

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE TELECOMUNICACIÓN
DEPARTAMENTO DE COMUNICACIONES

TESIS DOCTORAL

**MÉTODOS DE MALLADO Y ALGORITMOS
ADAPTATIVOS EN DOS Y TRES
DIMENSIONES PARA LA RESOLUCIÓN
DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS
CERRADOS MEDIANTE EL MÉTODO
DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

ALEJANDRO DÍAZ MORCILLO

DIRECTOR: LUIS NUÑO FERNÁNDEZ

VALENCIA, FEBRERO 2000

A mi madre y hermanos

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS	1
1. METODOLOGÍA DE GENERACIÓN DE MALLAS	5
1.1. Mallas Estructuradas	5
1.1.1. Métodos Algebraicos	5
1.1.2. Métodos basados en EDPs	6
1.1.3. Métodos de Superposición-Deformación de Retícula	7
1.1.4. Métodos de Crecimiento Estructurado	8
1.2. Mallas No Estructuradas	9
1.2.1. Métodos de Delaunay-Voronoi	10
1.2.2. Métodos de Frente de Avance	12
1.2.3. Generación de Mallas Cuadriláteras y Hexaédricas No Estructuradas	13
1.3. Mallas Superficiales	14
1.4. Metodología Multibloque	15
2. MÉTODOS DE GENERACIÓN DE MALLA BIDIMENSIONAL	17
2.1. Descomposición de Elementos Cuadriláteros en Triangulares	17
2.2. Áreas Cuadriláteras	18
2.2.1. Malla Estructurada. Interpolación por Proyectores Transfinitos	18
2.2.2. Malla No Estructurada en Cuadriláteros Rectilíneos. Frente de Avance Rápido	24
2.2.2.1. División del Cuadrilátero	25
2.2.2.2. Casos Simples	28
2.2.2.3. Casos Críticos	29
2.2.2.4. Resultados	30
2.2.3. Malla No Estructurada en Cuadriláteros Arbitrarios. Frente de Avance Rápido Generalizado	32
2.3. Áreas Triangulares	33
2.3.1. Malla Estructurada. Interpolación por Proyectores Transfinitos	34
2.3.2. Malla No Estructurada en Triángulos Arbitrarios. Frente de Avance Rápido Generalizado	40
2.3.3. Resultados	42
2.4. Dominios Arbitrarios. Técnica Multibloque	43
2.4.1. Polígonos Convexos	43
2.4.2. Dominios Arbitrarios	45
2.5. Mallado Exclusivamente con Cuadriláteros	47
2.6. Mejora <i>A Posteriori</i> de la Calidad de la Malla	52
2.6.1. Reposicionamiento de Nodos	53
2.6.2. Intercambio de Aristas	58

2.7. Coste Computacional	59
3. MÉTODOS DE GENERACIÓN DE MALLA SUPERFICIAL	65
3.1. Superficies Definidas por su Contorno	65
3.2. Superficies Cuádricas	66
3.2.1. Superficies Esféricas	67
3.2.2. Superficies Elipsoidales	70
3.2.3. Superficies Paraboloides Elípticas	73
3.3. Superficies de Revolución	75
3.4. Mejora <i>A Posteriori</i> de la Calidad de la Malla	78
3.5. Coste Computacional	78
4. MÉTODOS DE GENERACIÓN DE MALLA VOLUMÉTRICA	81
4.1. Generación de Malla Estructurada	81
4.2. Generación de Malla No Estructurada. Método de Frente de Avance	86
4.2.1. Implementación del Método de Frente de Avance	87
4.2.2. Nodos Vecinos	90
4.2.3. Nodos Cercanos	92
4.2.4. Nodo Óptimo	93
4.2.5. Nodo Medio	97
4.2.6. Cierre del Frente y Condiciones de Concordancia	98
4.2.7. Parámetros de Diseño	99
4.2.7.1. Radio de Nodos Cercanos	99
4.2.7.2. Ángulo Máximo entre Caras Vecinas	100
4.3. Control del Frente mediante Retícula Jerárquica	101
4.3.1. Creación de la Retícula	102
4.3.2. Utilización de la Retícula	103
4.4. Mejora <i>A Posteriori</i> de la Calidad de la Malla. Reposicionamiento de Nodos	104
4.5. Resultados	104
4.5.1. Esfera	104
4.5.2. Tronco Piramidal	110
4.5.3. Cilindro Deformado	113
4.5.4. Sector Curvo	115
4.5.5. Reposicionamiento de Nodos	118
4.5.6. Coste Computacional	121
5. MÉTODOS DE MALLADO ADAPTATIVO	125
5.1. Estimación del Error <i>A Posteriori</i>	127
5.1.1. Indicador de Error Residual	129
5.1.1.1. Residuo Interior	130
5.1.1.2. Residuo en las Aristas	143
5.1.2. Indicador de Error Zienkiewicz-Zhu (ZZ) basado en el Rotacional de la Solución	144
5.1.2.1. Mallas Triangulares	145
5.1.2.2. Mallas Mixtas o Cuadriláteras	149
5.1.3. Indicador ZZ Dependiente de la Coordenada Axial	151
5.1.4. Indicador de Error en Arista por Continuidad de Flujo	153
5.1.5. Obtención de una Estimación del Error del Problema	154
5.2. Estrategia de Refinamiento	156
5.2.1. Elección de las Zonas de Refinamiento	156

5.2.2. Métodos de Refinamiento	160
5.2.2.1. Métodos de Refinamiento Conforme en Mallas Triangulares	163
5.2.2.2. Métodos de Refinamiento Conforme en Mallas Cuadriláteras	165
5.3. Métodos de Mallado Adaptativo en Problemas Tridimensionales	167
5.3.1. Indicador de Error Residual	167
5.3.1.1. Residuo Interior	168
5.3.1.2. Residuo en las Caras	170
5.3.2. Indicador de Error Zienkiewicz-Zhu (ZZ) basado en el Rotacional de la Solución	171
5.3.3. Indicador de Error en Cara por Continuidad de Flujo	174
5.3.4. Estrategia de Refinamiento	175
5.4. Resultados	176
5.4.1. Metodología	177
5.4.2. Guía Homogénea en Forma de L	179
5.4.2.1. Indicador Residual	180
5.4.2.2. Indicador ZZ	188
5.4.2.3. Indicador por Continuidad de Flujo	192
5.4.2.4. Conclusiones	196
5.4.3. Línea Microstrip Encapsulada	200
5.4.4. Finline Unilateral Encapsulada	210
5.4.5. Línea Coplanar Encapsulada con Sustrato Anisótropo con Pérdidas	215
6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS	221
A1. NOMENCLATURA Y ESTRUCTURAS DE DATOS EN LA GENERACIÓN DE MALLAS	225
A1.1. Componentes de la Geometría Bidimensional	225
A1.2. Componentes de la Malla Bidimensional	228
A1.3. Parámetros Físicos del Problema	229
A1.4. Información de Gestión de Malla	229
A1.5. Componentes de la Geometría Tridimensional	230
A1.6. Componentes de la Malla Tridimensional	232
A2. DISCRETIZACIÓN UNIDIMENSIONAL	235
A2.1. Discretización Uniforme	235
A2.2. Discretización Geométrica	239
A2.3. Discretización Irregular	241
A3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS A LA ECUACIÓN DE ONDA VECTORIAL EN PROBLEMAS CERRADOS	243
A3.1. Problemas de Guiado de Ondas	244
A3.1.1. Obtención de la Ecuación Integral mediante el Método de Galerkin	245
A3.1.2. Discretización de la Formulación Débil	246
A3.1.3. Aplicación de las Condiciones de Contorno	248
A3.1.4. Transformación del Autosistema. Obtención de la Constante de Propagación	249
A3.2. Análisis de Cavidades Resonantes	250
A3.2.1. Obtención de la Ecuación Integral mediante el Método de Galerkin	250
A3.2.2. Discretización de la Formulación Débil	250
A3.2.3. Aplicación de las Condiciones de Contorno	253

A3.2.4. Resolución del Autosistema	254
A4. INTERPOLACIÓN LOCAL DE LA SOLUCIÓN	255
A4.1. Interpolación Nodal de Lagrange de Primer Orden en Triángulos	255
A4.2. Interpolación Nodal de Lagrange de Primer Orden en Cuadriláteros	259
A4.3. Interpolación Nodal de Lagrange de Primer Orden en Tetraedros	261
A4.4. Interpolación Vectorial Conforme en Rotacional de Primer Orden en Triángulos	264
A4.5. Interpolación Vectorial Conforme en Rotacional de Primer Orden en Cuadriláteros	266
A4.6. Interpolación Vectorial Conforme en Rotacional de Primer Orden en Tetraedros	269
A5. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE MODELADO DE GEOMETRÍA Y GENERACIÓN DE MALLA DESARROLLADO	273
A6. PUBLICACIONES GENERADAS POR LA TESIS	279
BIBLIOGRAFÍA	281

INTRODUCCIÓN. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

El método de los elementos finitos (MEF) es una técnica numérica general para la resolución de problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales (EDP). Se propuso por primera vez en los años cuarenta y fue puesto en práctica en la década siguiente en el diseño aeronáutico. Desde entonces el método se ha desarrollado y aplicado extensamente en muchos otros campos, entre ellos el electromagnetismo. Actualmente se considera un método general aplicable a la mayoría de los problemas matemáticos y de ingeniería.

El método está basado en la división del dominio continuo sobre el que se quiere estudiar el problema en varios subdominios en los que la función incógnita (la solución del problema) es suma de funciones de interpolación simples con coeficientes desconocidos. Así, el problema original con infinitos grados de libertad se transforma en un problema con un número finito de éstos, es decir, la solución del problema sobre todo el dominio se aproxima a partir de un número finito de coeficientes desconocidos. Con esta filosofía, y aplicando el método variacional de Ritz o el método de Galerkin, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas que, una vez resuelto, proporciona la solución del problema. Todo este proceso se puede dividir en las siguientes fases:

1. Discretización del dominio.
2. Elección de las funciones de interpolación.
3. Formulación del sistema de ecuaciones.
4. Resolución del sistema de ecuaciones.
5. Postproceso.

La aplicación del MEF al electromagnetismo se inició en la década de los 60 con el análisis de guías de onda homogéneas de sección arbitraria, donde la ecuación a resolver es la escalar de Helmholtz. La extensión del MEF a estructuras más complejas (inhomogéneas, anisótropas) requirió el planteamiento de la ecuación de onda vectorial. Esta generalización a ecuaciones vectoriales dio origen a problemas que no aparecían en las formulaciones escalares anteriores. En los últimos años se han desarrollado funciones de interpolación vectoriales que consiguen eliminar estos problemas [Sun95], [Bal96], [Jin93].

La discretización del dominio en que tiene lugar el fenómeno bajo estudio es la primera y, tal vez, más importante fase del proceso, pues de ella dependen los recursos de memoria necesarios, la velocidad de generación de la solución y la exactitud de los resultados numéricos obtenidos. En ella, el dominio se divide en pequeños subdominios llamados elementos. La geometría de éstos depende del número de dimensiones sobre las que estemos trabajando y de las características del problema:

- Problemas unidimensionales: segmentos de la línea que forma el dominio.
- Problemas bidimensionales: triángulos y cuadriláteros. Los cuadriláteros, lógicamente, se ajustan mejor a dominios cuadriláteros, mientras que los triángulos se suelen utilizar para dominios con una geometría más compleja. De hecho, cualquier dominio puede ser discretizado exclusivamente con triángulos, y no así con cuadriláteros.

- Problemas tridimensionales: tetraedros, pentaedros y hexaedros. Análogamente al caso bidimensional, los tetraedros son los elementos más simples y siempre se ajustan a geometrías arbitrarias.

La investigación de sistemas de generación de mallas aplicables al MEF es bastante reciente. Esto, unido a la dificultad de encontrar un método que compagine un bajo coste computacional (tiempo y recursos), una aceptable calidad de la malla, la posibilidad de controlar algunas características de ésta (como la distribución de los nodos) y la capacidad de discretizar dominios con geometría compleja, ha hecho que, aunque la bibliografía sobre el tema es extensa, en la actualidad no exista un método que destaque claramente sobre los demás. Técnicas muy generales, capaces de generar mallas en geometrías complejas, como las de frente de avance o las de Delaunay-Voronoi, presentan un coste computacional elevado. Por contra, los métodos algebraicos generan la malla a una gran velocidad, pero son incapaces de mallar geometrías de cierta complejidad. La geometría del dominio, el coste computacional y la capacidad de control que queramos tener sobre la malla será lo que nos haga decantarnos por unos u otros métodos.

La primera parte de esta tesis, desarrollada en los capítulos 1, 2, 3 y 4, está dedicada al diseño de nuevos métodos de mallado bidimensional, superficial y volumétrico que sigan estas premisas. Aunque esos métodos han sido desarrollados en el contexto del análisis de guiado de ondas y el diseño de cavidades resonantes de microondas, su aplicación puede abarcar cualquier campo de la física, pues la fase de discretización del MEF presenta una clara independencia del problema tratado.

En el primer capítulo de la tesis se realiza un somero repaso del estado actual de la metodología de mallado en dos y tres dimensiones.

En el segundo capítulo se presenta un nuevo método de mallado bidimensional en el que se combinan técnicas multibloque, algebraicas y de frente de avance para conseguir un preprocesador con tres características fundamentales:

- Generalidad de la geometría a mallar.
- Bajo coste computacional.
- Calidad de la malla generada.

En el capítulo 3 se presentan los métodos desarrollados para la discretización de distintas superficies tridimensionales, todos ellos basados en el método bidimensional descrito en el capítulo 2.

Los métodos de mallado tridimensional presentan, evidentemente, una complejidad mucho mayor que los bidimensionales. No es trivial una generalización de las rutinas de discretización diseñadas para dos dimensiones a tres y, por ello, se ha optado por desarrollar un método de mallado volumétrico basado en la técnica general de frente de avance, que se presenta en el capítulo 4.

Independientemente del método de mallado utilizado, en la fase de discretización del MEF surge también la dificultad de distribuir los grados de libertad a lo largo del dominio del problema de modo que éstos se concentren en aquellas zonas donde el campo eléctrico presente unas variaciones más abruptas. La mejor distribución será aquella que proporcione la solución más exacta con el menor número de incógnitas. Una forma de conseguir una buena distribución es utilizar un esquema adaptativo, esto es, generar una malla inicial con pocos elementos, resolver el problema con esta discretización, estimar el error cometido en el cálculo de la solución, añadir incógnitas en las regiones donde el error sea mayor y resolver de nuevo sobre la nueva malla. Este proceso se aplica iterativamente hasta obtener la precisión deseada o alcanzar un número de grados de libertad aceptable para el problema dado.

Este enfoque de resolución del problema requiere, además de las herramientas del MEF clásico, el desarrollo de estimadores o indicadores de error que detecten las zonas donde el error de modelado debido a la insuficiente discretización del medio continuo es más elevado, y el diseño de estrategias de refinamiento o enriquecimiento de esas zonas. Fundamentalmente existen tres tipos de refinamiento en los que se aumenta el número de incógnitas del problema:

- *Tipo h* : se modifica el tamaño de los elementos de la malla, es decir, se crean nuevos elementos allí donde el error es mayor.
- *Tipo p* : se modifica el orden del polinomio de la función de interpolación de los elementos.
- *Tipo hp* : es un enfoque híbrido que combina las estrategias h y p .

Cualquiera que sea el tipo de adaptación escogido, el MEF adaptativo presenta dos ventajas fundamentales frente a la versión clásica del método:

- Mejora en eficiencia al optimizar la distribución de las incógnitas en la malla, de modo que el número de elementos final del problema sea el mínimo requerido para obtener la exactitud deseada. Esta disminución en el número de incógnitas del sistema supone un coste computacional menor.
- Comodidad en la introducción de datos, al no ser necesaria la definición de la malla o, mejor dicho, la discretización del contorno que la genera. En la versión adaptativa del MEF sólo es necesaria la generación de una malla inicial con pocos elementos. El algoritmo de adaptación se encarga de generar la malla óptima.

La segunda parte de esta tesis, presentada en el capítulo 5, está dedicada al estudio de este tipo de métodos. En ella se describen los distintos indicadores de error y estrategias de refinamiento h desarrolladas, y se presentan y analizan los resultados obtenidos con ellos en distintas estructuras de guiado de ondas.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones finales del trabajo realizado, así como las líneas futuras de trabajo que esta tesis abre.

Esta memoria se completa con seis apéndices. En el primero de ellos se presenta la nomenclatura relacionada con la metodología de generación de mallas, así como las estructuras de datos utilizadas en la implementación de los distintos métodos de discretización desarrollados.

El apéndice 2 describe los métodos de mallado unidimensional desarrollados. Estos métodos son útiles tanto para la discretización de problemas unidimensionales como para la división del contorno lineal en problemas en dos y tres dimensiones. La discretización de dominios unidimensionales es un tema de investigación superado y que no plantea excesivas dificultades. Sin embargo, se ha añadido como apéndice para dotar al texto de una visión completa de las técnicas de discretización.

Los apéndices 3 y 4 describen, respectivamente, la aplicación del MEF a problemas cerrados de guiado de ondas y cavidades resonantes, y las funciones de interpolación utilizadas en la resolución de problemas en dos y tres dimensiones. Las expresiones de estas funciones de interpolación son necesarias en el desarrollo de los distintos indicadores de error descritos en el capítulo 5.

En el apéndice 5 se describe brevemente el programa de modelado de geometría y generación de malla desarrollado durante la realización de la tesis y que utiliza los distintos métodos diseñados en ella.

El apéndice 6 es una enumeración, en orden cronológico, de las publicaciones científicas en congresos nacionales, internacionales y revistas internacionales que ha generado esta tesis.

Finalmente, quisiera agradecer a Luis Nuño su apoyo inestimable en la dirección de esta tesis doctoral y a Juan Vicente Balbastre su ayuda en las muchas dudas surgidas a lo largo del trabajo. Este agradecimiento se hace extensivo al Grupo de Calentamiento por Microondas, desde su cabeza, Elías de los Reyes, por el buen ambiente investigador y humano con que ha sabido dotar al Grupo, hasta los distintos compañeros profesores e investigadores como José Manuel Catalá, David Sánchez, Felipe Peñaranda o Marta Martínez, por el apoyo prestado en estos cuatro años.

Capítulo 1.

METODOLOGÍA DE GENERACIÓN DE MALLAS

En este primer capítulo se hace un repaso de las técnicas de discretización más utilizadas en la actualidad. Se ha creído conveniente, dadas las analogías que presentan entre sí los métodos de mallado bidimensional, superficial y volumétrico, unificar en este apartado el estado actual de estas técnicas, tanto en dominios bidimensionales como tridimensionales, en lugar de distribuir esta descripción a lo largo de la tesis (capítulos 2, 3 y 4).

Varios autores [Tha80], [Kik86], [Ho88], [She88], [Geo91], [Tho92], [Löh97], [Owe98a] han realizado clasificaciones de los distintos métodos empleados en la generación de mallas. En la mayoría de estas referencias se establece como primer criterio de clasificación el tipo de malla creada y, en segundo lugar, el modo en que se genera y el tipo de elementos utilizados. Siguiendo estas pautas, las distintas técnicas de discretización bi- o tridimensional se pueden dividir en:

- Métodos de generación de malla estructurada:
 - Algebraicos.
 - Basados en EDPs.
 - Superposición-deformación de retícula.
 - Crecimiento estructurado.
- Métodos de generación de malla no estructurada:
 - Inserción de nodos y posterior conexión: Delaunay.
 - Generación simultánea de nodos y conectividad: Frente de avance.
- Métodos Multibloque

1.1. Mallas Estructuradas

Por malla estructurada se entiende toda discretización cuya conectividad sigue un patrón reticular. Por esta razón, en este tipo de mallas se utilizan fundamentalmente elementos cuadriláteros (2D), o hexaédricos (3D), aunque a partir de ellos, como se verá posteriormente, se pueden generar triángulos y tetraedros, respectivamente. La creación de esta retícula impone unas fuertes condiciones sobre el contorno del dominio, por lo que en muchos casos este tipo de discretización no es realizable o, siéndolo, presenta una baja calidad.

1.1.1. Métodos Algebraicos

Dado que en la generación de mallas estructuradas la conectividad es conocida de antemano, los métodos tienen como objetivo primordial el cálculo de la posición de los nodos que forman la retícula, de modo que los elementos resultantes presenten unas determinadas características de tamaño y regularidad. Las técnicas más sencillas y, por tanto, más rápidas en el cálculo de estas coordenadas nodales son las denominadas algebraicas, entre las que

destacan, fundamentalmente, las de transformación en geometrías canónicas o “mapping” y las de interpolación transfinita. En las primeras, se transforma el dominio original, esto es, su contorno discretizado, en un dominio canónico como, por ejemplo, un rectángulo. Sobre él se genera la retícula y los nodos de ésta vuelven a ser transportados al dominio real mediante una transformación inversa a la previamente realizada. En el segundo caso se desarrollan funciones de interpolación entre los lados del dominio de modo que la generación de los nodos internos viene determinada por la posición de los nodos del contorno. Estas técnicas generalmente se aplican sobre geometrías cuadriláteras [Zie71], [Gor73], [Hab81] o hexaédricas [Coo74], [Coo82], aunque en ocasiones también han sido aplicadas en dominios triangulares [Bar73], [Hab81], tetraédricos o pentaédricos [Per98], donde se generan, respectivamente, elementos triangulares, tetraédricos o pentaédricos. En la figura 1.1 se presentan algunos ejemplos de este tipo de discretización.

