procedemos a su estimación numérica y a dar una aproximación de  $a_\infty$ . Asimismo, comprobamos que se verifica la relación de Feigenbaum<sup>4</sup>. Los resultados obtenidos para los puntos de bifurcación así como

3 Arranz Sombría, M. R. y Pérez González, M. P. (1995).

4 M. J. Feigenbaum (1978) comprobó que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = \delta = 4.669201609\dots$

la convergencia de los cocientes de los incrementos a la constante  $\delta$ , aparecen en la tabla 1.

TABLA 1

$a_n$	$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n}$	$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} - \delta$
0.75549066		
1.20679822	5.65676555	0.987563941
1.28658013	4.88098584	0.211784231
1.30292558	4.485086708	-0.184114901
1.30656998	4.795263158	0.126061549
1.30732998	4.380908462	-0.288293147
1.30750346	4.593063278	-0.076138331
1.30754123		

Como observamos en la tabla, la convergencia es bastante lenta. Esto es debido a la dificultad que entraña determinar los valores del parámetro en los que aparecen las sucesivas bifurcaciones  $a_n$ . Sin embargo, entre dos valores sucesivos de  $a_n$  existe siempre un valor del parámetro  $\bar{a}_n$ , que corresponde a la presencia de una órbita superestable de período  $2^n$ . Estos vienen dados por los puntos de corte de la recta  $p = 1$  (mínimo de  $g$ ) con el diagrama de bifurcación (Figura 2), convergen igualmente a  $a_\infty$  y los cocientes de los incrementos a  $\delta$ . En las órbitas superestables la convergencia de las iteraciones hacia el ciclo es mucho más rápida y por tanto la determinación de los  $\bar{a}_n$  mucho más fiable por lo que procedemos a su estimación.

La observación de algunos modelos estudiados por otros autores nos llevó a pensar en la posibilidad de una relación del tipo

$$\bar{a}_n \approx \theta(a_n + a_{n+1}), \quad 0 < \theta < 1, n \geq 1.$$

Evidentemente siempre podemos escribir  $\bar{a}_n = \theta_n(a_n + a_{n+1}), 0 < \theta_n < 1$ . Debido a la convergencia de los cocientes de los incrementos hacia  $\delta$ , tanto para los  $a_n$  como para los  $\bar{a}_n$ , podemos dar una aproximación de éstos en función de los dos términos anteriores<sup>5</sup>, con lo que es fácil comprobar que si  $\theta_1$  es aproximadamente igual a  $\theta_2$ , entonces  $\theta_n$  es constante para todo  $n$ .

En nuestro modelo, la relación anterior se verifica para  $\theta \approx 0.5$ . Empleando dicha aproximación, obtenemos unos valores iniciales para la estima-

$$5 \quad a_{n+2} \approx \frac{(1 + \delta)a_{n+1} - a_n}{\delta} \text{ y } \bar{a}_{n+2} \approx \frac{(1 + \delta)\bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n}{\delta}$$

ción numérica de  $\tilde{a}_n$ . Los valores obtenidos, así como la convergencia de los cocientes a  $\delta$  se muestran en la tabla 2.

TABLA 2

$\tilde{a}_n$	$\frac{\tilde{a}_n - \tilde{a}_{n-1}}{\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_n}$	$\frac{\tilde{a}_n - \tilde{a}_{n-1}}{\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_n} - \delta$
1.000000000		
1.249107275	5.396762696	0.727561087
1.295265924	4.776283053	0.107081444
1.304930060	4.686232446	0.017030837
1.306992300	4.672387523	0.003185914
1.307433668	4.669903252	0.000701643
1.307528181	4.669347667	0.000146058
1.307548421		

Además de analizar la convergencia a la constante  $\delta$ , hemos estudiado las relaciones que se verifican con la constante  $\alpha = 2.50290\dots$  que aparece en otros modelos estudiados presentando diagramas de bifurcación de características similares.

Denotando por  $l_n$  a la distancia del punto fijo más próximo a  $p = 1$  ( $= \min_p g(p)$ ) en la órbita superestable de período  $2^n$ , hemos estudiado la convergencia de los cocientes  $l_n/l_{n+1}$  a la constante  $\alpha^6$ . La tabla 3 muestra los valores de la sucesión, sus cocientes y la diferencia de éstos con la constante  $\alpha$ .

TABLA 3

$l_n$	$\frac{l_n}{l_{n+1}}$	$\frac{l_n}{l_{n+1}} - \alpha$
1.00000000		
0.24910728	4.014334708	1.511427708
0.10491620	2.374345239	-0.128561761
0.03996939	2.624913715	0.122006715
0.01615423	2.474236779	-0.028670221
0.00641428	2.518479081	0.015572081
0.00256818	2.497597520	-0.005309480

Como la convergencia de los cocientes de los incrementos de  $\tilde{a}_n$  a  $\delta$  es muy buena, podemos considerar aceptables las aproximaciones para los

$$6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{l_{n+1}} = \alpha$$

siguientes  $\bar{a}_n$  obtenidas utilizando la relación de Feigenbaum. Así, de forma recurrente, calculamos un valor aproximado de  $a_\infty$  alrededor de 1.307554. En la sección siguiente, realizamos el estudio de una serie generada para este valor comprobando la existencia de comportamiento caótico y calculamos la dimensión de correlación del atractor.