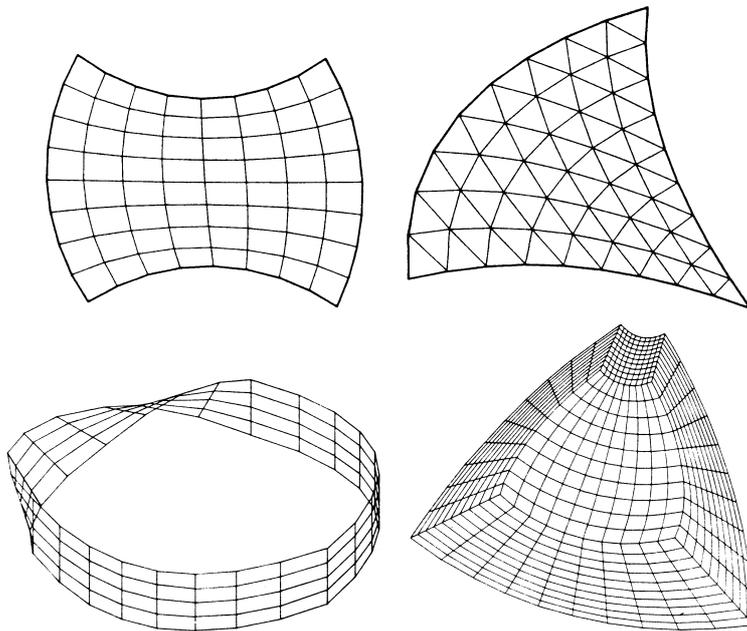


Figura 1.1. Mallas generadas mediante métodos algebraicos

1.1.2. Métodos basados en EDPs

Con el objeto de conseguir una mayor regularidad de los elementos, características de ortogonalidad entre las aristas con nodos comunes y un mayor control de la densidad de la malla, se han desarrollado técnicas de mallado estructurado basadas en la resolución de EDPs, utilizando como condición de contorno la geometría del contorno del dominio que se pretende discretizar. Estas técnicas pueden ser consideradas como métodos algebraicos donde las coordenadas de los nodos interiores vienen determinadas por la resolución de estas EDPs, que relacionan las coordenadas del dominio real (x,y) con las del dominio canónico (ξ,η) o coordenadas naturales. El objetivo final consiste en obtener las funciones que relacionan x e y con ξ y η , por lo que es necesario invertir el sistema y resolver las EDPs acopladas resultantes mediante algún método iterativo. Esta resolución implica un alto coste computacional frente a los métodos algebraicos.

El tipo de ecuación o ecuaciones diferenciales empleadas influye directamente en la malla generada. Así, si únicamente se pretende obtener una malla con una buena regularidad se emplea la ecuación de Laplace; si se quieren obtener discretizaciones con densidad de mallado

variable, de modo que exista una mayor concentración de elementos alrededor de una zona determinada, se puede utilizar la ecuación de Poisson:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= P \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= Q \end{aligned} \tag{1.1}$$

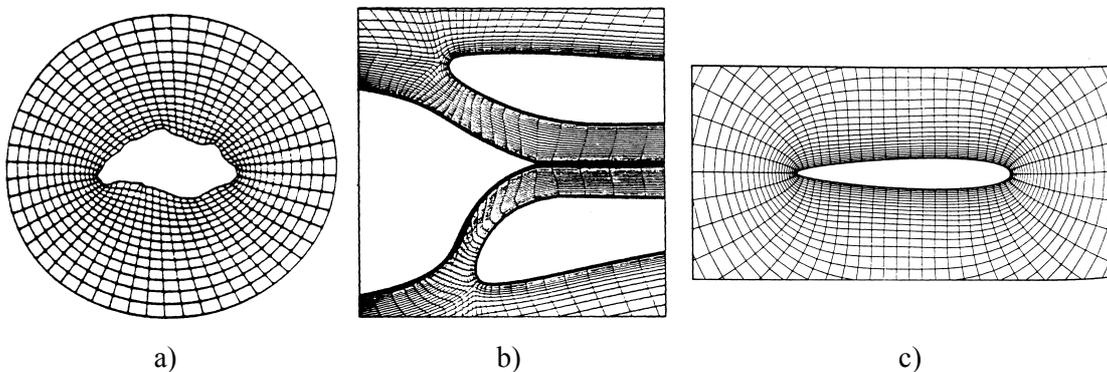
donde P y Q controlan la distribución de los nodos en la malla de la siguiente forma:

- $P > 0$: los nodos son atraídos hacia la derecha.
- $P < 0$: los nodos son atraídos hacia la izquierda.
- $Q > 0$: los nodos son atraídos hacia arriba.
- $Q < 0$: los nodos son atraídos hacia abajo.

Cuando el dominio del problema viene definido por dos curvas cerradas (2D) o dos superficies cerradas (3D), encontrándose una de ellas en el infinito, es decir, en el caso de sistemas abiertos, es recomendable la utilización de sistemas hiperbólicos, pues presentan un menor coste computacional que los elípticos.

En la bibliografía se pueden encontrar distintas implementaciones de estas técnicas. En [Mar98], [Nie98], [Pip98] se analizan métodos elípticos basados en la ecuación de Poisson. En [Jia98], [Che98] se combina la generación hiperbólica de la malla con el suavizado de ésta mediante un método elíptico en dos dimensiones y en superficies tridimensionales, respectivamente. En [Ecc98] se combinan métodos algebraicos y elípticos en superficies.

En la figura 1.2 se muestran algunas mallas obtenidas con este tipo de métodos. Un análisis más detallado de ellos se puede encontrar en [Tho85], [Geo91].



1.2. Mallas bidimensionales generadas mediante la resolución de EDPs: a) Laplace, b) Poisson, c) hiperbólico

1.1.3. Métodos de Superposición-Deformación de Reticula

Estos métodos generan la malla a partir de una retícula cuadrada, como la mostrada en la figura 1.3a, o cúbica que contiene al dominio del problema, mediante las siguientes etapas:

1. Eliminación de los cuadrados (2D) o cubos (3D) que no intersecten el dominio (figura 1.3b).
2. Procesamiento de los cuadrados o cubos que son intersectados parcialmente por el contorno del dominio. Si este procesado no se produce, el ajuste al contorno es muy deficiente, por lo que resulta más apropiado para métodos de diferencias finitas [Wit96]

que para el MEF. Generalmente, para mejorarlo se modifican los cuadrados o cubos de forma que se ajusten perfectamente al contorno [Yer84], [Yek95] (figura 1.4a), o bien se utiliza una retícula jerárquica no conforme (en la terminología inglesa “quadtree” (2D) u “octree” (3D)), como muestra la figura 1.4b.

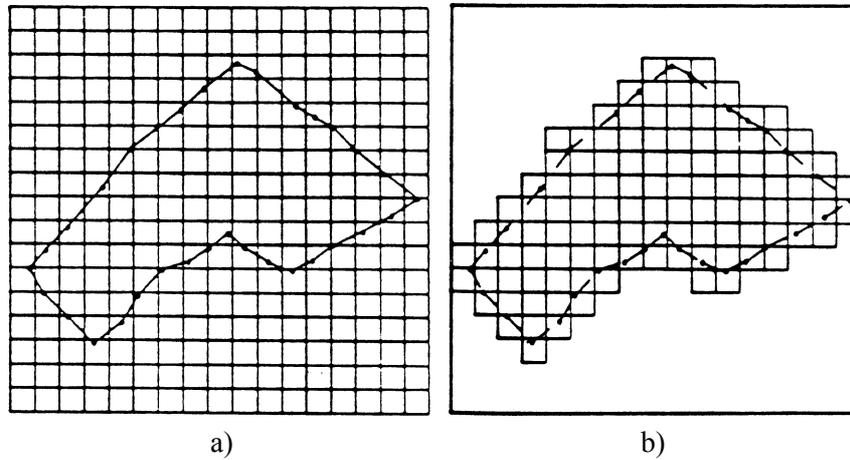


Figura 1.3. Superposición de retícula: a) retícula inicial, b) intersección con el dominio

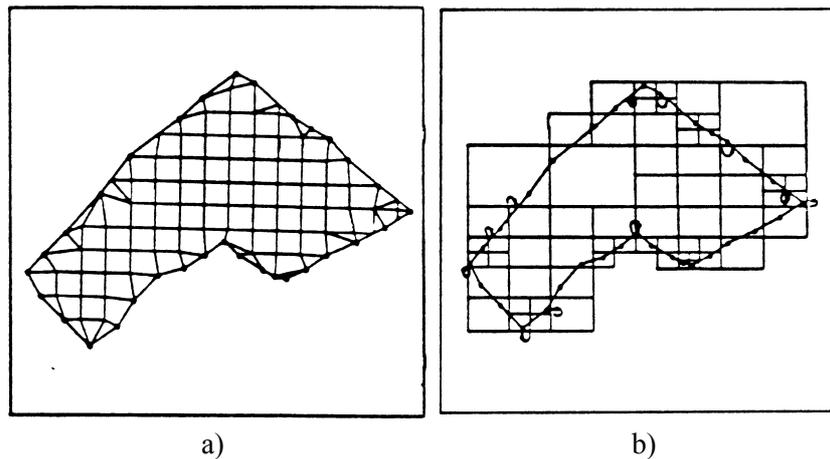


Figura 1.4. Ajuste al contorno: a) deformación de cuadrados, b) retícula jerárquica

Aunque existen programas comerciales que no realizan ajuste al contorno, como el generador de malla del simulador electromagnético MAFIA de la empresa CST, la práctica habitual es la generación de una retícula jerárquica ajustada al contorno. Ésta puede ser la malla final que utilice el MEF, pero dadas las dificultades que plantea su no conformidad, lo habitual es utilizarla como malla de referencia del tamaño del elemento en métodos de generación de malla no estructurada [Bae87], [Sch90], [She85], [She86].

1.1.4. Métodos de Crecimiento Estructurado

Con este nombre se ha pretendido designar aquellos métodos que en la bibliografía se denominan de “extrusion” o “sweeping”. Se ha añadido el adjetivo estructurado para evitar la posible confusión con los métodos de frente de avance que se describen posteriormente. Éstos son métodos de discretización volumétrica indicados para geometrías que se desarrollan a partir de la traslación de una superficie base. Éste es el caso, por ejemplo, de los volúmenes cilíndricos o toroidales. El método consiste fundamentalmente en la repetición de la malla

superficial de la base, que puede ser estructurada o no, a lo largo del dominio del problema. Según este planteamiento, únicamente se puede hablar de malla estructurada en la dirección de crecimiento de la geometría tridimensional. Las restricciones que esta técnica plantea, si se parte de la discretización previa del contorno, son fundamentalmente dos:

- La conectividad de las mallas bidimensionales de las dos superficies básicas debe ser la misma.
- La malla de las superficies laterales debe ser estructurada.

En la figura 1.5 se muestran dos ejemplos de este tipo de mallado partiendo de mallas bidimensionales cuadriláteras no estructuradas. Se pueden encontrar distintas implementaciones de esta técnica en [Yam96], [Sta98], [Knu98a].

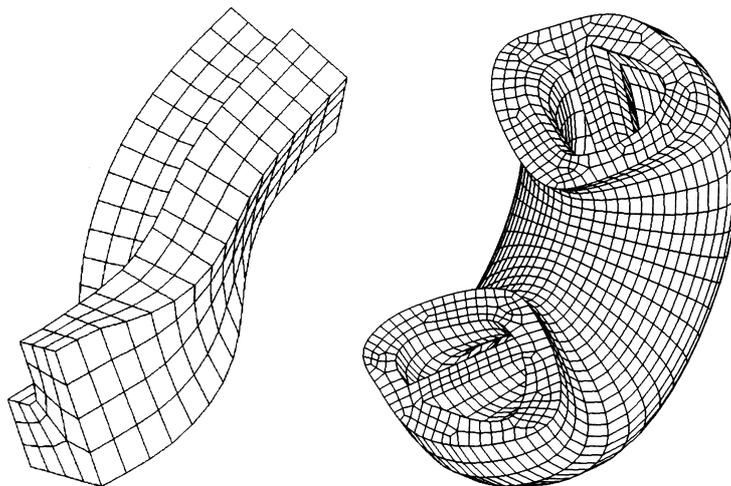


Figura 1.5. Mallas hexaédricas de crecimiento estructurado

1.2. Mallas No Estructuradas

Las mallas no estructuradas, al contrario que las estructuradas, no presentan un patrón de conectividad predeterminado, pues ésta viene determinada por el contorno del problema, la situación de los nodos interiores y el método de discretización utilizado. Consustancial a este tipo de discretización es el elemento triangular (2D) o el tetraédrico (3D), aunque en los últimos años se han desarrollado técnicas de generación de malla no estructurada cuadrilátera o hexaédrica. Esta libertad en la conectividad hace posible la discretización de cualquier dominio a partir de una discretización del contorno arbitraria. Son, por tanto, de aplicación más general que las estructuradas, pero esto repercute en un mayor coste computacional. Aunque existe una gran diversidad en los métodos de generación de este tipo de discretizaciones, los más empleados en la práctica se pueden dividir entre aquéllos que parten de una distribución determinada de nodos y únicamente se ocupan de obtener una conectividad adecuada, y aquellos otros en los que nodos, aristas y elementos (en el caso bidimensional) o nodos, aristas, caras y elementos (en el caso tridimensional) se generan conforme la malla va creciendo. En el primer caso, se busca una conexión óptima de modo que los elementos presenten una buena relación de aspecto; esta triangulación óptima está garantizada si se emplea el método de Delaunay-Voronoi. En el segundo caso, estos mismos criterios de regularidad son los que marcan la posición más adecuada para el nuevo nodo generado y su conexión con el resto de la malla. La familia de técnicas que sigue esta última metodología se denomina métodos de frente de avance, pues en ellos la malla se genera iterativamente desde un frente inicial, que coincide

con el contorno del problema y que se va modificando conforme el proceso avanza, hasta que el dominio queda completamente mallado, momento en el que el frente queda vacío. A continuación se describen con mayor detalle estas dos técnicas.

1.2.1. Métodos de Delaunay-Voronoi

La triangulación de Delaunay fue una de las primeras técnicas de discretización triangular utilizadas. En 1855 Dirichlet propuso un método con el que, dado un conjunto de puntos P_i , se puede definir un conjunto de regiones poligonales (2D) o poliédricas (3D) V_i asociadas a cada punto, de modo que cualquier punto de la región V_i se encuentra más cercano al punto P_i que a cualquiera del resto. Es decir:

$$V_i = \left\{ p : \|p - P_i\| < \|p - P_j\| \right\} \quad \forall j \neq i \quad (1.2)$$

Cada una de estas regiones se denomina región de Voronoi y el conjunto de ellas es un mosaico de Dirichlet o diagrama de Voronoi [Aur91]. A partir de su definición resulta evidente que cada lado (o cara) de estas regiones poligonales (o poliédricas) se encuentra equidistante de los dos puntos que separa. La unión de todos estos puntos por pares genera otra discretización del dominio, conocida como triangulación de Delaunay, que posee una característica muy interesante para la generación de mallas: la regularidad de ángulos en los triángulos generados es máxima. Es decir, dado un conjunto de nodos, el método de Delaunay garantiza una triangulación óptima. Sin embargo, en el caso volumétrico, esta triangulación óptima no garantiza que los tetraedros generados sean óptimos, por lo que, en general, tras la generación de la malla son necesarias técnicas de detección y corrección de tetraedros defectuosos.

La generación de este tipo de discretización consiste en un método sistemático dividido en las siguientes etapas:

1. En caso de que el dominio del problema no sea convexo, definición de un dominio convexo que incluya al dominio que se pretende discretizar y generación de su triangulación. La forma más sencilla de hacer esto es mediante la especificación de 4 puntos que formen un cuadrado en el caso bidimensional u 8 puntos que formen un cubo en el caso volumétrico.
2. Introducción de un nuevo nodo del dominio.
3. Determinación de los elementos cuyas circunferencias circunscritas (o esferas circunscritas) contienen al nuevo nodo. Estos elementos deben ser eliminados, así como sus aristas (y caras) comunes.
4. Determinación de los nodos pertenecientes a esos elementos.
5. Determinación de las aristas (o caras) exteriores de los elementos eliminados, es decir, del hueco que resulta tras la eliminación de los elementos anteriores.
6. Generación de nuevos elementos mediante la unión de las aristas (o caras) detectadas en el punto 5 con el nuevo nodo.
7. Repetición de la secuencia desde el punto 2 hasta que todos los nodos hayan sido introducidos. La figura 1.6 muestra un ejemplo de la aplicación de estas 5 etapas en un dominio bidimensional.
8. Eliminación de las aristas y elementos (2D) o aristas, caras y elementos (3D) que no pertenezcan al dominio.

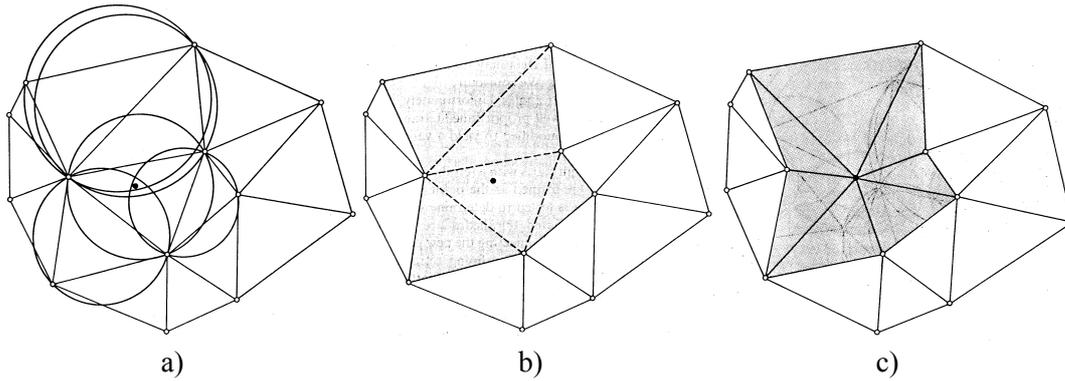


Figura 1.6. Triangulación de Delaunay: a) inserción de nodo, b) detección y eliminación de elementos, c) triangulación local

Como se ha comentado anteriormente, este algoritmo genera únicamente la conectividad, asumiendo conocidas las posiciones de los nodos de la malla. El cálculo de estas posiciones se realiza generalmente a partir de una malla de referencia, una función de densidad de malla [Alf96], [Che96], [Owe97], [Cun97], [Geo98] o en el contexto de un procedimiento adaptativo [Bor97] como los que se describen en el capítulo 5 de esta tesis. En este último caso, los nuevos nodos se generan en aquellos elementos que presenten un elevado error. Asimismo, si se parte de una discretización inicial del contorno y éste no es convexo, ésta puede verse modificada en el proceso de inserción de nodos. Ésta es una de las principales desventajas de la triangulación de Delaunay, pues dificulta la utilización de una metodología multibloque, que más adelante es comentada, ya que esta técnica requiere una misma discretización en las interfaces de los distintos bloques que forman el dominio. Existen variantes de la triangulación de Delaunay que fuerzan a mantener la discretización del contorno o bien la restauran tras aplicar el procedimiento general, tanto en discretizaciones bidimensionales [Loz93] como volumétricas [Kry98], [Bak98], [Lea98a]. Estas técnicas son conocidas como Delaunay restringidas y, en general, no garantizan la generación de una malla óptima en el sentido anteriormente comentado.

En la figura 1.7. se muestra la evolución de una triangulación Delaunay bidimensional conforme los nodos son introducidos.

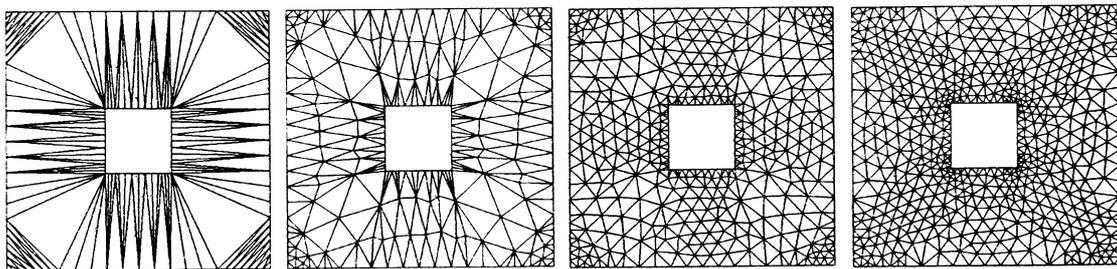


Figura 1.7. Evolución de una triangulación de Delaunay bidimensional

El coste computacional de este tipo de técnicas, según [Löh97], es $O(n \log(n))$, donde n es el número de elementos, aunque otros autores han obtenido comportamientos lineales [Geo92], [Kar97], este último mediante el uso de estructuras de datos arbóreas que facilitan la localización de nodos o elementos vecinos. A este coste se debe añadir el necesario para la restauración del contorno, si así se precisa, y, en el caso volumétrico, la detección y corrección de los tetraedros que presenten una mala relación de aspecto.

La literatura sobre este tipo de métodos es muy vasta. Para una descripción más detallada del algoritmo de inserción de puntos se puede consultar [Geo91]. Otras implementaciones con ligeras variantes se pueden encontrar en [Cav85], [Geo92], [Far93], [Kar97], [Mur98] para dominios bidimensionales, en [Zhe96b] para superficies y en [Zhe96a], [Lew96], [Fuc98], [Sin98] para volúmenes.

1.2.2. Métodos de Frente de Avance

En este tipo de métodos la generación de la malla se realiza desde el contorno hacia el interior del dominio, siendo triángulos los elementos utilizados en el caso de dos dimensiones y tetraedros en problemas tridimensionales. Como datos de entrada se requieren los nodos y aristas (y caras en 3D) que forman el contorno del problema, es decir, una discretización poligonal (2D) o poliédrica (3D) de él, y un tamaño de elemento prescrito o una malla de referencia o función de densidad si se pretende generar una malla no uniforme.

El proceso de creación de la malla es iterativo: se analiza un frente, inicializado con los datos del contorno, para determinar una zona de partida desde la que se crean uno o varios elementos internos, junto con los correspondientes nodos y aristas (y caras en 3D). Seguidamente se actualiza el frente con los nuevos nodos y aristas generadas (y caras en 3D) y se repite el proceso hasta que el frente quede vacío, es decir, el dominio queda completamente mallado. Ésta es la filosofía general del método, pero su comportamiento viene determinado fundamentalmente por el análisis del frente y el criterio establecido en la creación de los nuevos elementos. Este criterio se basa en las características geométricas de las aristas (2D) o caras (3D) que lo constituyen y en la malla de referencia o función de densidad [Sev97], [Owe97], [Bor97], [Cun97] que controla la generación de la malla. En [Geo91] se puede encontrar un sencillo ejemplo de criterio geométrico en dos dimensiones, según el cual, si α es el ángulo formado por dos aristas consecutivas del frente, se pueden identificar tres posibles situaciones:

- $\alpha < \frac{\pi}{2}$: se crea una arista y un elemento formado por ésta y las aristas que definen el ángulo α (figura 1.8a).
- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$: a partir de las dos aristas con ángulo α se genera un nodo interno, tres aristas y dos elementos (figura 1.8b).
- $\alpha > \frac{2\pi}{3}$: se crea un punto interno, las dos aristas que forma éste con los nodos extremos de la arista del frente, y un elemento formado por estas tres aristas (figura 1.8c).

La posición del nodo interno generado en los dos últimos casos viene determinada por criterios de regularidad y tamaño de los elementos.

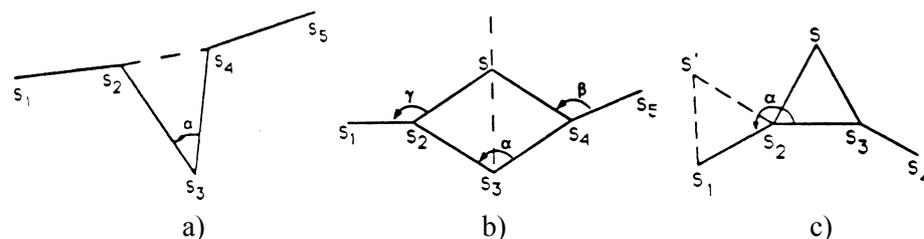


Figura 1.8. Ejemplo de tratamiento del frente en mallas bidimensionales

Este ejemplo es meramente didáctico y, frente a situaciones complejas como contornos no convexos o gran disparidad de tamaño entre elementos próximos, puede fallar. En el caso tridimensional, la casuística que puede presentar el frente es mucho mayor. En el capítulo 4 se analizan las posibles situaciones y se describen los criterios establecidos en esta tesis para el control del crecimiento de la malla volumétrica. Otras implementaciones de este método en su versión volumétrica se pueden encontrar en [Mö195], [Has96], [Cha97], [Ras97], [Sak98], [Cav99], esta última en un contexto de análisis adaptativo.

Como ejemplo de la dificultad en la clasificación de los métodos de mallado, podemos decir que existen variantes del método de frente de avance donde la situación de los nodos es conocida previamente y la generación de aristas y elementos consiste únicamente en la elección del nodo más correcto [Lo85], [Tez96].

El coste computacional de este método viene determinado por las operaciones de búsqueda de partes del frente vecinas o próximas y las comprobaciones de pertenencia al dominio no mallado cuando un nodo es creado. El coste de estas tareas se ve reducido si se emplean, como se ha comentado en el método de Delaunay, estructuras de datos arbóreas [Lö88], [Car88], [Dan90], [Bon91] y el coste total del método se puede reducir hasta $O(n \log(n))$ [Lö97].

La figura 1.9 muestra la evolución de una malla bidimensional obtenida con esta técnica.

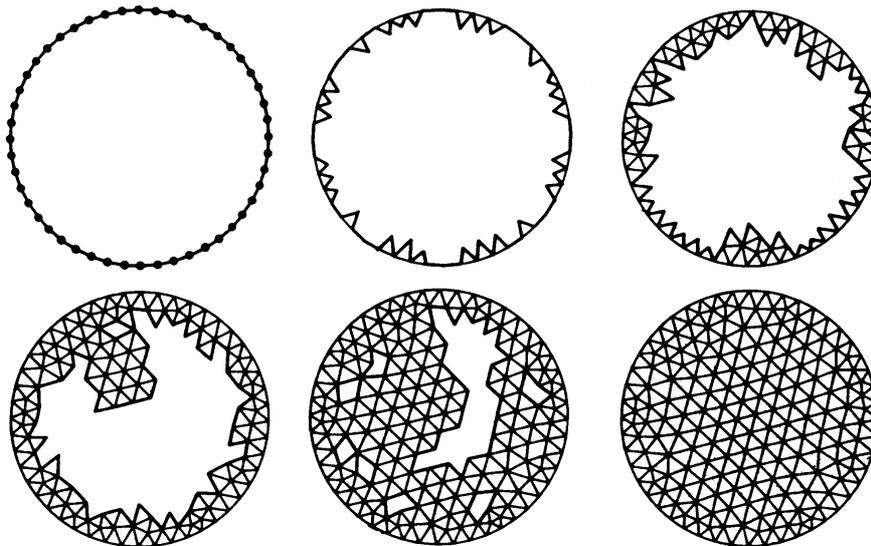


Figura 1.9. Evolución de la malla en el método de frente de avance

1.2.3. Generación de Mallas Cuadriláteras y Hexaédricas No Estructuradas

Como se comentó al comienzo de este capítulo, el elemento cuadrilátero o hexaédrico es inherente a las mallas estructuradas, pudiendo, mediante la división de éstos en dos triángulos o en 5 ó 6 tetraedros, respectivamente, obtener las correspondientes mallas triangulares o tetraédricas. Como se ha visto, los principales métodos de generación de mallas no estructuradas emplean el elemento triangular o tetraédrico. La generación de mallas no estructuradas cuadriláteras o hexaédricas requiere técnicas más complejas y no siempre son realizables. La figura 1.10 muestra una malla no estructurada compuesta únicamente por elementos cuadriláteros y otra hexaédrica.

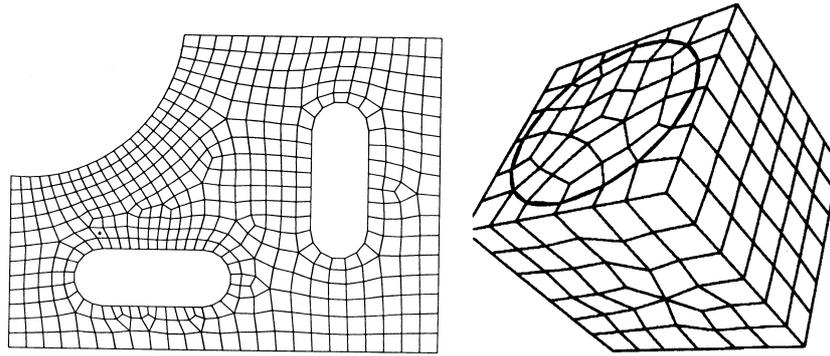


Figura 1.10. Mallas no estructuradas cuadrilátera y hexaédrica

Existen fundamentalmente dos formas de obtener este tipo de mallas [Owe98a]: mediante técnicas directas y técnicas indirectas. En las indirectas, en una primera fase se discretiza el dominio con triángulos o tetraedros, y posteriormente éstos son transformados en cuadriláteros o hexaedros. Estas transformaciones, en el caso bidimensional, se basan normalmente en la descomposición del triángulo en tres cuadriláteros [Pet97], en la eliminación de la arista común entre pares de triángulos, en ambas [Lo89], [Lyr98], [Shi98] o en otras estrategias más complejas como, por ejemplo, la eliminación de aristas compartidas por triángulos que tengan un nodo común y que formen un contorno cuadrilátero [Owe98b]. En el caso volumétrico, los métodos indirectos se basan fundamentalmente en la descomposición de cada tetraedro en cuatro hexaedros. Debido a la baja calidad de éstos, estas técnicas no están muy extendidas, aunque sí se pueden encontrar trabajos al respecto en [Mit98], [Lel98].

En los métodos directos de generación de malla cuadrilátera se puede distinguir entre aquéllos que descomponen el dominio en regiones más sencillas sobre las que se aplican plantillas de mallado cuadrilátero, como la división por el eje medio (“medial axis”) o el método de empaquetado de círculos (“circle packing”) [Ber97] y los que utilizan la filosofía de frente de avance, como [Zhu91a], [Ree97], [Lad98] o los métodos de pavimentación (“paving”) [Bla91], [Lob95].

En el caso de los métodos hexaédricos directos se puede hacer la misma distinción que en el caso bidimensional. Entre los de descomposición y aplicación de plantilla destaca el de división por la superficie media (“medial surface”) [Pri95], [Pri97]. Otra técnica de este tipo se puede encontrar en [Dho99]. En cuanto a los métodos de frente de avance, el “plastering” [Bla93] es un intento de extender la técnica de pavimentación al caso volumétrico. Se pueden encontrar otros métodos en [Tau96], [She98], [Mül98]. En general, los métodos de generación de malla hexaédrica directos desarrollados hasta la fecha son poco robustos [Owe98a] y pueden generar mallas erróneas frente a geometrías de cierta complejidad.

1.3. Mallas Superficiales

En los apartados anteriores se han descrito y clasificado los principales métodos de generación de malla bidimensional y volumétrica. Los métodos bidimensionales, en su gran mayoría, son utilizados en la generación de mallas superficiales, pero la necesidad de que los nodos generados pertenezcan a la superficie requiere una modificación de estas técnicas. Las superficies son definidas, en general, por su contorno y la ecuación que las define, bien de forma analítica o bien de forma aproximada, como, por ejemplo, en forma de NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) [Pie98] o de “mapeados” transfinitos discretos [Hab82].

Los métodos de generación superficial se pueden clasificar en dos grupos: los que generan la malla directamente sobre la superficie tridimensional y los que la generan en un espacio paramétrico bidimensional y posteriormente la transportan al espacio real. La mayor parte de las técnicas encontradas emplean este segundo enfoque: [Lo88], [Pie98], [Cui98], [Tri98], [Sha98a] utilizan elementos triangulares y [Lee98], [Sou99] cuadriláteros. En [Cas96] se describe un método de discretización directa sobre la superficie real.

1.4. Metodología Multibloque

En los apartados anteriores se han enumerado las distintas técnicas que permiten la discretización de un dominio dado. El éxito en la generación de la mallas dependerá tanto de la robustez del método escogido como de la complejidad de la geometría. La metodología multibloque representa una solución para la creación de mallas de geometrías complejas para las que los métodos descritos previamente no generan resultados satisfactorios o fallan. La idea básica consiste en la división del dominio en bloques de topología más sencilla. Cada bloque de esta partición se procesa posteriormente con alguna de las técnicas descritas en los puntos anteriores. La malla de todo el dominio se obtiene uniendo las mallas de cada uno de los bloques. Como muestra la figura 1.11, esta metodología permite la discretización de geometrías relativamente complejas con métodos sencillos. Además, en muchas ocasiones, este tratamiento del dominio es obligado, pues la mayoría de los problemas presenta zonas con distintas propiedades o condiciones de contorno. En tal caso, cada una de estas zonas debe ser definida como un bloque autónomo con el fin de que los componentes de la malla que se generen en él tras la discretización hereden sus propiedades.

Esta técnica presenta dos dificultades fundamentales:

- La creación de los bloques adecuados, pues la malla final depende de la elección de éstos.
- La gestión de los bloques y su relación con los demás (interfaces) para asegurar la correcta unión de sus mallas [Spe98]. En este sentido, es crucial que las líneas (2D) y las superficies (3D) pertenecientes a distintos bloques presenten una única discretización.

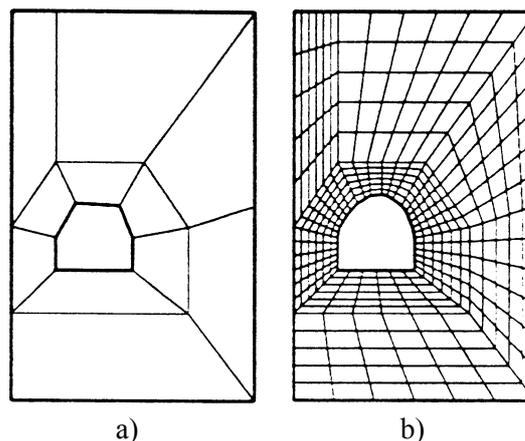


Figura 1.11. Generación de malla multibloque: a) descomposición inicial, b) malla final

Una ventaja adicional de este enfoque es su idoneidad para el procesamiento en paralelo [Wea98], [Sid98], [Son98]. Otras aplicaciones de esta técnica se pueden encontrar en [Sha92], [Col97], [Cha98], [Sha98b] con mallas estructuradas o en [Lob95] con mallas no estructuradas.

La utilización de distintos bloques hace posible que en un problema se puedan utilizar mallas estructuradas y no estructuradas [Koo98], [Spi98]. Esta clase de malla es conocida como híbrida y se utiliza fundamentalmente en problemas de dinámica de fluidos. En estos casos, la zona cercana al cuerpo introducido en el fluido es discretizada de forma estructurada, y para el resto del espacio se emplea una malla no estructurada. El adjetivo híbrido es también utilizado en la bibliografía para designar aquellas mallas que presentan más de un tipo de elementos, como mallas bidimensionales con triángulos y cuadriláteros o mallas volumétricas con tetraedros, pentaedros (pirámides de base cuadrilátera o prismas de base triangular) y hexaedros [Zga96], [Min97], [Mey98]. En adelante, para referirnos a estas mallas se utilizará indistintamente el calificativo híbrido o mixto.

Una vez repasada la metodología de generación de mallas presente en la bibliografía, es interesante destacar, para finalizar esta revisión, la recopilación de herramientas software dedicadas en parte o en su totalidad a la generación de mallas realizada en [Owe98a]. Allí se enumeran un total de 81 productos y se catalogan según el tipo de elementos que generan, su disponibilidad (comerciales, de investigación o de dominio público), el campo de la ingeniería que tratan y el tipo de método utilizado.

Capítulo 2.

MÉTODOS DE GENERACIÓN DE MALLA BIDIMENSIONAL

En este capítulo se describen y analizan los métodos de mallado bidimensional desarrollados para la discretización del dominio en problemas bidimensionales o en aquéllos que, dada su simetría traslacional, se puedan tratar en dos dimensiones. Siguiendo una filosofía de generación de malla multibloque, se pretende realizar la discretización de geometrías arbitrarias mediante la descomposición de éstas en áreas simples, esto es, triángulos, cuadriláteros y polígonos convexos, cuyos lados sean líneas o polilíneas, en su sentido más general.

En primer lugar se comentan los métodos desarrollados para áreas cuadriláteras y, posteriormente, se analizan los desarrollados para triángulos y geometrías arbitrarias. Un aspecto común a todos ellos es que están basados o parten de la información referente a la discretización del contorno, es decir, el tamaño de los elementos y la distribución de éstos en la malla depende exclusivamente de las aristas del contorno del área que se va a mallar.

La nomenclatura utilizada en este capítulo relativa a los distintos componentes de geometría y de malla, así como cuestiones referentes a la discretización del contorno, se describen en los apéndices 1 y 2.

2.1. Descomposición de Elementos Cuadriláteros en Triangulares

Dado que los distintos métodos de discretización desarrollados en la presente tesis permiten la generación de mallas triangulares, cuadriláteras (con ciertas restricciones) o mixtas, es interesante describir el método de descomposición de un elemento cuadrilátero en elementos triangulares antes de presentar los distintos procedimientos de generación de malla.

Esta descomposición consiste en dividir el cuadrilátero en dos triángulos por una de sus diagonales, es decir, crear una nueva arista y dos elementos triangulares. Para elegir la diagonal por la que se divide el cuadrilátero hay que tener presente el criterio de máxima regularidad posible de los triángulos generados. Como se puede observar en la figura 2.1, este criterio se cumple si se divide por la diagonal más corta.

No obstante, este criterio es mejorable porque, como se puede observar en la figura 2.2, en cuadriláteros con grandes diferencias entre sus ángulos, la elección de la diagonal más corta genera en ocasiones peores resultados.

Se puede observar que, en el primer caso, se crea un triángulo bastante regular y otro muy deficiente en ese aspecto. Si se opta por la diagonal larga, los dos triángulos generados no son demasiado regulares, pero sí aceptables. Parece claro, por tanto, que la diagonal elegida debe partir del mayor ángulo del cuadrilátero. Este criterio es más general que el de la diagonal corta, coincidiendo con él en la mayoría de los casos.

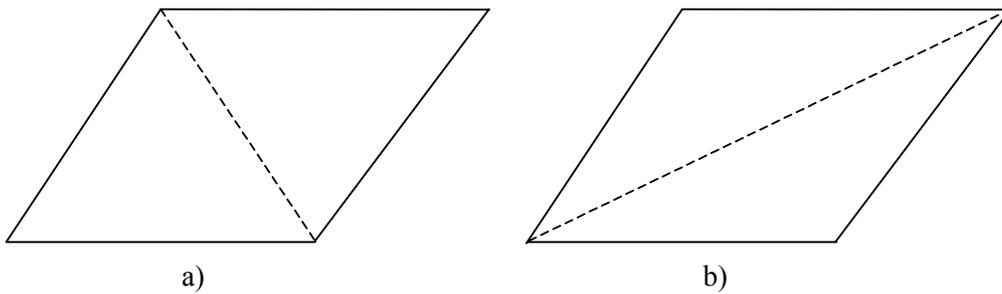


Figura 2.1. División de un cuadrilátero en dos triángulos: a) por la diagonal corta, b) por la diagonal larga

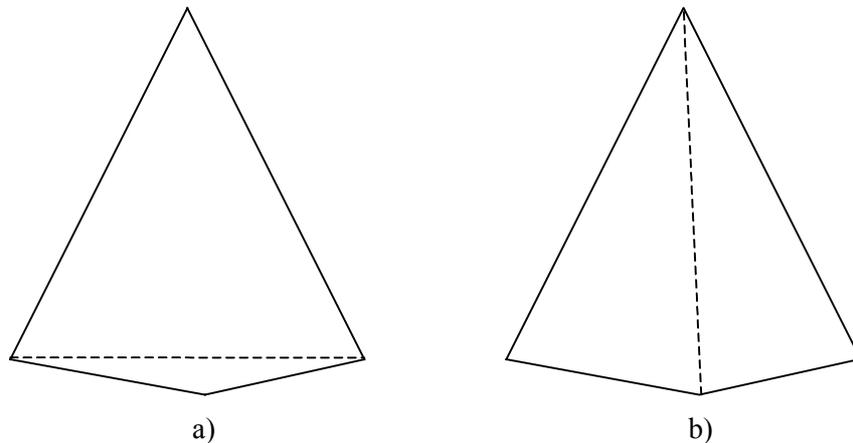


Figura 2.2. División de un cuadrilátero en dos triángulos: a) diagonal corta, b) diagonal larga

2.2. Áreas Cuadriláteras

Desde el punto de vista de la sencillez de generación de malla, se pueden dividir las áreas cuadriláteras en dos grupos:

- Aquéllas que permiten la generación de una malla estructurada. Para que esto sea posible es necesario que el área que se pretende mallar presente el mismo número de divisiones o aristas en sus lados opuestos, de modo que sea posible generar una retícula.
- Aquéllas que requieren una malla no estructurada.

2.2.1. Malla Estructurada. Interpolación por Proyectores Transfinitos

Como primer paso en la generación de mallas estructuradas en cuadriláteros se ha desarrollado un generador de malla por intersección de rectas. Éste calcula la posición de los nodos interiores del área obteniendo las intersecciones entre las rectas que unen los nodos opuestos de los lados. Este método proporciona buenos resultados en cuadriláteros que presentan un contorno recto, como se puede apreciar en la figura 2.3. Sin embargo, para contornos irregulares, la malla generada presenta una baja calidad y, en muchas ocasiones, es errónea al crear elementos parcial o totalmente fuera del dominio de mallado, como muestra la figura 2.4.

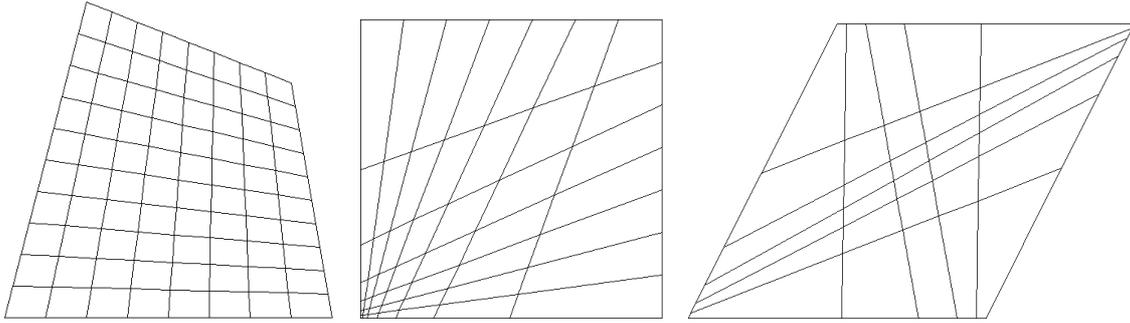


Figura 2.3. Mallas generadas mediante intersección de rectas en áreas cuadriláteras

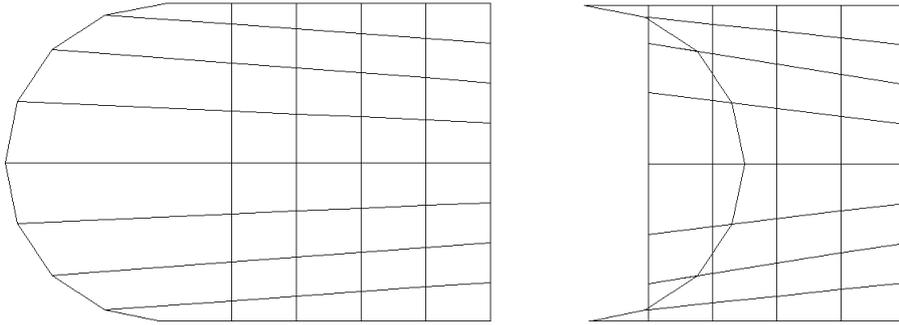


Figura 2.4. Mallas de deficiente calidad o incorrectas generadas mediante intersección de rectas en áreas cuadriláteras

Para conseguir buenos resultados frente a contornos irregulares es necesario contar con una función de interpolación que tenga presente la posición de los nodos del contorno a la hora de generar los nodos interiores. Para este cometido se ha elegido una función de interpolación por proyectores transfinitos.

Sean Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 y Ψ_4 las funciones paramétricas de cada lado del cuadrilátero (cada una de ellas con dos valores, las coordenadas x,y , para cada argumento), y u,v sus coordenadas naturales (figura 2.5) que se definen como:

$$u, v = \frac{j}{n} \quad (2.1)$$

donde $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, siendo n el número de divisiones de la línea.

Se definen los proyectores transfinitos como:

$$\Gamma_1(u, v) = (1-v)\Psi_1(u) + v\Psi_2(u) \quad (2.2)$$

$$\Gamma_2(u, v) = (1-u)\Psi_3(v) + u\Psi_4(v) \quad (2.3)$$

Se puede comprobar fácilmente que el primero coincide con Ψ_1 en $v=0$ y con Ψ_2 en $v=1$. Asimismo, $\Gamma_2 = \Psi_3$ en $u=0$ y $\Gamma_2 = \Psi_4$ en $u=1$.

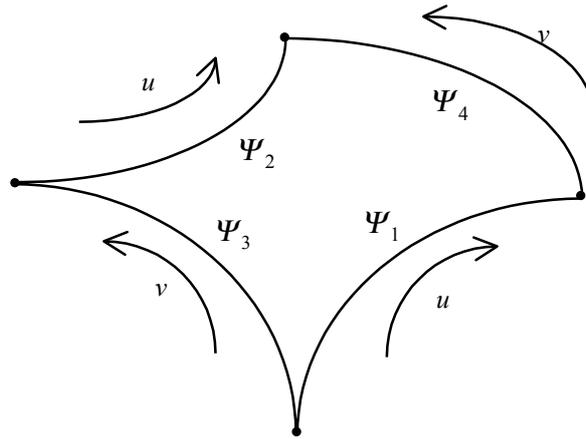


Figura 2.5. Funciones y coordenadas naturales de las líneas en un cuadrilátero

La función de interpolación es la suma de estos dos proyectores, pero será necesario restar a ésta los términos comunes para que coincida con el contorno. Tras esta operación, la función resultante es:

$$\Gamma(u,v) = (1-v)\Psi_1(u) + v\Psi_2(u) + (1-u)\Psi_3(v) + u\Psi_4(v) - (1-u)(1-v)\Psi_1(0) - (1-u)v\Psi_2(0) - u(1-v)\Psi_4(0) - uv\Psi_4(1) \quad (2.4)$$

Los nodos generados con esta función son las intersecciones de las curvas $u=cte$ y $v=cte$. Los pasos que se siguen para la generación completa de la malla son los siguientes:

1. Generación de los nodos internos del área mediante la función de interpolación $\Gamma(u,v)$. Existen dos casos en que no se producirá esta generación, como se puede observar en las figuras 2.6 y 2.7:
 - Cuando los cuatro lados del cuadrilátero tienen una sola división. En este caso, si se pretende realizar un mallado con cuadriláteros únicamente, tampoco se generarán aristas, tan sólo un elemento cuadrilátero. Si el mallado se realiza con triángulos, se creará una arista y dos elementos.
 - Cuando un par de lados enfrentados tienen una sola división. En este caso, se crearán tanto aristas como elementos.
2. Generación de las aristas interiores.
3. Generación de los elementos.

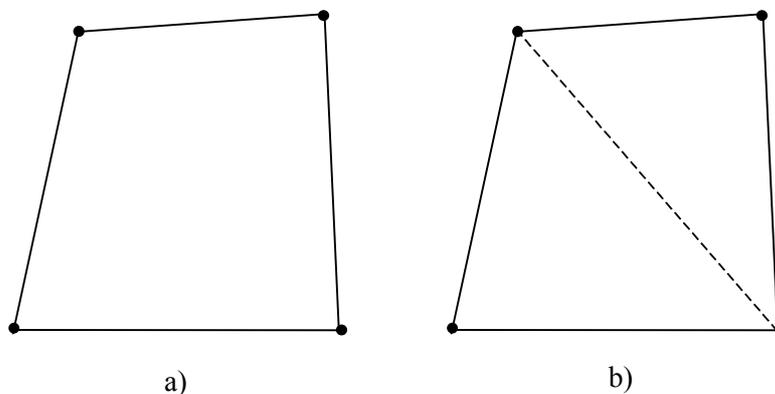


Figura 2.6. Cuadrilátero con una división por lado: a) mallado con cuadriláteros, b) mallado con triángulos

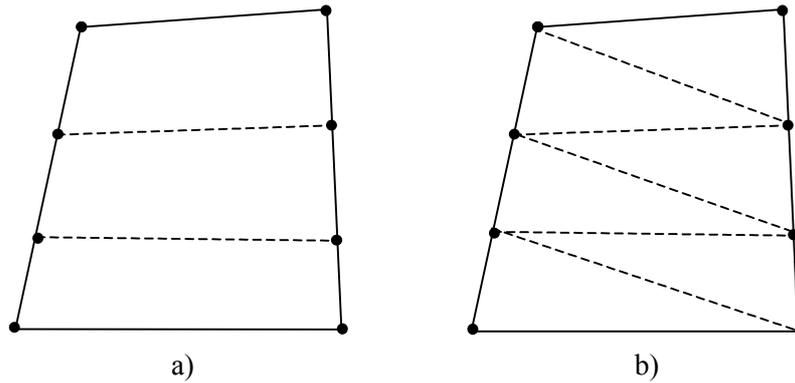


Figura 2.7. Cuadrilátero con un par de lados enfrentados con una división: a) mallado con cuadriláteros, b) mallado con triángulos

En general, si n es el número de divisiones de un par de lados y m el del otro par, la rutina de mallado por interpolación o, en general, cualquier método de generación de malla estructurada, creará los siguientes nodos, aristas y elementos en el interior del cuadrilátero:

- Mallado con cuadriláteros:

$$\text{nodos} = (n-1)(m-1) \quad (2.5)$$

$$\text{aristas} = n(m-1) + m(n-1) = 2nm - n - m \quad (2.6)$$

$$\text{elementos cuadriláteros} = nm \quad (2.7)$$

- Mallado con triángulos:

$$\text{nodos} = (n-1)(m-1) \quad (2.8)$$

$$\text{aristas} = n(m-1) + m(n-1) + nm = 3nm - n - m \quad (2.9)$$

$$\text{elementos triangulares} = 2nm \quad (2.10)$$

Siguiendo con las relaciones entre nodos, aristas y elementos, se ha podido comprobar que los componentes generados en el interior de un área cualquiera que no presente huecos en su interior, independientemente del mallado utilizado y de la discretización de su contorno, cumplen la siguiente relación:

$$\text{aristas} = \text{nodos} + \text{elementos} - 1 \quad (2.11)$$

que es fácilmente demostrable tanto para mallas estructuradas como para no estructuradas, pudiendo emplear en este último caso un método de demostración por inducción.

A continuación se muestran algunos resultados para los dos tipos de mallado (cuadriláteros y triángulos) obtenidos con esta técnica mediante la función de interpolación (2.4). Se puede observar en la figura 2.8 que, frente a contornos uniformes, se obtienen idénticos resultados a los del mallador por intersección de rectas. En el ejemplo de área cuadrilátera con discretización del contorno no uniforme de la figura 2.9 se puede apreciar, si se compara con el resultado del método de intersección de rectas de la figura 2.3, cómo algunos elementos mejoran su regularidad mientras otros la empeoran ligeramente. Sin embargo, en otro ejemplo de discretización de contorno no uniforme (figura 2.10) la mejora de regularidad de los elementos es general. Donde se demuestra la potencia del interpolador por proyectores transfinitos es frente a contornos irregulares, donde se consigue una adaptación de la malla al contorno, como se observa en las figuras 2.11-2.14.

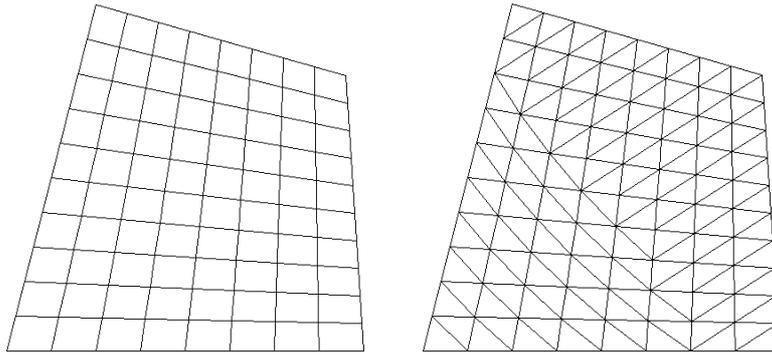


Figura 2.8. Cuadrilátero con discretización uniforme. Mallas cuadrilátera y triangular

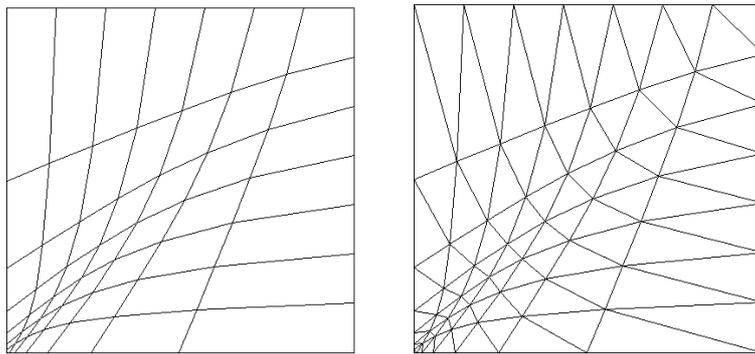


Figura 2.9. Cuadrilátero con dos de sus lados discretizados geoméricamente. Mallas cuadrilátera y triangular

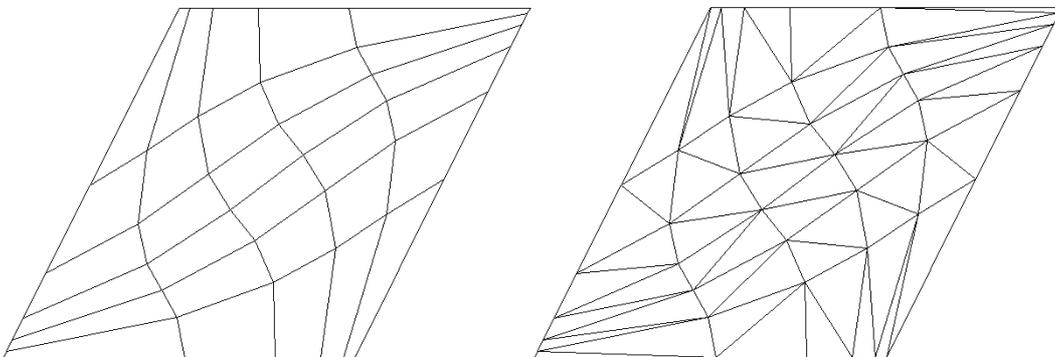


Figura 2.10. Cuadrilátero con discretización de su contorno no uniforme. Mallas cuadrilátera y triangular

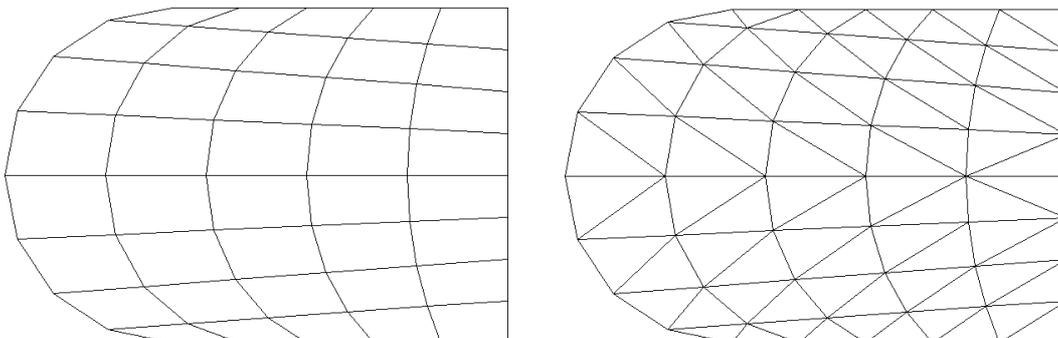


Figura 2.11. Cuadrilátero convexo con un lado curvo. Mallas cuadrilátera y triangular

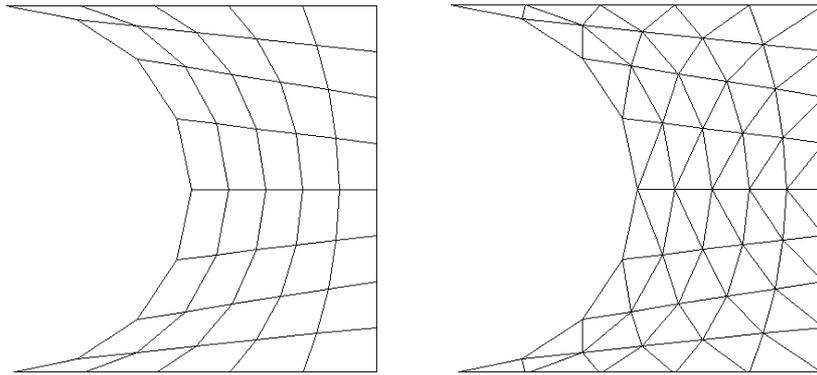


Figura 2.12. Cuadrilátero cóncavo con un lado curvo. Mallas cuadrilátera y triangular

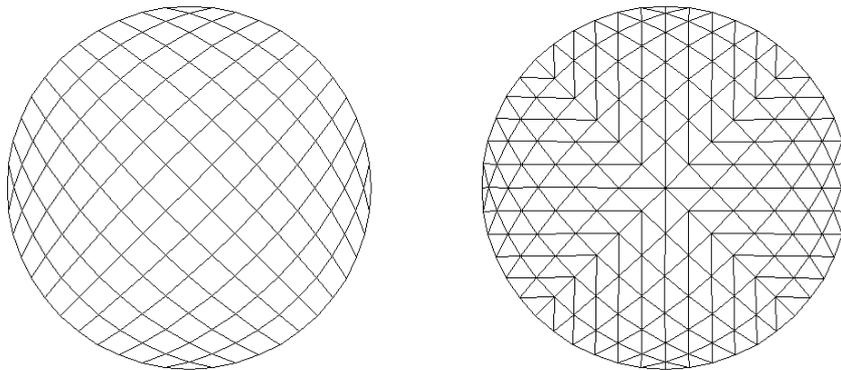


Figura 2.13. Círculo definido como un cuadrilátero. Mallas cuadrilátera y triangular

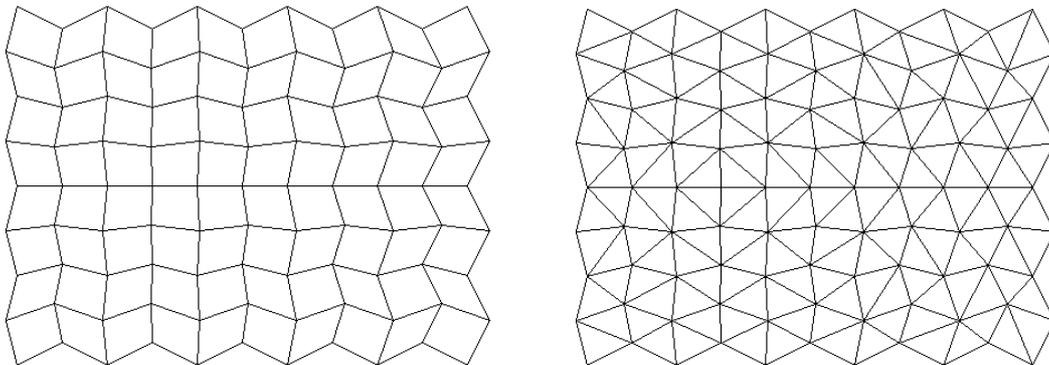


Figura 2.14. Cuadrilátero de contorno irregular. Mallas cuadrilátera y triangular

Se han probado otros proyectores distintos a los lineales, pero, en general, los resultados obtenidos con ellos han sido erróneos, es decir, se generan nodos fuera del dominio, o de mala calidad. De ellos, el que mejor se comporta es el cuadrático. La función de interpolación en este caso es:

$$\Gamma(u, v) = (1 - v^2)\Psi_1(u) + v^2\Psi_2(u) + (1 - u^2)\Psi_3(v) + u^2\Psi_4(v) - (1 - u^2)(1 - v^2)\Psi_1(0) - (1 - u^2)v^2\Psi_2(0) - u^2(1 - v^2)\Psi_4(0) - u^2v^2\Psi_4(1) \quad (2.12)$$

Se pueden observar algunos resultados obtenidos con él en la figura 2.15. Comparándolos con los anteriores comprobamos que la calidad de éstos es similar, aunque en algunos casos empeora.

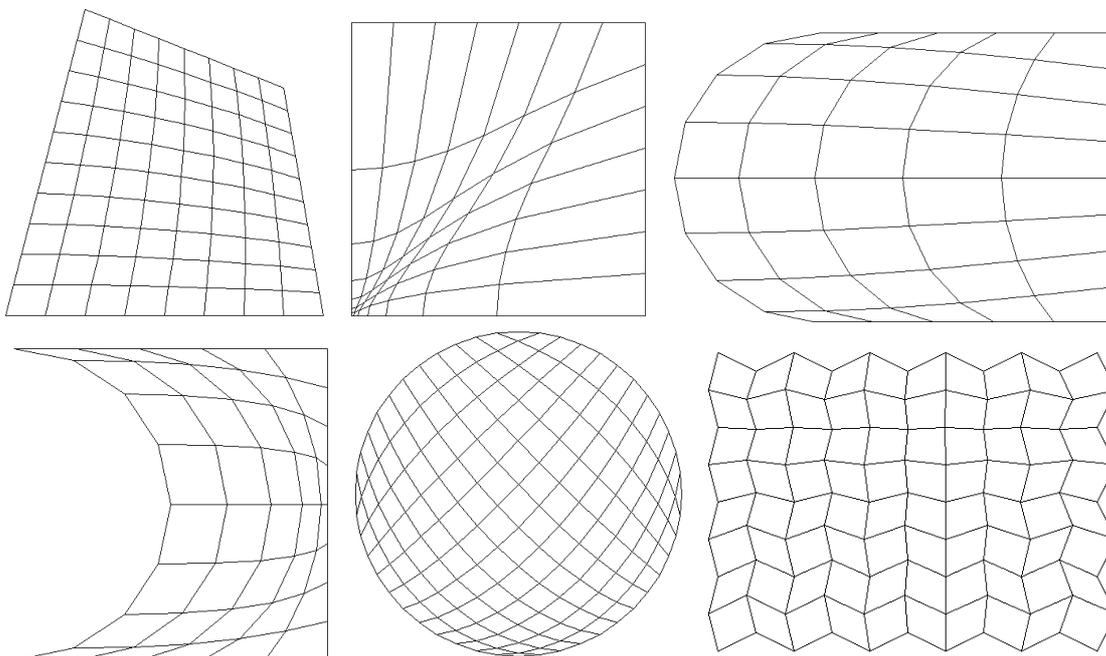


Figura 2.15. Mallas generadas con interpolación cuadrática

2.2.2. Malla No Estructurada en Cuadriláteros Rectilíneos. Frente de Avance Rápido

El discretizador estudiado en el punto anterior no puede generar mallas en cuadriláteros cuyos lados enfrentados no tengan el mismo número de divisiones, pues, en ese caso, no es posible trazar una retícula que una los nodos del contorno. Para estos casos se ha desarrollado un nuevo método que ha sido denominado Frente de Avance Rápido (FAR), pues sigue una filosofía parecida a la de los métodos de frente de avance, pero presenta un coste computacional muy inferior a éstos.

En los malladores por interpolación, la generación de los componentes de la malla se realiza por pasos: en primer lugar los nodos, posteriormente las aristas y, por último, los elementos. En el método FAR, sin embargo, los componentes se van generando a la vez, es decir, en cada paso del algoritmo se crean los nodos, aristas y elementos, con lo cual la malla va creciendo desde el punto de partida hasta que el área está completamente discretizada.

La ventaja de este método sobre otros de frente de avance es su rapidez (como se verá cuando se analicen los resultados), ya que presenta un coste computacional similar al del interpolador. El precio que se paga por esta mejora en la velocidad de generación de la malla es la pérdida de generalidad, ya que el método FAR, en su versión básica, es específico para áreas cuadriláteras, mientras que los métodos de frente de avance clásicos permiten la discretización de geometrías arbitrarias.

Antes de pasar a la descripción del algoritmo vamos a comentar someramente en qué consiste. En la figura 2.16 se muestra en un ejemplo sencillo cómo el algoritmo, partiendo de uno de los lados del cuadrilátero, va evolucionando hasta completar la malla. En cada paso se crea una recta desde un lado que forma esquina con el elegido como lado de partida hasta el que

tiene enfrente, se generan nodos y aristas sobre ella, posteriormente se unen los nodos de ésta con los de la recta inferior mediante aristas y se crean los elementos que éstas forman (figura 2.16a y 2.16b). Este proceso se repite hasta que el área queda completamente discretizada (figura 2.16c), bien con una malla mixta (línea continua), bien con una triangular (línea discontinua). Esta idea inicial, que se presta a ser implementada mediante un algoritmo iterativo, resulta insuficiente para abarcar la gran cantidad de casos que se pueden presentar y, como se verá en la descripción detallada del método, es modificada ampliamente, hasta el punto de convertirse en una rutina recursiva.