Este valor determina el inicio del régimen caótico del modelo. Para valores del parámetro superiores a  $a_\infty$ , trayectorias con condiciones iniciales muy próximas, pueden tener una evolución completamente diferente a pesar de ser un modelo determinista. Esta situación, no se da para cualquier valor del parámetro mayor que  $a_\infty$ , pues como podemos apreciar por el diagrama de bifurcación, aparecen las llamadas ventanas, que indican la presencia de órbitas estables y un comportamiento totalmente predecible del modelo.

Una medida de la sensibilidad de las trayectorias a las condiciones iniciales viene dada por la magnitud del exponente de Lyapunov. Un exponente de Lyapunov positivo supone la presencia de caos y por tanto sensibilidad de las trayectorias a las condiciones iniciales, que será tanto más acusada cuanto mayor sea dicho exponente. En la figura 3, aparecen representados los exponentes de Lyapunov en función de los valores del parámetro.

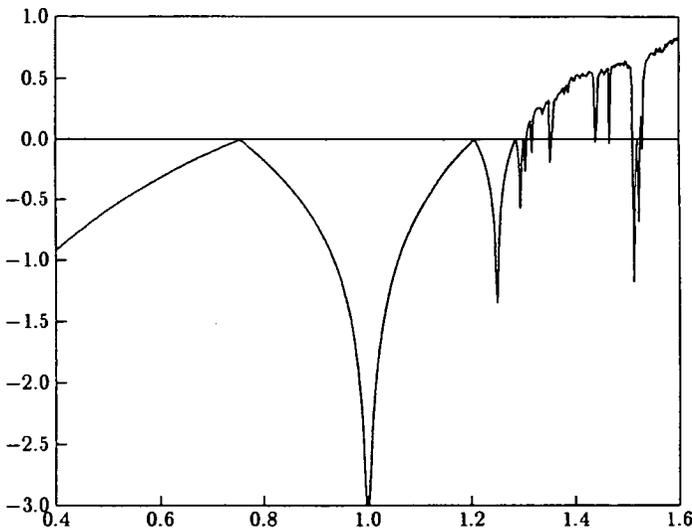


FIG. 3. Exponentes característicos de Lyapunov. El parámetro  $a$  varía en el rango  $0.4 \leq a \leq 1.6$ .

#### 4. DIMENSION DE CORRELACION

En esta sección nos proponemos calcular la dimensión de correlación del atractor del sistema dinámico para algunos valores del parámetro. Comenzamos con el estudio de una serie generada para  $a = 1.30752$

donde el modelo posee un ciclo de orden 128. Comprobamos que en este caso la dimensión de correlación del atractor (el ciclo de orden 128) es, como cabía esperar, 0. Sin embargo, para  $a = 1.307554$  (valor del parámetro que hemos estimado como indicador del comienzo de la zona caótica) obtenemos una dimensión de correlación estrictamente positiva, que junto con un exponente de Lyapunov positivo determina la existencia, en este caso, de un atractor extraño. Asimismo, hemos comparado los resultados obtenidos par  $a_{\infty}$  con  $a = 1.55$ , valor del parámetro con claro comportamiento caótico.

En el estudio hemos utilizado series de 6000 datos generadas a partir del modelo. La figura 4 (izda.), muestra el logaritmo de la correlación integral  $C(m, r)$  frente al logaritmo del radio para  $a = 1.30752$ . A partir de la figura determinamos la región donde las pendientes se estabilizan para los diferentes valores de  $m$ . Aunque el teorema de Takens nos garantiza que podemos reconstruir la dinámica del sistema original cuando  $m \geq 2n \pm 1$  ( $n$  es la dimensión del sistema de partida), en este caso, las pendientes se estabilizan a partir de  $m = 1$ . Una vez seleccionado el rango de  $r$  donde las pendientes se estabilizan, hemos realizado una regresión lineal para determinar el valor de  $C(m, r)$  en función de  $m$  obteniendo su dimensión de correlación que aparece representada en la figura 4 (dcha.).

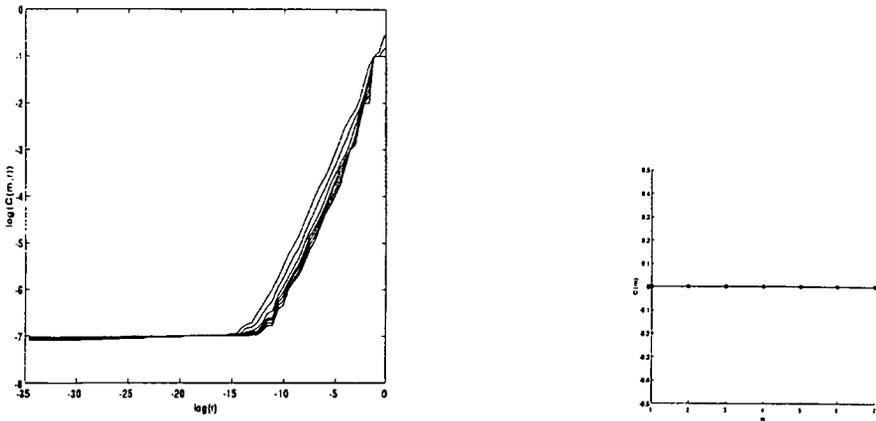


FIG. 4. Dimensión de correlación del atractor para  $a = 1.30752$ .