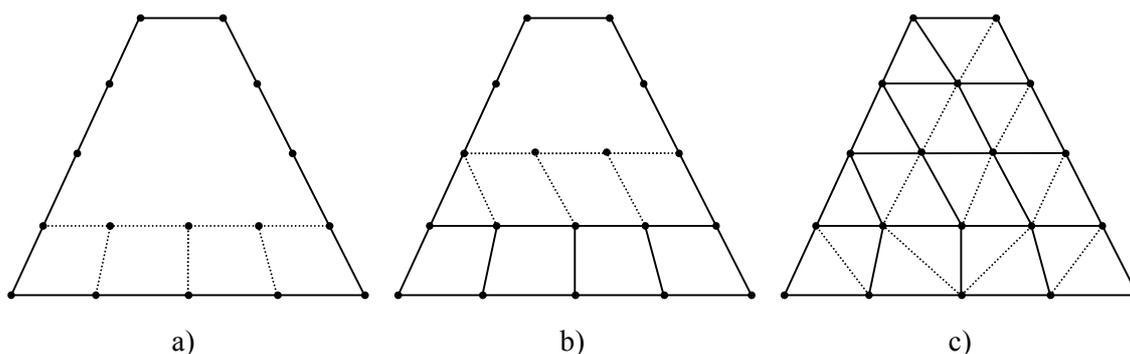


Figura 2.16. Generación de malla (mixta y triangular) mediante el método FAR

La idea básica del algoritmo consiste en dividir el cuadrilátero en otros dos, de los cuales uno tendrá, al menos, un lado con una sola división. Sobre cada uno de estos cuadriláteros se ejecuta de nuevo el algoritmo de modo recursivo. Cada una de las ramas creadas por la recursividad finaliza cuando en el cuadrilátero en cuestión se pueda generar una malla estructurada, es decir, cuando tenga el mismo número de divisiones en sus lados opuestos, cuando tenga dos lados enfrentados con una sola división (a estos casos los denominaremos *casos simples*), o cuando no pueda ser dividido en otros dos cuadriláteros por el método habitual (estos casos se denominarán *casos críticos*). En estas circunstancias se ejecuta la rutina de mallado por interpolación, la de tratamiento de casos simples o la de tratamiento de casos críticos, respectivamente, y esa rama recursiva finaliza. De los dos últimos casos nos ocuparemos en los apartados 2.2.2.2 y 2.2.2.3.

2.2.2.1. División del Cuadrilátero

La división del cuadrilátero presenta una serie de cuestiones que deben ser resueltas de forma que la malla resultante tenga una calidad aceptable. Estas cuestiones son:

- ¿Que lado se elige como *lado matriz*? Se entiende por lado matriz aquél que marca la dirección de avance del frente de mallado. A este lado lo denominaremos $l1$, y a los restantes $l2$, $l3$ y $l4$. El cuadrilátero al que pertenece $l1$ se denomina $c1$. Esta nomenclatura se presenta en la figura 2.17.
- ¿Qué nodos del contorno une la recta $l6$ divisoria del cuadrilátero? O, dicho con otras palabras, ¿qué nodos definen los lados $l5$, $l6$ y $l7$?
- ¿Cuántas divisiones debe tener la recta divisoria?
- ¿Cómo se distribuyen los nodos sobre ella?

A continuación se describe cómo responde el método FAR a estas preguntas.

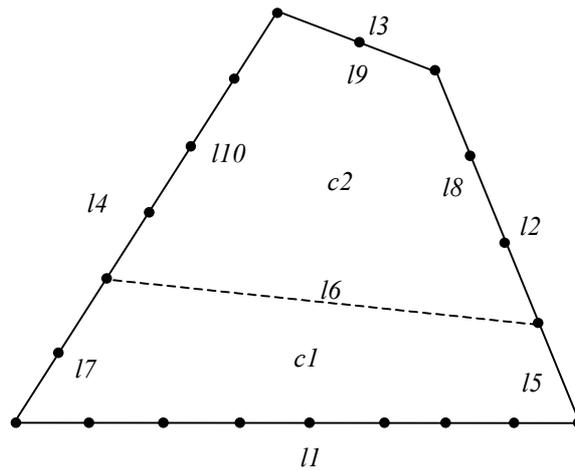


Figura 2.17. Nomenclatura para el cuadrilátero inicial y los dos en que éste se divide

A la hora de elegir el lado $l1$, se debe procurar que los lados $l2$ y $l4$ tengan un número de divisiones lo más parecido posible para que, cuando se trace la recta divisoria ($l6$), los lados $l5$ y $l7$, por una parte, y $l8$ y $l10$, por otra, no presenten una gran diferencia en su número de divisiones, pues estas situaciones suelen conducir a casos críticos, los cuales, en general, generan elementos más irregulares que el resto de casos. Las pruebas realizadas corroboran este planteamiento. Por tanto, según este criterio, el lado $l1$ pertenecerá al par de lados enfrentados del cuadrilátero que presenten una mayor diferencia en el número de divisiones. De estos dos lados se elegirá como matriz aquél con mayor número de divisiones. De esta forma se simplifica la rutina de tratamiento de los casos simples.

Una vez elegido el lado matriz, se debe crear la recta que divide los lados $l2$ y $l4$ en $l5$, $l8$, y en $l7$, $l10$, respectivamente. Dado que el cuadrilátero $c1$ debe tener al menos un lado con una sola división, al menos uno de los extremos de la recta debe estar a una “distancia” de una división de uno de los extremos de $l1$. Por tanto, aquél de los lados que debe intersectar $l6$ ($l2$ ó $l4$) que presente un número de divisiones menor se dividirá en dos, uno de ellos con una sola división. Podría parecer interesante que el otro extremo de $l6$ estuviera también a una “distancia” de una división del extremo de $l1$, pues así se conseguiría un cuadrilátero $c1$, bien mallable por interpolación, bien perteneciente a un caso simple. Sin embargo, este criterio conduce a una pérdida de calidad en la malla, pues el cuadrilátero $c2$ mantendría la misma diferencia en el número de divisiones de sus lados que presentaba el cuadrilátero del que proviene, y esta circunstancia conduce, en general, a casos críticos. La solución que se ha adoptado es repartir el exceso de divisiones que tenga un lado respecto a otro en cada paso. En la figura 2.18 se muestra la aplicación de este criterio a un caso sencillo.

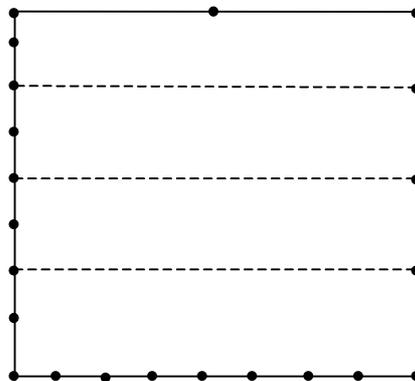


Figura 2.18. Reparto del exceso de divisiones respecto al lado opuesto en la creación de la recta divisoria

Si llamamos l_{min} al lado con menor número de divisiones (12 en nuestro ejemplo) y l_{max} al opuesto (14), y siendo $n(l_{min})$ y $n(l_{max})$ el número de divisiones de cada uno de ellos, el número de divisiones de l_{max} que habrá que incluir en $c1$ será el entero más próximo a $\frac{n(l_{max})}{n(l_{min})}$

Como alternativa a esta solución se pensó en un criterio geométrico a la hora de decidir las divisiones que había que tomar de l_{max} . Éste consiste en calcular la longitud de la proyección de la primera división de l_{min} sobre la perpendicular al lado $l1$ y compararla con las correspondientes a las proyecciones de las primeras divisiones de l_{max} , eligiendo aquel número de divisiones cuya proyección más se aproxime a la de la primera división de l_{min} (figura 2.19). Este procedimiento intenta crear cuadriláteros con divisiones de similar tamaño y asume que el usuario discretizará el contorno con un tamaño parecido en cada división. Esta suposición, en general, no será cierta, pues, dependiendo del problema, puede interesar discretizar las líneas con distintos tamaños de división. Además de esto, la complicada gestión que requiere este criterio y la pobre calidad de los resultados obtenidos (en la figura 2.20 se comparan este criterio y el anterior) desaconsejan su utilización.

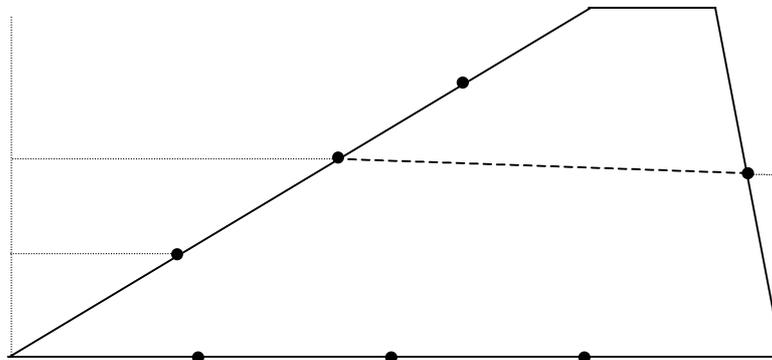


Figura 2.19. Criterio geométrico para el cálculo de $n(l_{max})$

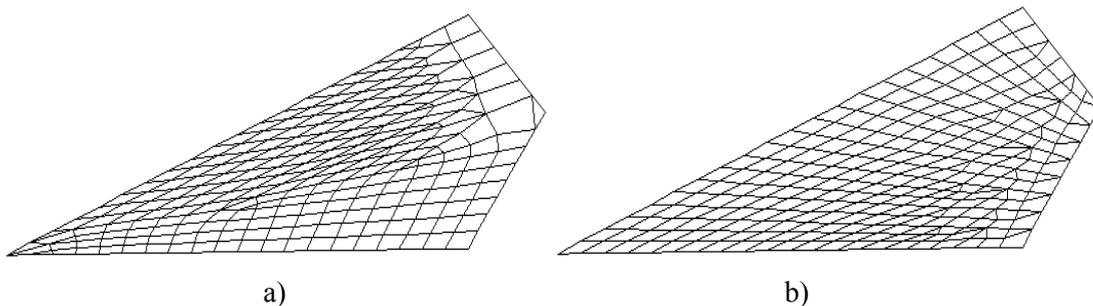


Figura 2.20. Resultados con el criterio geométrico (a) y con el basado en el número de divisiones (b)

Una vez conocida la recta divisoria hay que dividirla en aristas. Para ello es necesario conocer, en primer lugar, el número de divisiones y, en segundo, cómo se distribuyen los nodos a lo largo de ella. El número de divisiones se obtiene calculando la media ponderada de las divisiones de $l1$ y $l3$. La ponderación se realiza según la distancia (en divisiones de l_{min}) a que se encuentre la recta de los lados $l1$ y $l3$. En concreto, llamando $n(l1)$ y $n(l3)$ al número de divisiones de $l1$ y $l3$, se tomará el número entero más próximo a:

$$\frac{n(l_{min})-1}{n(l_{min})}n(l1) + \frac{1}{n(l_{min})}n(l3) \quad (2.13)$$

Así se consigue una variación gradual, sin saltos bruscos en el número de nodos, desde $n(l1)$ hasta $n(l3)$.

En cuanto a la distribución de los nodos sobre la recta, si nos limitáramos a discretizaciones del contorno uniformes, bastaría con equiespaciarnos a lo largo de ella. Sin embargo, el algoritmo debe ser capaz de mallar también dominios con discretización del contorno rectilínea no uniforme. Para ello será necesario repetir el patrón que presente $l1$, teniendo en cuenta que, posiblemente, el número de divisiones sobre la recta puede ser menor. En esos casos, y según la diferencia entre el número de divisiones de $l1$ y $l6$, se eliminarán del patrón de distribución, los nodos más próximos a los extremos. Es decir, si la diferencia es 1, se elimina el nodo más próximo a l_{min} ; si es 2, el anterior y el más próximo a l_{max} ; si es 3, los anteriores y el segundo más próximo a l_{min} , y así sucesivamente. En la figura 2.21 se contemplan algunos casos.

Una vez dividido el cuadrilátero en dos ($c1$ y $c2$) se vuelve a aplicar el algoritmo sobre cada uno de éstos sucesivamente hasta que el área quede completamente mallada. Al comienzo de este apartado se comentó la existencia de tres casos que no requerían o no admitían la división que contempla el método. El primero de ellos, la generación de mallas estructuradas mediante interpolación, ya se comentó en el apartado 2.2.1. A continuación se analizan los otros dos casos.

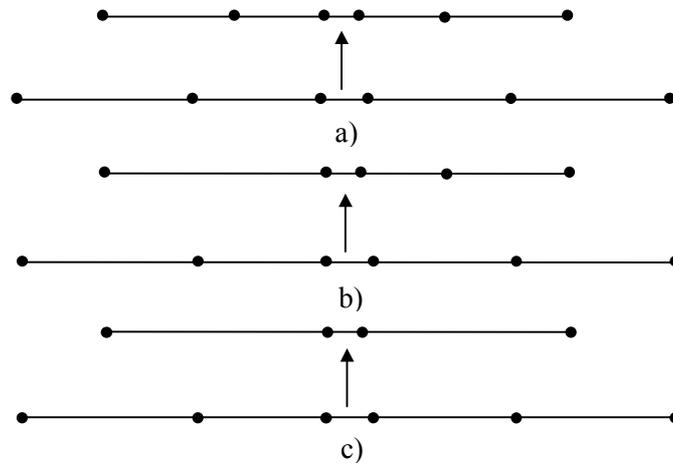


Figura 2.21. Réplica de patrones de distribución de nodos: a) mismas divisiones, b) una división menos, c) dos divisiones menos

2.2.2.2. Casos Simples

Si llamamos vector de divisiones a aquél que contiene las divisiones de cada uno de los lados consecutivos del cuadrilátero, esto es, $(n(l1), n(l2), n(l3), n(l4))$, los casos simples serán aquéllos que presenten un vector de divisiones de la forma $(N, 1, M, 1)$, con $N > M$. Es decir, aquéllos con una sola división en dos lados enfrentados y que presentan en el otro par distinto número de divisiones. Estos casos no requieren la generación de nodos, únicamente la creación de las aristas que unan los nodos de $l1$ y $l3$ y de los elementos que éstas delimiten. Para ello, se unen los nodos próximos a los extremos de $l1$ con el extremo correspondiente de $l3$ de forma alternativa, de modo que resulta imprescindible la aparición de elementos triangulares, hasta que $l1$ y $l3$ presenten el mismo número de nodos libres, con lo que se puede finalizar el mallado

del cuadrilátero por el método de interpolación (aunque en este caso dicho método sólo genere aristas y elementos). La generación de elementos triangulares implica que la discretización final sea una malla mixta, con elementos cuadriláteros y triangulares (eso sí, minimizando el número de estos últimos) o una malla triangular (si se opta por descomponer los cuadriláteros en dos triángulos). En cualquier caso, no se pueden obtener mallas cuadriláteras, como ocurría en la generación de mallas estructuradas.

En la figura 2.22 se presentan los patrones de los casos más habituales. Como se puede apreciar, la calidad de los triángulos laterales va empeorando conforme va aumentando la diferencia en el número de divisiones, pero, en general, es poco probable que se den situaciones con una diferencia mayor que tres o cuatro, pues, como se comentaba anteriormente, el cálculo de divisiones de $l6$ se hace de modo ponderado para que no se produzcan saltos importantes. Más adelante se presentan ejemplos de cuadriláteros con una gran diferencia en el número de divisiones de sus lados y con una calidad de malla aceptable.

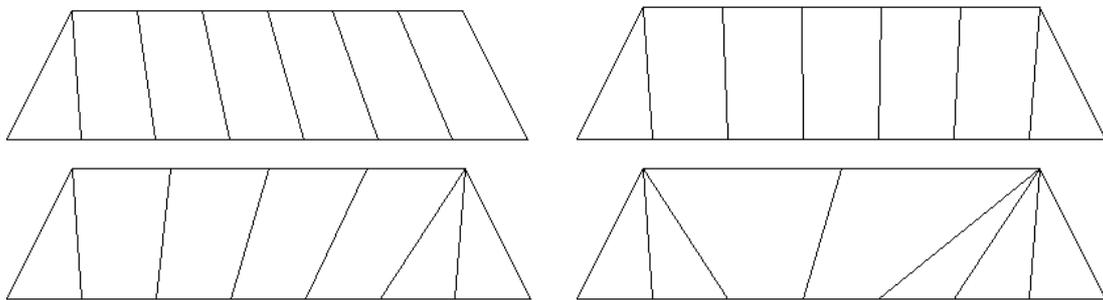


Figura 2.22. Patrones para distintos casos simples

2.2.2.3. Casos Críticos

Como se ha comentado anteriormente, dentro de este apartado se incluyen aquellos cuadriláteros que no pueden ser divididos en otros dos por el método habitual. Existen casos que, si nos atenemos al método de división tal y como se ha explicado, pueden parecer críticos y, en realidad, no serlo. Por ejemplo, sea el cuadrilátero con un vector de divisiones (8, 1, 3, 4) de la figura 2.23. En él se ha elegido como lado matriz el de 8 divisiones, pues es el mayor del par que presenta una mayor diferencia en el número de divisiones. Sin embargo, la división de este cuadrilátero en dos es imposible porque el lado $l2$ tiene una sola división. Si se elige como lado matriz el enfrentado al de una división sí será posible generar dos cuadriláteros a partir de él (figura 2.24). Por tanto, en los casos en que uno de los lados presente una sola división y los demás más, se debe tomar como lado $l1$ el opuesto al de una división.

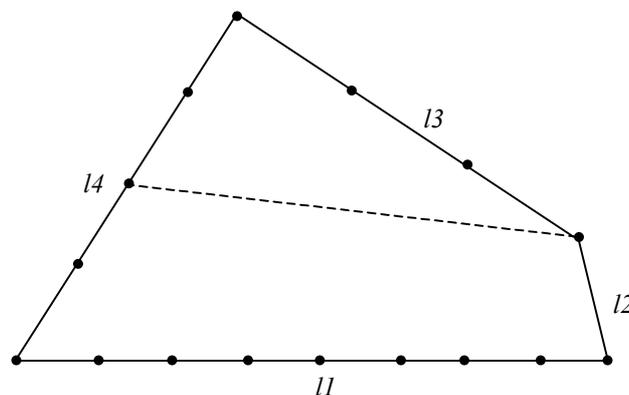
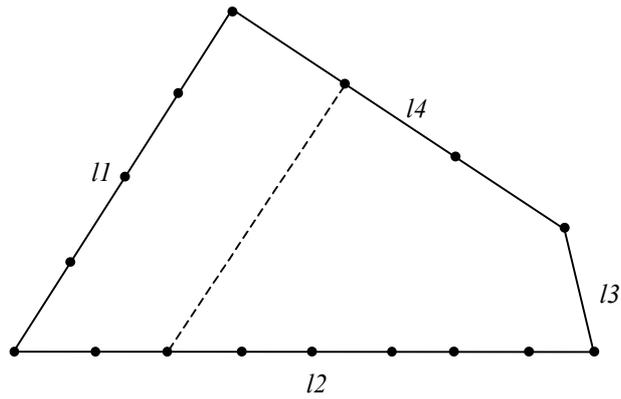


Figura 2.23. Elección de $l1$ errónea: no se pueden formar dos cuadriláteros

Figura 2.24. Elección de 11 correcta

Concretando, podemos decir que son cuadriláteros críticos aquéllos que presentan dos lados contiguos (esto es, con un vértice común) con una sola división. Si presenta tres lados con esa característica nos encontraremos ante un caso simple. Los cuadriláteros críticos requieren un tratamiento específico dependiendo del número de divisiones que presenten los otros dos lados. Conforme éstas van aumentando, resulta más difícil obtener un mallado de calidad. Afortunadamente, es muy improbable llegar a situaciones que presenten una gran diferencia en el número de divisiones (en la figura 2.29 se puede observar cómo un cuadrilátero con un vector de divisiones (20, 4, 4, 20) sólo presenta casos críticos, como mucho, de (2, 1, 1, 2)).

Los patrones de mallado elegidos para estos casos y mostrados en la figura 2.25 tratan de generar elementos con la mayor regularidad posible.

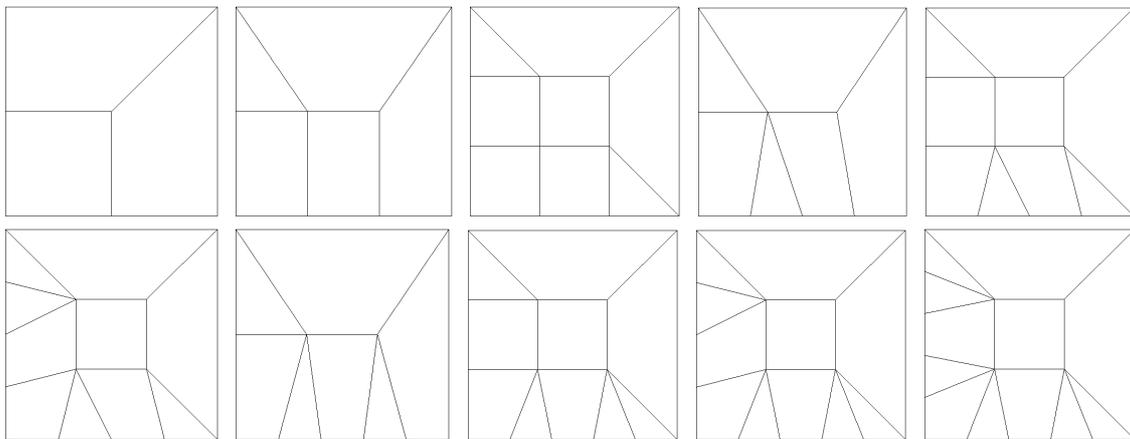


Figura 2.25. Patrones de mallado para distintos casos críticos

2.2.2.4. Resultados

Para finalizar el apartado referido al método FAR, se presentan a continuación algunos resultados obtenidos con esta técnica en áreas cuadriláteras de lados rectos. Los cuadriláteros de las figuras 2.26-2.30 presentan una discretización del contorno uniforme. Se observa en las figuras 2.27 y 2.28 que, en general, al aumentar la irregularidad del área disminuye la calidad de su discretización. Especial atención merecen los casos de las figuras 2.29 y 2.30. Éstos presentan una gran diferencia en el número de divisiones de sus lados y conducen a diferentes casos críticos. Puede observarse que el método se encarga de que la gran diferencia inicial se

vaya reduciendo, llegando a cuadriláteros críticos con diferencias de divisiones pequeñas que generan resultados aceptables.

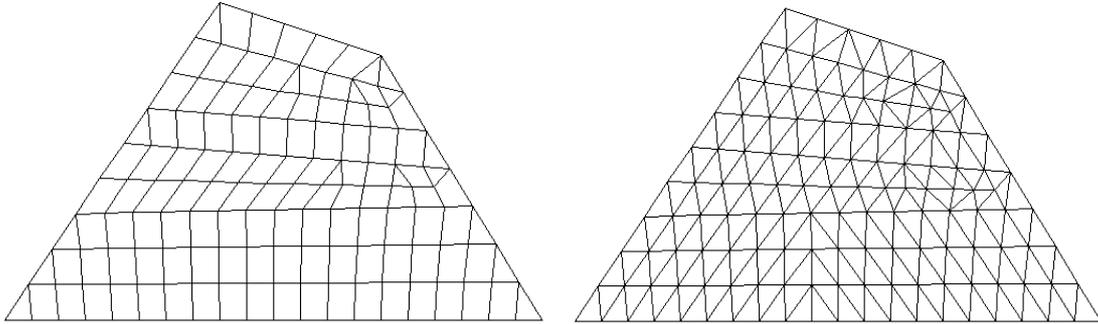


Figura 2.26. Mallas mixta y triangular generadas con el método FAR

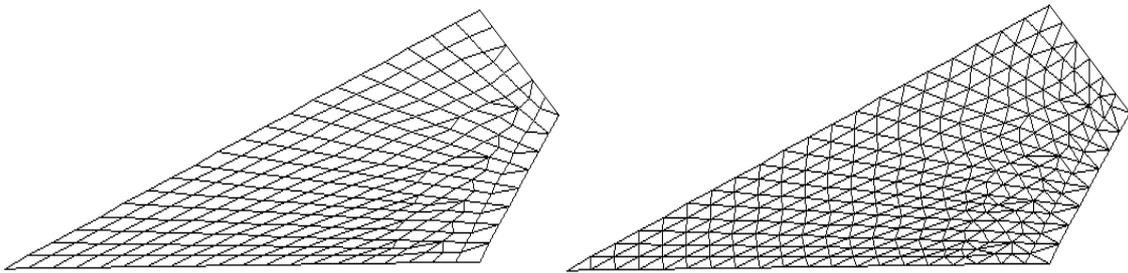


Figura 2.27. Mallas mixta y triangular generadas con el método FAR

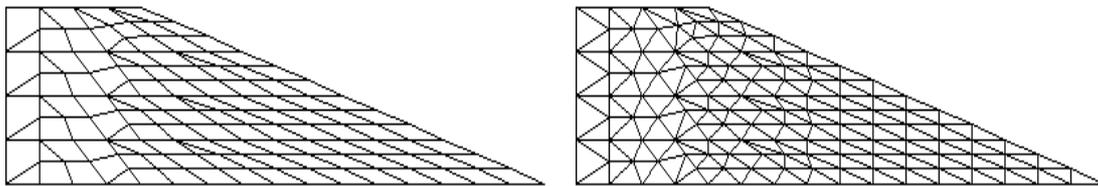


Figura 2.28. Mallas mixta y triangular generadas con el método FAR

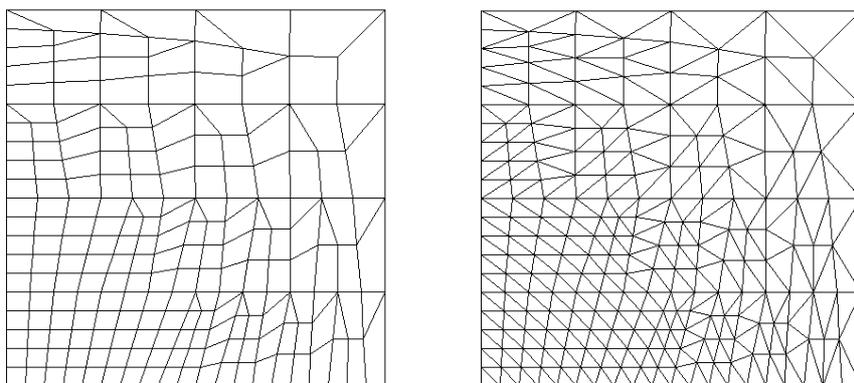


Figura 2.29. Mallas mixta y triangular generadas con el método FAR

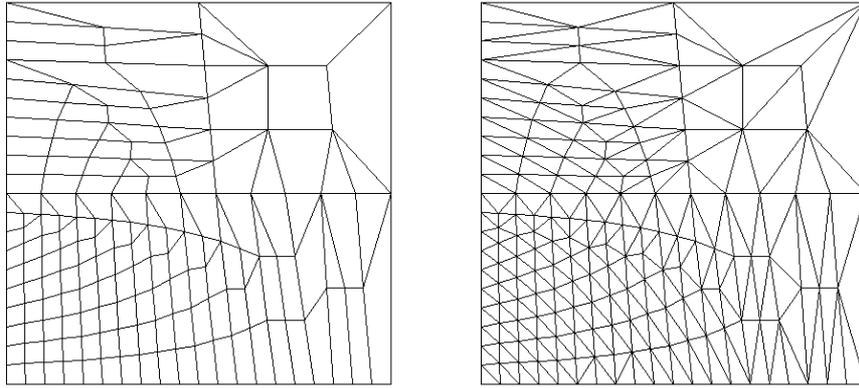


Figura 2.30. Mallas mixta y triangular generadas con el método FAR

2.2.3. Malla No Estructurada en Cuadriláteros Arbitrarios. Frente de Avance Rápido Generalizado

El método generador de malla descrito en el punto anterior presenta un comportamiento correcto para dominios cuadriláteros que presenten sus cuatro lados rectos. Sin embargo, cuando estas líneas presentan una discretización curva o, en general, irregular, la malla generada con el método FAR no se ajusta al contorno correctamente. En la figura 2.31 se puede apreciar este fenómeno.

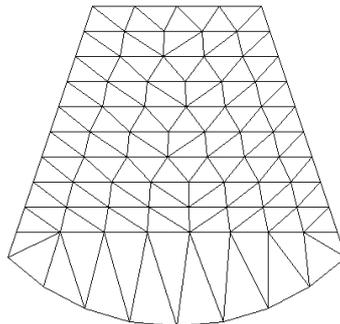


Figura 2.31. Malla generada por el método FAR en un cuadrilátero no rectilíneo

Este mal comportamiento para contornos irregulares se debe a que los nodos interiores del área se generan en cada paso del algoritmo a lo largo de una recta y, por lo tanto, la irregularidad del contorno no se traslada a la malla.

Para solucionar este problema se ha desarrollado un nuevo algoritmo donde la generación de los nodos de la malla en cada paso del método FAR se realiza mediante un interpolador lineal como el descrito en el punto 2.2.1, de modo que los nodos internos son generados teniendo en cuenta la posición de los nodos del contorno. A este método se le ha denominado Frente de Avance Rápido Generalizado (FARG). El problema que plantea esta nueva estrategia es la condición que imponen los métodos interpoladores para áreas cuadriláteras: los lados opuestos del cuadrilátero deben tener el mismo número de divisiones. Es decir, en cada paso del FARG, a la hora de generar los nodos, se ha de cumplir esta condición. En la figura 2.32 se puede observar cómo se consigue esto para un caso sencillo (para situaciones más complejas la filosofía es la misma). Siguiendo el método FAR, se llega al punto en que se requiere una generación de nodos entre $n1$ y $n2$. Supongamos que el número de nodos que se deben crear, que será resultado de una media ponderada de los nodos de $l1$ y $l3$, es

dos. Para generar estos dos nodos mediante un interpolador será necesario que $l1$ y $l3$ tengan también dos nodos, sin contar los de los extremos. Los lados $l2$ y $l4$ no presentan ningún problema porque podemos suponer que tienen únicamente un nodo cada uno ($n2$ y $n1$, respectivamente), pues el resto de nodos intermedios de $l2$ y $l4$ no afecta a la generación de los nuevos.

Así pues, es necesaria una nueva discretización, pero sólo temporal, de los lados $l1$ y $l3$, tal como aparece en la figura 2.32b. La posición de estos nodos temporales en $l1$ y $l3$ se realiza interpolándolos de modo equiespaciado a lo largo de estos lados. En la figura 2.32b se observan los nodos $n3$ y $n4$ generados y cómo queda la malla en ese instante. Con el cuadrilátero superior que queda por mallar se actuará de un modo similar y recursivamente hasta que el dominio esté completamente discretizado (figura 2.32c).

En la figura 2.33 se presentan algunos resultados obtenidos con este generador. Se puede observar que el contorno no necesita cumplir las condiciones exigidas por un generador de mallas estructuradas.

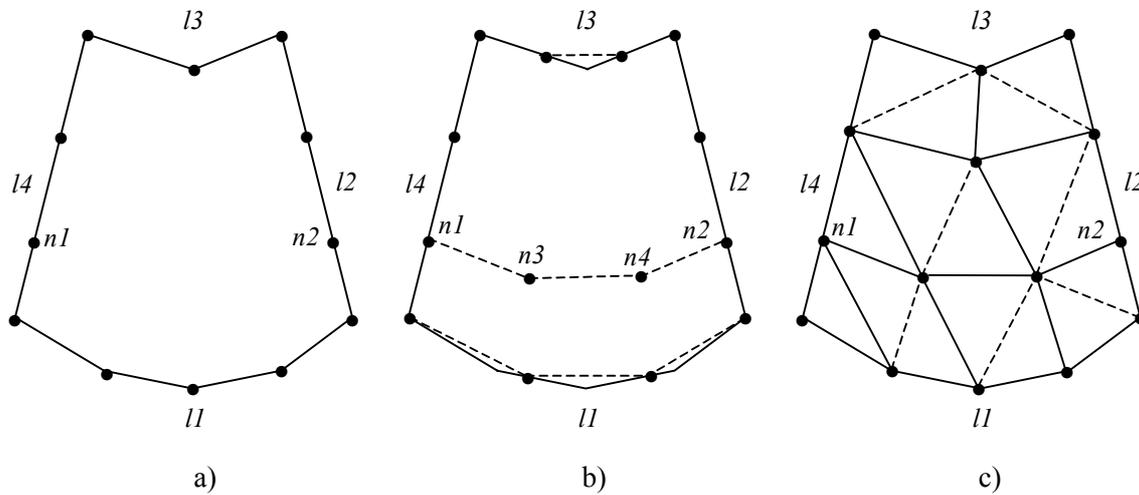


Figura 2.32. Método FARG para áreas cuadriláteras

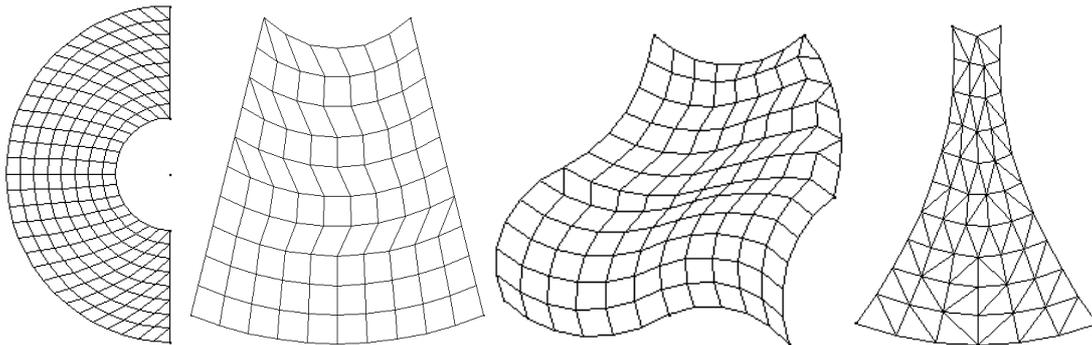


Figura 2.33. Mallas generadas con el método FARG en cuadriláteros

2.3. Áreas Triangulares

Una vez descritas las distintas técnicas de discretización desarrolladas para áreas cuadriláteras, a continuación se analiza la discretización de áreas triangulares. Como ocurría con el cuadrilátero, un área triangular permitirá una malla estructurada o no, dependiendo de la discretización de su contorno. En primer lugar se describe un generador de malla estructurada en triángulos basado en la interpolación por proyectores transfinitos, para, posteriormente,

analizar el caso general de malla no estructurada que, como se verá, hace uso del método FARG descrito en el punto anterior.

2.3.1. Malla Estructurada. Interpolación por proyectores Transfinitos

De un modo análogo al cuadrilátero, se puede aplicar una técnica de interpolación por proyectores transfinitos que, a partir de los datos del contorno, genere los nodos internos del área triangular. En este caso es necesario, para poder generar una discretización estructurada, que las tres líneas del triángulo presenten el mismo número de aristas.

La función de interpolación debe coincidir en el contorno con las funciones Ψ_1 , Ψ_2 y Ψ_3 , que definen la discretización de las líneas. Éstas vienen parametrizadas por sus coordenadas naturales u y v , ya definidas en (2.1), como indica la figura 2.34.

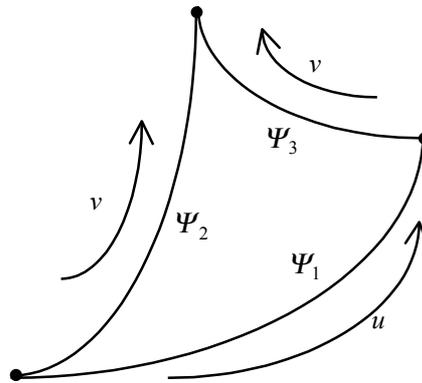


Figura 2.34. Definición del contorno del triángulo mediante funciones paramétricas

Se puede formar una función de interpolación con los siguientes proyectores:

$$\Gamma_1(u, v) = (1-v)\Psi_1(u) - u\Psi_1(1-v) \quad (2.14)$$

$$\Gamma_2(u, v) = (1-u)\Psi_2(v) - v\Psi_2(1-u) \quad (2.15)$$

$$\Gamma_3(u, v) = v\Psi_3(1-u) + u\Psi_3(v) \quad (2.16)$$

Es necesario añadir un cuarto término a la función de interpolación para ajustar ésta al contorno. Finalmente, la función queda:

$$\begin{aligned} \Gamma(u, v) = & (1-v)\Psi_1(u) - u\Psi_1(1-v) + (1-u)\Psi_2(v) - v\Psi_2(1-u) + \\ & + v\Psi_3(1-u) + u\Psi_3(v) - (1-u-v)\Psi_1(0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Se comprueba fácilmente que, en el contorno, la función de interpolación coincide con las funciones que definen la discretización de las líneas, es decir:

$$\Gamma(u, 0) = \Psi_1(u)$$

$$\Gamma(0, v) = \Psi_2(v)$$

$$\Gamma(u, v) = \Psi_3(v) = \Psi_3(1-u) \quad \text{en } u+v=1$$

En la figura 2.35 podemos ver que, de las tres esquinas del triángulo, dos forman elementos triangulares y una uno cuadrilátero. Interesa que la que presenta el mayor ángulo de las tres sea la que genere el elemento cuadrilátero, pues así se consiguen, en general, elementos más regulares en la malla (figura 2.36). Por tanto, se puede dividir el proceso en los siguientes pasos:

1. Cálculo de los tres ángulos del triángulo y elección de la esquina del mayor de ellos como aquella de la que parten las funciones Ψ_1 y Ψ_2 , es decir, aquella en que se generará un cuadrilátero (si se opta por el mallado mixto).
2. Generación de los nodos internos del área mediante la función de interpolación (2.17). Existen dos casos en que esta generación no se producirá:
 - Triángulos con una división en cada lado. En este caso tampoco se generarán aristas, simplemente un elemento triangular (figura 2.37a).
 - Triángulos con dos divisiones en cada lado. Se crearán tres aristas interiores y cuatro elementos triangulares en el mallado triangular (figura 2.37b), y dos aristas interiores, un elemento cuadrilátero y dos triangulares en el mallado mixto (figura 2.37c).
3. Generación de las aristas interiores.
4. Generación de los elementos.

En general, si n es el número de divisiones en cada lado, se crearán los siguientes nodos, aristas y elementos en el interior del triángulo:

- Mallado mixto:

$$\text{nodos} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (2.18)$$

$$\text{aristas} = n(n-1) \quad (2.19)$$

$$\text{elementos cuadriláteros} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (2.20)$$

$$\text{elementos triangulares} = n \quad (2.21)$$

$$\text{elementos} = \text{el. cuad.} + \text{el. triang.} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2.22)$$

- Mallado con triángulo:

$$\text{nodos} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (2.23)$$

$$\text{aristas} = \frac{3n(n-1)}{2} \quad (2.24)$$

$$\text{elementos triangulares} = n^2 \quad (2.25)$$

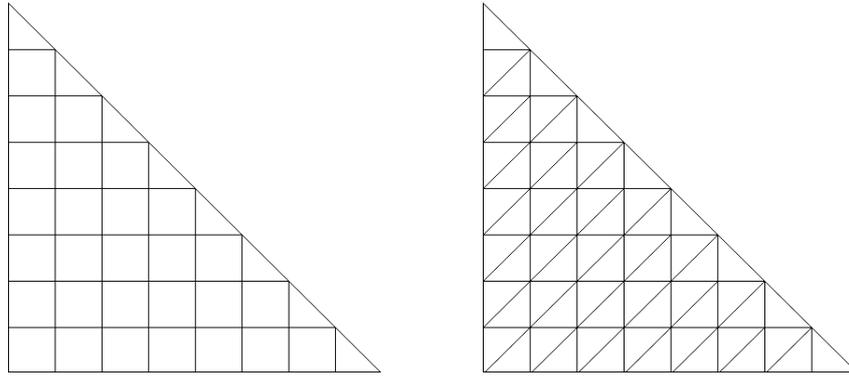


Figura 2.35. Triángulo con 8 divisiones por lado. Mallas mixta y triangular

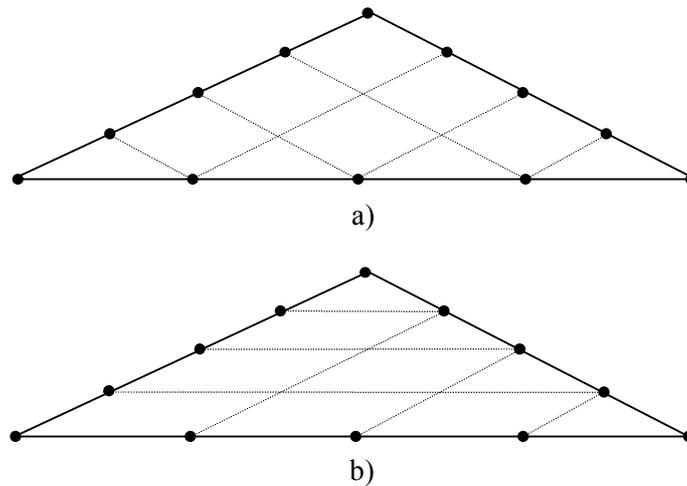


Figura 2.36. Generación de malla: a) desde el vértice con mayor ángulo, b) desde un vértice distinto al de mayor ángulo

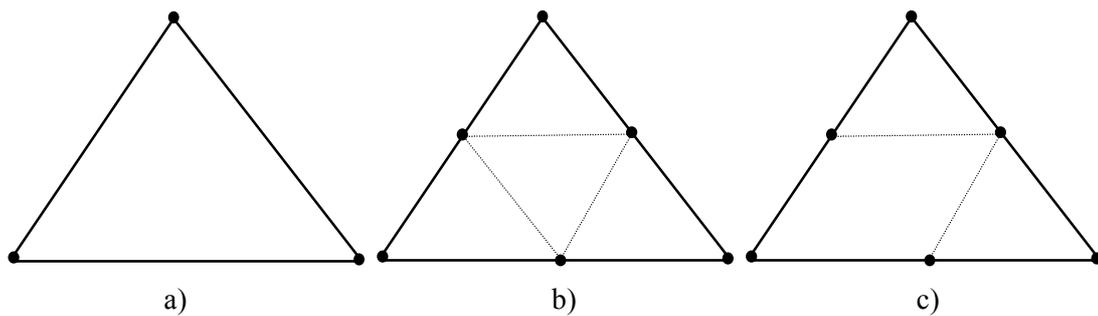


Figura 2.37. Mallas de triángulos sin generación de nodos: a) 1 división por lado, b) 2 divisiones por lado (malla triangular), c) 2 divisiones por lado (malla mixta)

En las figuras 2.38 y 2.39 se presentan sendos resultados obtenidos con esta función de interpolación para discretizaciones de línea no uniformes e irregulares.

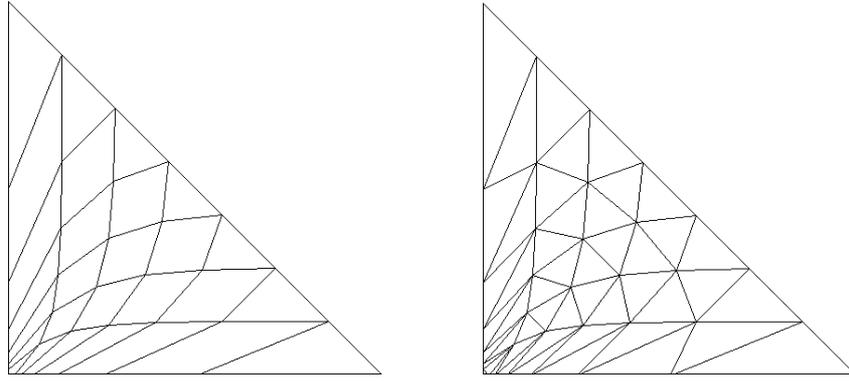


Figura 2.38. Triángulo con dos de sus lados discretizados geoméricamente. Mallas mixta y triangular

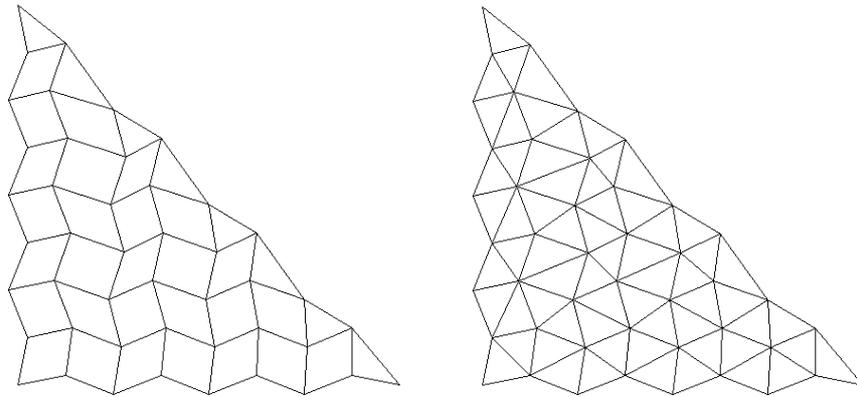


Figura 2.39. Triángulo con contorno irregular. Mallas mixta y triangular

Se observa que, en el caso de la figura 2.38, las mallas presentan una baja calidad cerca del contorno discretizado geoméricamente. Se consigue una mejor distribución de los nodos en el interior del área utilizando los siguientes proyectores:

$$\Gamma_1(u, v) = u\Psi_1(u + v) + (1 - u - v)\Psi_1(u) \quad (2.26)$$

$$\Gamma_2(u, v) = v\Psi_2(u + v) + (1 - u - v)\Psi_2(v) \quad (2.27)$$

$$\Gamma_3(u, v) = u\Psi_3(v) + v\Psi_3(1 - u) \quad (2.28)$$

Estos proyectores se han obtenido, como muestra el esquema de la figura 2.40, a partir de la descomposición de cada función ψ_i en dos componentes, y ajustando el argumento y el factor de ponderación en cada una de ellas de tal forma que ambas tengan el mismo peso en cada proyector.

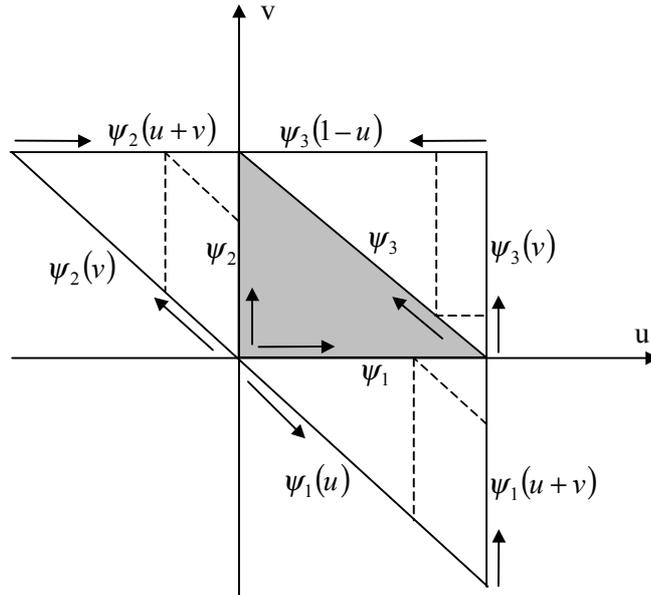


Figura 2.40. Cálculo de los proyectores a partir del triángulo inicial (sombreado)

Como sucedía con la función (2.17), se ha de añadir un cuarto término para que la función tome los valores adecuados en el contorno. Finalmente, la función de interpolación queda:

$$\Gamma(u, v) = u\Psi_1(u+v) + (1-u-v)\Psi_1(u) + v\Psi_2(u+v) + (1-u-v)\Psi_2(v) + u\Psi_3(v) + v\Psi_3(1-u) - (1-u-v)\Psi_1(0) - u\Psi_1(1) - v\Psi_2(1) \quad (2.29)$$

El proceso de mallado es el expuesto anteriormente. Los resultados generados con esta función sobre los ejemplos anteriores se muestran en las figuras 2.41 y 2.42. Se observa una mejora sustancial en el primer caso y una calidad similar en el segundo.

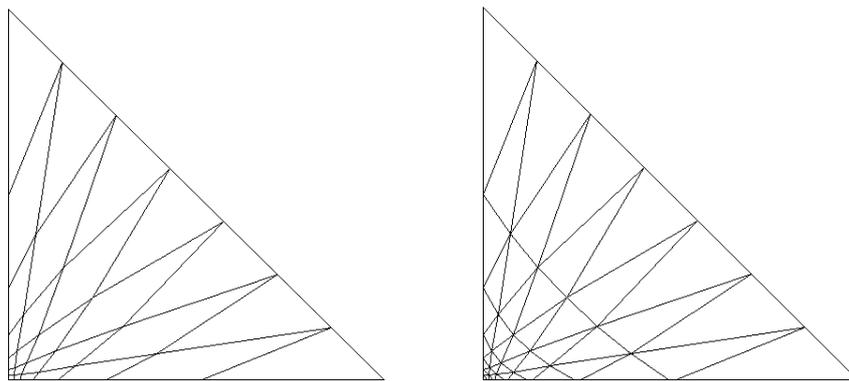


Figura 2.41. Triángulo con dos de sus lados discretizados geoméricamente. Mallas mixta y triangular

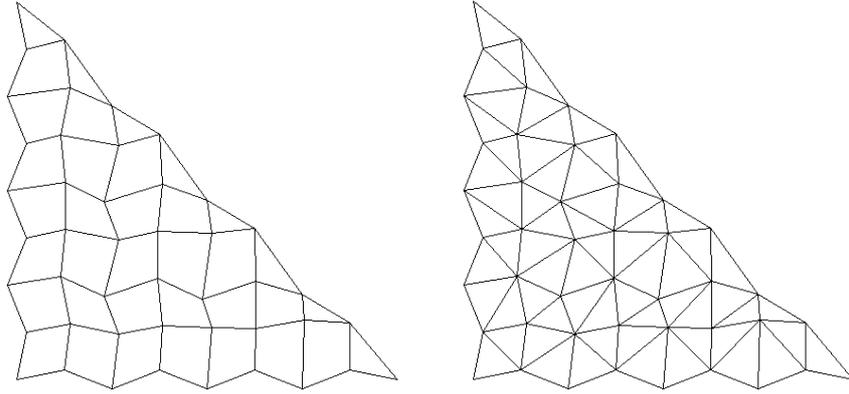


Figura 2.42. Triángulo con contorno irregular. Mallas mixta y triangular

Por último, se muestran otros resultados para diversas geometrías triangulares en las figuras 2.43-2.45.

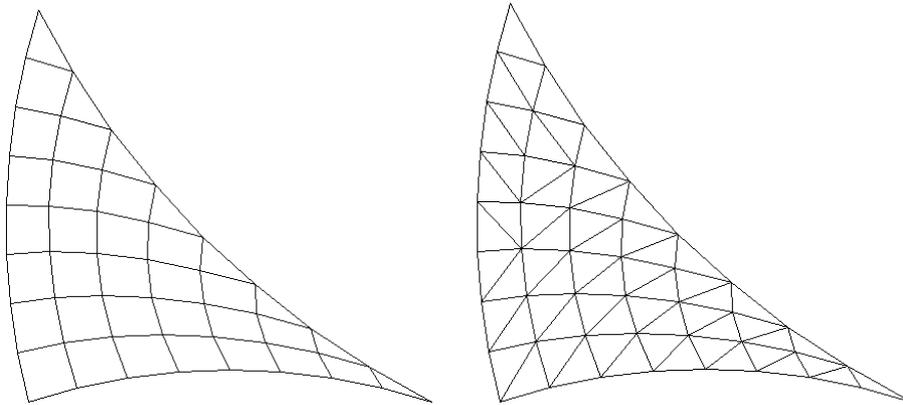


Figura 2.43. Triángulo con lados curvos. Mallas mixta y triangular

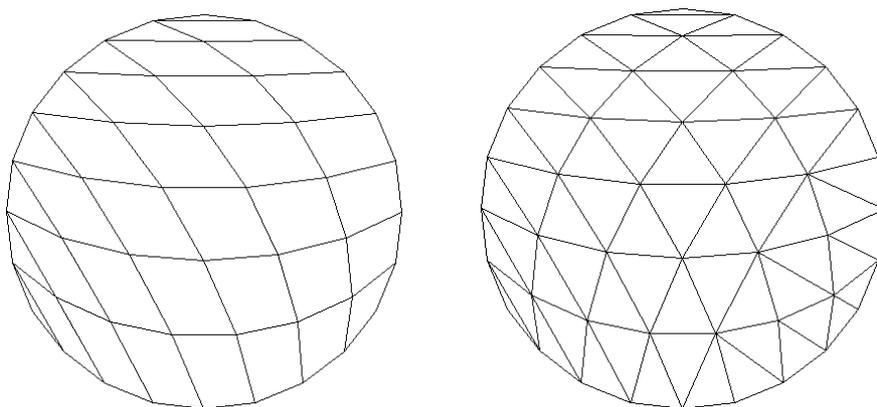


Figura 2.44. Círculo discretizado como un triángulo. Mallas mixta y triangular

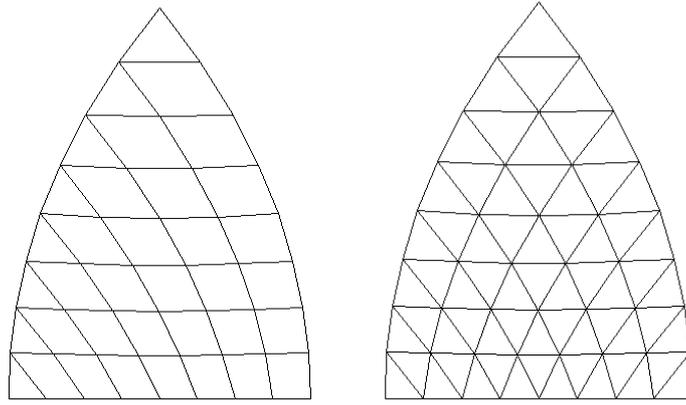


Figura 2.45. Triángulo con dos lados curvos. Mallas mixta y triangular

2.3.2. Malla No Estructurada en Triángulos Arbitrarios. Frente de Avance Rápido Generalizado

Una vez desarrollado el método FARG para áreas cuadriláteras, se puede aprovechar su potencia en la generación de mallas de otros tipos de geometrías. Para ello, en el caso de un área triangular, es necesario transformar o descomponer ésta en una o varias cuadriláteras.

Existen diversos métodos para dividir un triángulo en cuadriláteros. Uno de ellos, basado en la generación de segmentos que unen los puntos medios de los lados con el baricentro, se muestra en la figura 2.46.

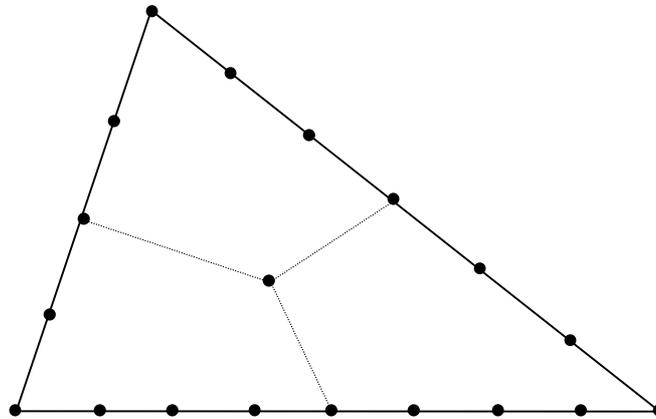


Figura 2.46. División de un triángulo en tres cuadriláteros

Este método no resulta apropiado, pues, en general, los cuadriláteros resultan muy irregulares y, en esos casos, el método FARG se comporta peor.

La técnica por la que finalmente se ha optado consiste en dividir el triángulo inicial en un triángulo elemental ($t1$), es decir, con una sola división en sus tres lados y que, por tanto, es un elemento en sí mismo, y en un cuadrilátero ($c1$). Esto se consigue eliminando del triángulo una de sus esquinas, como se muestra en la figura 2.47.

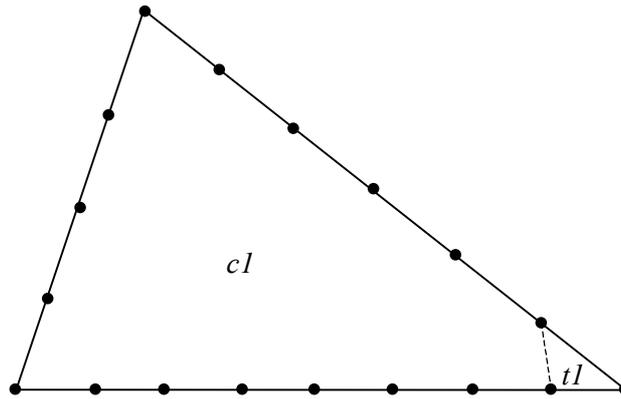


Figura 2.47. División de un triángulo en un triángulo elemental y un cuadrilátero

Se pueden definir distintos criterios con el fin de seleccionar la esquina que se ha de eliminar, como, por ejemplo, buscar aquel vértice que genere un elemento triangular más regular. Sin embargo, se ha optado por seleccionar el vértice que presente el ángulo más diferente a los otros dos. De esta manera, el cuadrilátero resultante presenta una geometría trapezoidal, para la cual el método FARG se comporta, en general, mejor.

Una vez elegido el vértice de división se siguen los siguientes pasos:

1. Creación de la arista que separa el triángulo del cuadrilátero.
2. Creación del elemento triangular.
3. Generación de la malla del cuadrilátero restante mediante el método FARG.

Existen dos casos en los que no se puede efectuar este procedimiento. Se trata de triángulos donde uno o dos de sus lados tienen una sola división. En el primer caso es forzoso seleccionar el vértice formado por las dos líneas que tienen más de una división (figura 2.48); el cuadrilátero resultante presentará $(1, m, 1, n)$ divisiones en sus lados. En el segundo, se trazan aristas desde el punto común a las líneas con una división hasta cada uno de los nodos interiores de la línea mayor, creando los elementos triangulares correspondientes (figura 2.49). Ninguno de estos dos procedimientos genera nodos internos en el área.

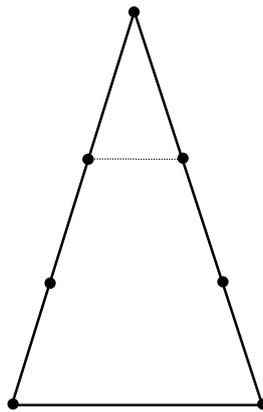


Figura 2.48. Partición del triángulo con una división en uno de sus lados

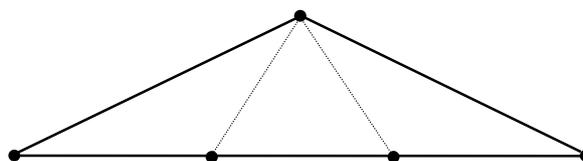


Figura 2.49. Partición del triángulo con una división en dos de sus lados

2.3.3. Resultados

A continuación se presentan algunos resultados obtenidos para triángulos (figuras 2.50-2.54). Las tres primeras muestran las mallas generadas en triángulos con contorno rectilíneo. Los últimos ejemplos presentan la discretización de triángulos de contorno irregular.

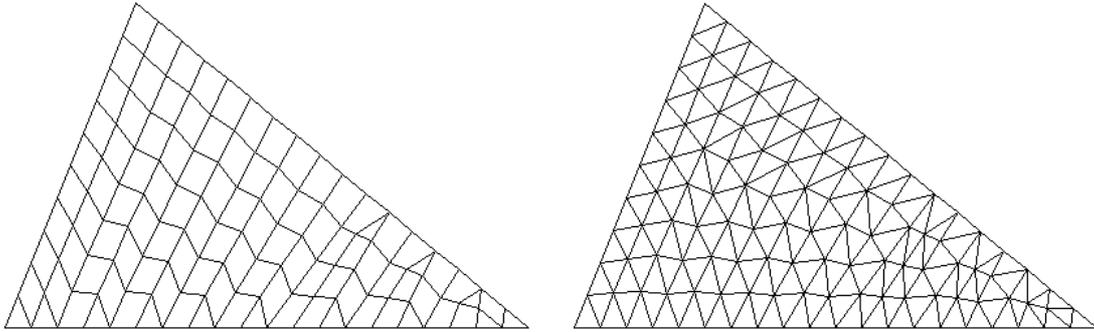


Figura 2.50. Triángulo con 20, 17 y 10 divisiones en sus lados. Mallas mixta y triangular

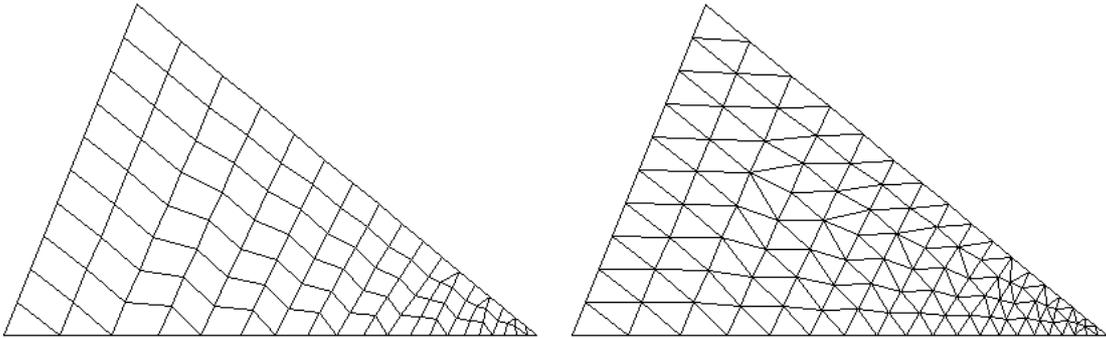


Figura 2.51. Triángulo con discretización geométrica en dos de sus lados. Mallas mixta y triangular

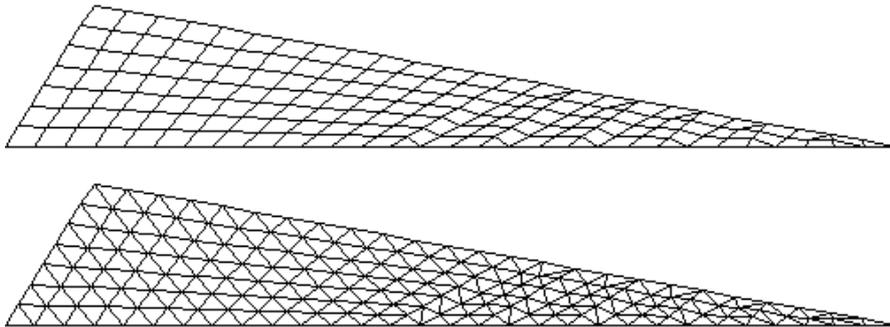


Figura 2.52. Triángulo con 30, 25 y 7 divisiones en sus lados. Mallas mixta y triangular

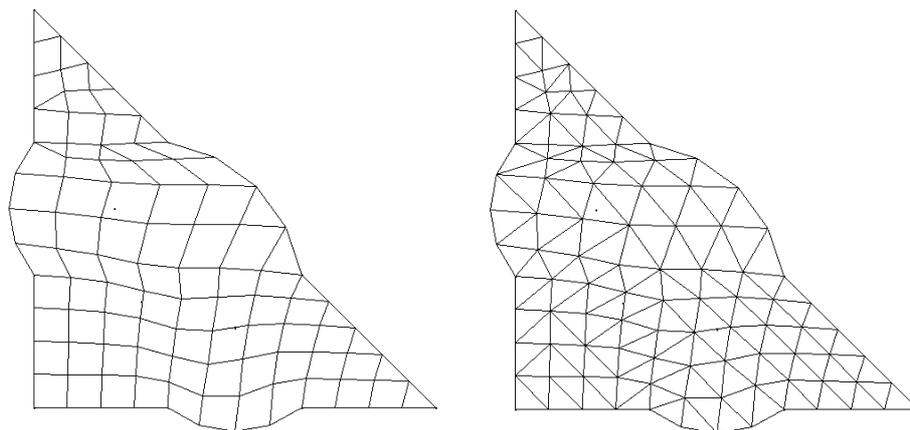


Figura 2.53. Triángulo de contorno irregular con 14, 12 y 12 divisiones en sus lados. Mallas mixta y triangular

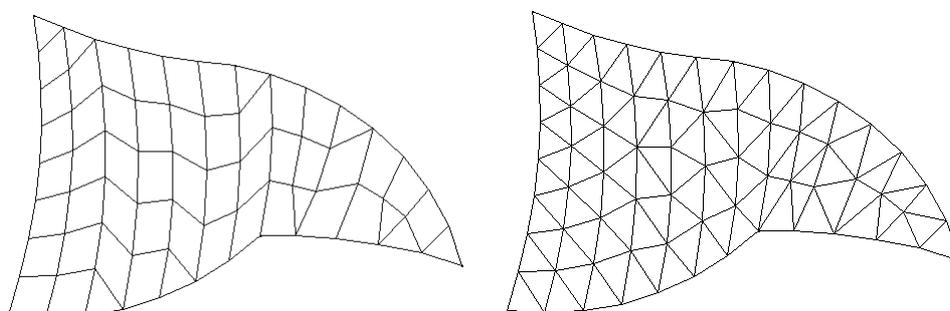


Figura 2.54. Triángulo de contorno irregular con 14, 12 y 8 divisiones en sus lados. Mallas mixta y triangular

2.4. Dominios Arbitrarios. Técnica Multibloque

En los anteriores apartados de este capítulo se han presentado las técnicas de discretización de áreas simples como el triángulo y el cuadrilátero. A partir de estos métodos, y utilizando una metodología multibloque basada en este tipo de áreas, se pueden discretizar dominios arbitrarios. La complejidad de esta técnica radica en la gestión de los componentes de la malla para obtener una conectividad correcta entre las distintas áreas en que se divide el dominio; para ello es necesaria una estructuración de la información de la geometría como la que se presenta en el apéndice 1. Por contra, la descomposición en áreas más sencillas simplifica, como se ha visto en los puntos anteriores, los métodos de mallado. En principio, la descomposición del dominio se debe hacer manualmente, intentando crear áreas triangulares y cuadriláteras lo más regulares posible. No obstante, se pueden desarrollar técnicas que permitan la descomposición automática del dominio. Como ejemplo de automatización de la descomposición se presenta en el punto siguiente la técnica utilizada en la discretización de polígonos convexos. Finalmente, en el punto 2.4.2. se presentan algunos ejemplos de generación de malla en dominios arbitrarios mediante una descomposición manual.

2.4.1. Polígonos Convexos

La idea fundamental de esta técnica consiste en la división del polígono en 6 triángulos, repartiéndolo de la forma más uniforme posible las divisiones del contorno (figura 2.55). Estos

triángulos tendrán, en general, uno de sus lados (el correspondiente al contorno del polígono) no rectilíneo y, como mucho, presentarán una diferencia de divisiones entre sus tres lados de 1. Para la creación y mallado del polígono se siguen los siguientes pasos:

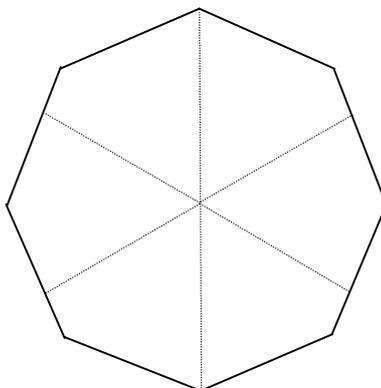


Figura 2.55. División de un polígono en 6 triángulos de contorno irregular

1. Creación de 6 áreas triangulares con un vértice común en el centro del polígono.
2. Discretización de los segmentos que unen los vértices del polígono con el centro. El número de divisiones de estos segmentos será el cociente entero de $n/6$, siendo n el número de divisiones en el polígono.
3. Generación de las mallas de los 6 triángulos. Estos triángulos pueden tener el mismo número de divisiones en sus tres lados o diferenciarse en 1. Por esta razón se utiliza para su discretización el método FARG para triángulos.

En las figuras 2.56-2.58 se presentan las mallas obtenidas en distintas áreas poligonales. Se observa que en el caso de polígonos regulares el comportamiento del mallador es muy satisfactorio. En polígonos irregulares, la calidad de la malla depende de la irregularidad de éstos. Si la irregularidad no es excesiva también se obtienen excelentes resultados (figura 2.56).

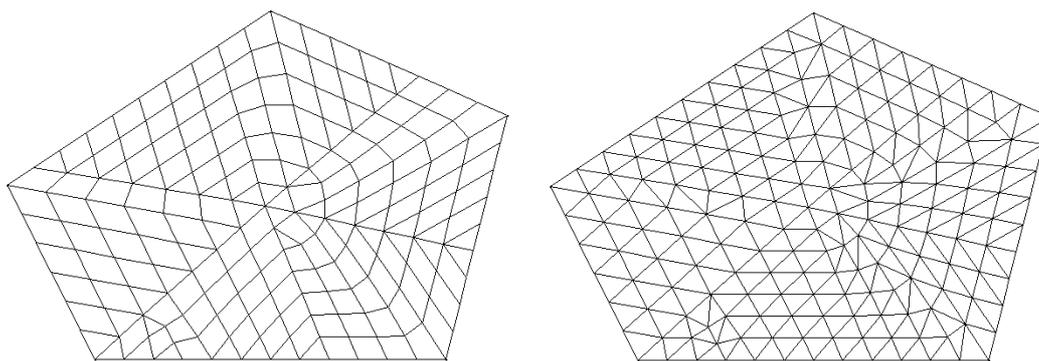


Figura 2.56. Malla de un pentágono irregular (mixta y triangular)

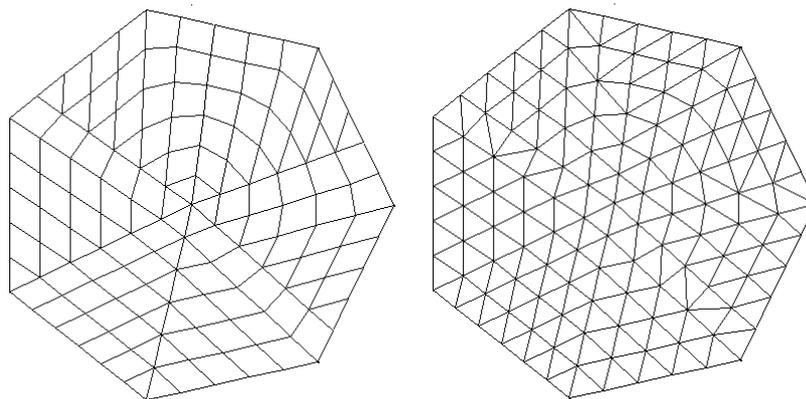


Figura 2.57. Malla de un heptágono regular (mixta y triangular)

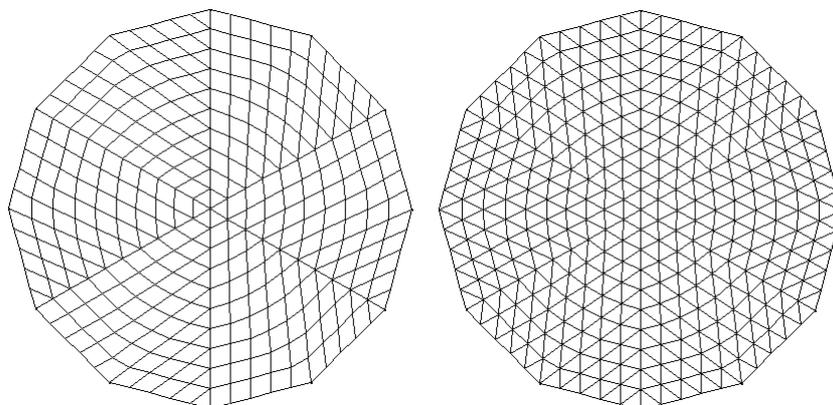


Figura 2.58. Malla de un dodecágono regular (mixta y triangular)

2.4.2. Dominios Arbitrarios

Cuando no es posible asimilar la geometría del problema a áreas simples como triángulos, cuadriláteros o polígonos convexos, es necesario descomponer el dominio del problema en este tipo de áreas. Esta descomposición no es única y la calidad de la malla final depende de ella. Las figuras 2.59-2.62 muestran las mallas generadas con esta técnica. En ocasiones, la descomposición en distintas áreas no viene sólo motivada por la calidad de la malla final. Así ocurre en la estructura de la figura 2.60, donde resulta conveniente definir tantas áreas en la cercanía de las ranuras (áreas A13-A24) porque las líneas de éstas presentan distintas propiedades (unas presentan la condición de pared eléctrica y otras son líneas auxiliares interiores).

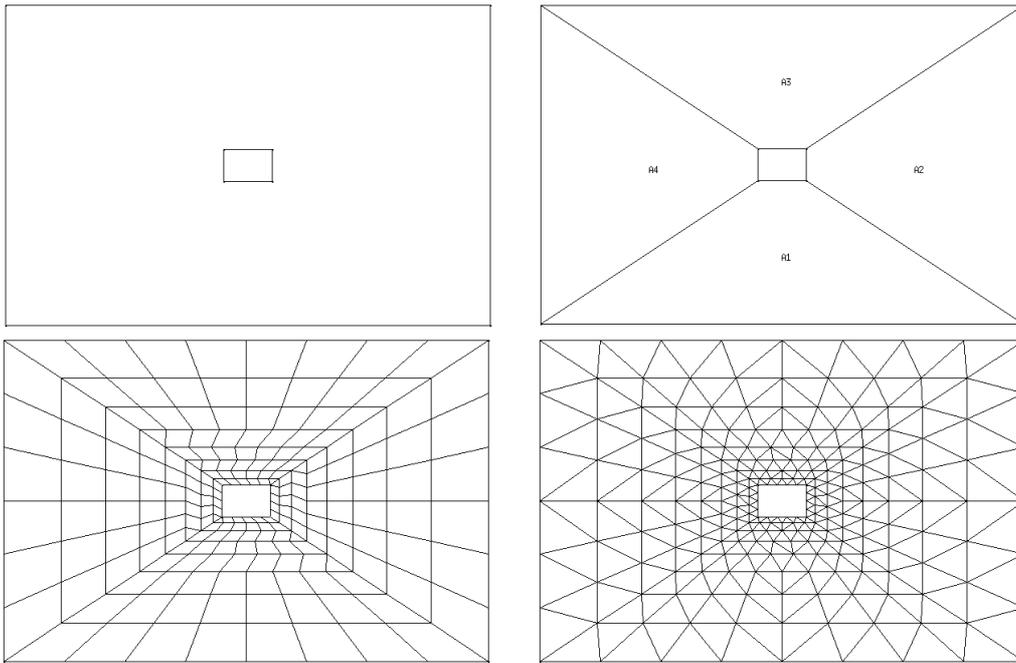


Figura 2.59. Descomposición multibloque de un coaxial cuadrado y mallas obtenidas (mixta y triangular)

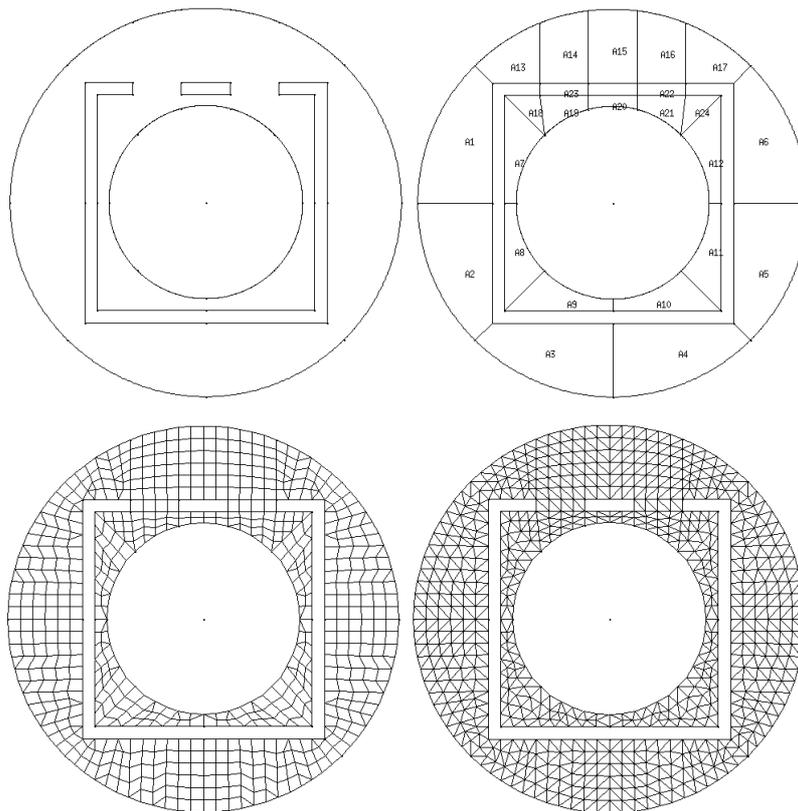


Figura 2.60. Descomposición multibloque y generación de malla (mixta y triangular) para el análisis de un apantallamiento ranurado

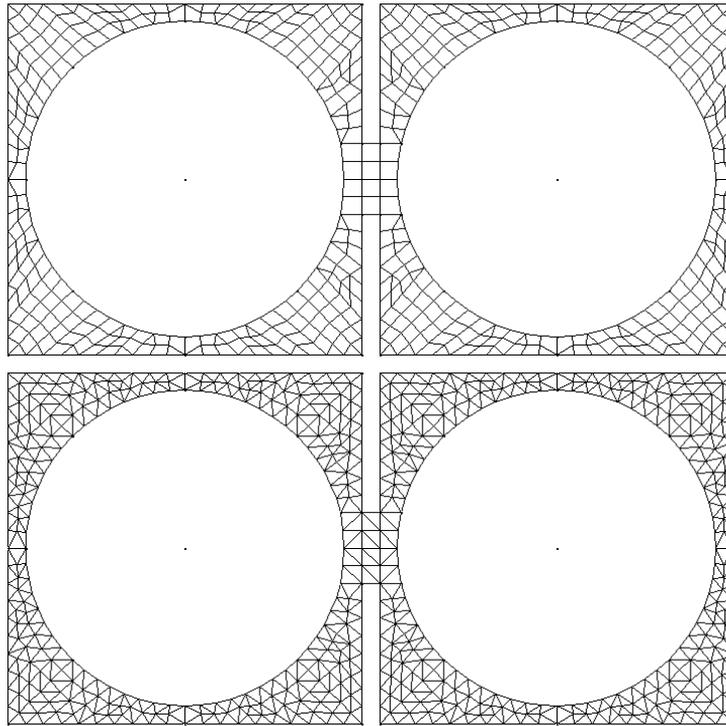


Figura 2.61. Generación de malla (mixta y triangular) para el análisis de interferencias intra-sistema

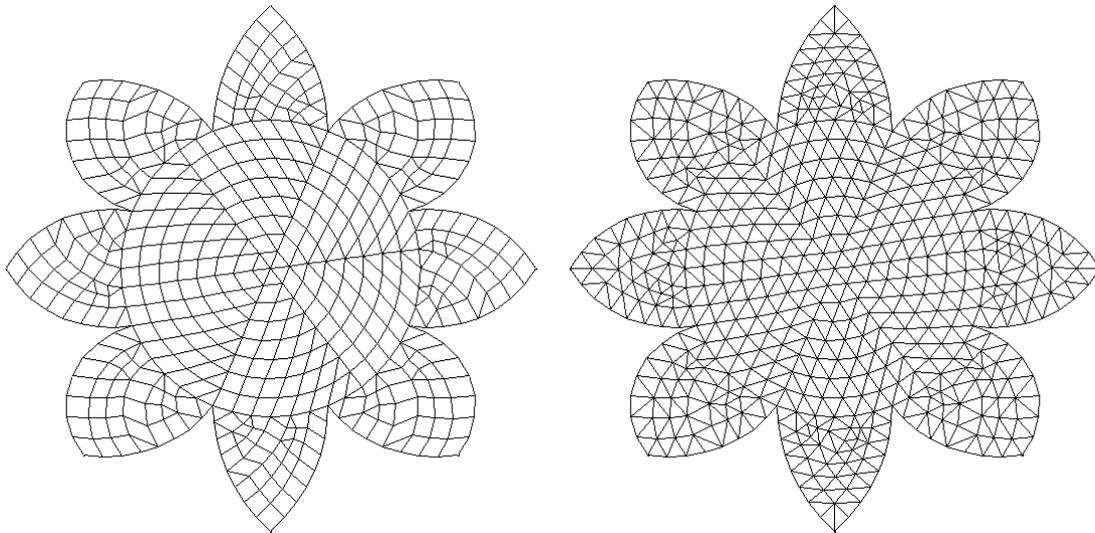


Figura 2.62. Mallas mixta y triangular obtenidas mediante descomposición multibloque

2.5. Mallado Exclusivamente con Cuadriláteros

En ocasiones puede resultar interesante realizar el mallado de una superficie únicamente con cuadriláteros. Con los métodos descritos hasta ahora esto sólo es posible en áreas cuadriláteras en las que la discretización del contorno permite la creación de una malla estructurada. Esta condición es muy restrictiva, por lo que en este apartado se describe el método desarrollado para obtener este tipo de discretización siempre que el área cumpla una condición mucho menos restrictiva: que las líneas que la forman tengan un número par de divisiones.

El método consiste, básicamente, en realizar una discretización previa del área con elementos cuadriláteros y triangulares cuyos lados estarán formados por dos aristas, y, posteriormente, dividir cada uno de estos elementos en cuatro cuadriláteros (si se trata de un cuadrilátero) o en tres (en el caso de un triángulo), como se muestra en el esquema de la figura 2.63.

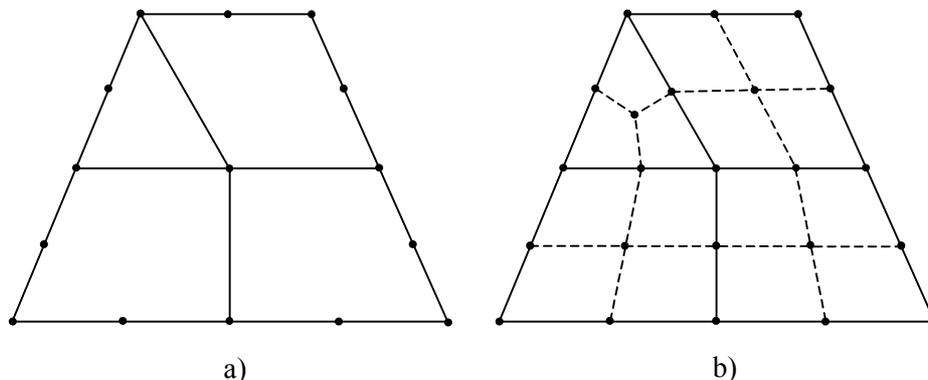


Figura 2.63. Generación de mallas cuadriláteras. Discretización previa (a) y malla final (b)

El proceso completo se puede resumir en las siguientes fases:

1. Discretización del área mediante una malla mixta. Este mallado genera nodos y pseudoaristas (formadas por dos aristas) en el interior del área.
2. En cada pseudoarista interior se genera un nodo en su punto medio. Así se consiguen pseudoelementos cuadriláteros y triangulares con 4 y 3 nodos en los vértices, 4 y 3 más en los puntos medios de sus lados, y 8 y 6 aristas en su contorno, respectivamente
3. En cada pseudoelemento se genera un nuevo nodo en su centro geométrico y se une éste, mediante aristas, a los nodos situados en mitad de cada lado.
4. Se crean los elementos cuadriláteros generados al crear las aristas en el punto anterior.

En la figura 2.63 se observa que los elementos generados a partir de los pseudoelementos triangulares son más irregulares. Por esta razón se ha optado por realizar una prediscretización mixta y no triangular, de modo que la mayoría de los pseudoelementos sean cuadriláteros. En las figuras 2.64 y 2.65 se comparan mallas cuadriláteras, con prediscretización triangular y con prediscretización mixta. En ellas se comprueba que se obtiene una malla de mayor calidad en el segundo caso. Además, la prediscretización mixta presenta dos ventajas adicionales:

- El número de elementos generados es menor. Suponiendo que el número de triángulos es despreciable frente al de cuadriláteros en un mallado mixto, se puede afirmar que el número de triángulos generados con una prediscretización triangular es, aproximadamente el doble que con una mixta, pues cada cuadrilátero se divide en dos triángulos. Teniendo en cuenta que cada triángulo generará tres cuadriláteros, y cada cuadrilátero, cuatro, se puede deducir que el número final de cuadriláteros con una prediscretización triangular es mayor en un factor aproximado de $\frac{3}{2}$ con respecto al generado mediante una prediscretización triangular.
- El tiempo empleado en la discretización es sensiblemente menor, ya que la mayor parte de los pseudoelementos son cuadriláteros y, en este caso, no es necesario realizar tantas comprobaciones como con triángulos. Simplemente se deben ordenar los datos del contorno del pseudoelemento (nodos y aristas) para que la rutina de mallado por interpolación funcione correctamente.

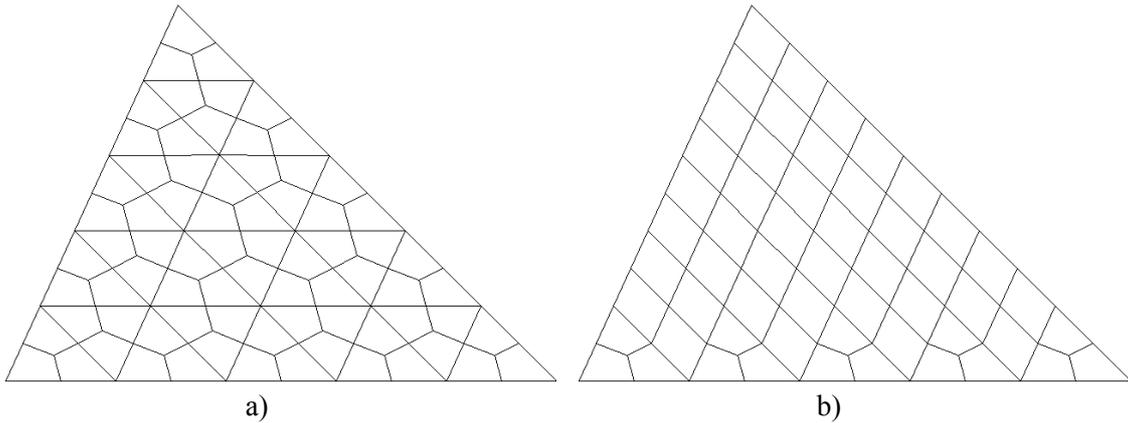


Figura