Realizando el estudio anterior para  $a = 1.307554$  (valor estimado de  $a_{\infty}$ ) obtenemos que la dimensión de correlación es aproximadamente 0.5. Esto, junto con un exponente de Lyapunov positivo (0.02) nos hace concluir que nos encontramos realmente en una zona de comportamiento caótico. La figura 5 muestra el logaritmo de la correlación integral  $C(m, r)$  frente al logaritmo del radio para  $a = 1.307554$  y la estimación de la dimensión de correlación. Estos resultados son similares a los obtenidos por un procedimiento análogo para  $a = 1.55$  donde estimamos una dimensión de correlación del atractor en torno a 0.9 y un exponente de Lyapunov de 0.7.

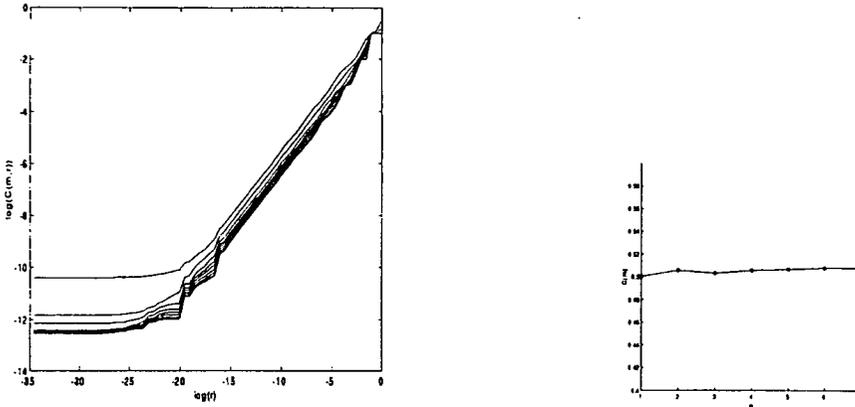


FIG. 5. Dimensión de correlación del atractor para  $a = 1.307554$ .

### 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos realizado un estudio de un modelo de precios expresado por una ecuación en diferencias no lineal dependiente de los parámetros  $a$  y  $q$ . Para ello, en primer lugar, simplificamos el modelo transformándolo en una ecuación uniparamétrica.

El modelo presenta un escenario de bifurcaciones que doblan el período y obtenemos un comportamiento caótico en el intervalo  $[1.307554, 1.60178]$ , por lo que la evolución de los precios depende del valor del parámetro.

Mientras que para valores de  $a$  menores que  $1.307554$  tenemos convergencia a un ciclo de orden  $2^n$ , para algún  $n$ ; para valores superiores, nos movemos en la región caótica donde coexisten valores del parámetro con convergencia a órbitas estables, u otros con atractores extraños.

Así pues, si  $a < 1.307554$ , la evolución de los precios es totalmente predecible independientemente de las condiciones iniciales dadas; mientras que en la región caótica tenemos una evolución de los precios totalmente diferente a pesar de partir de condiciones iniciales muy próximas.

La existencia de una región caótica en el modelo es de gran importancia, pues la variación de alguna de las componetes que intervienen en la definición del parámetro (que pueden modificarse por el paso del tiempo de forma exógena, por ejemplo), puede llevarnos a un comportamiento no predecible de los precios a pesar de ser un modelo determinista.

## BIBLIOGRAFIA

- Arranz Sombría, M. R. y Pérez González, M. P. (1995): «Comportamiento Caótico de un Modelo de Precios». IX Reunión Asepelt-España. (En prensa).
- Benhabib, J. y Day R. H. (1981): «Rational Choice and Erratic Behaviour». *Review of Economic Studies*, 48, pp. 459-471.
- Golberg, S. (1964): *Introducción a las Ecuaciones en Diferencias Finitas*. Marcombo.
- Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983): «Measuring the Strangeness of Strange Attractors». *Physica*, 9 D, pp. 189-208.
- Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag.
- Hao, B (1989): *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific.
- Liu, T., Granger, C. W. J. y Heller W. P. (1993): «Using the Correlation Exponent to Decide Whether an Economic Series es Chaotic». *Nonlinear Dynamics Chaos and Econometrics*. John Wiley & Sons, pp. 71-31.
- Lorenz, H. W. (1993): *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag.
- Medio, A. y Gallo, G. (1992): *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press.
- Peters, E. E. (1991): *Chaos and Order in the Capital Markets: a New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*. John Wiley & Sons, Inc.
- Stutzer, M. J. (1980): «Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macroeconomic Model». *Journal and Economic Dynamics and Control*. Vol 2, pp. 353-376.
- Wiggins, S. (1990): *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag.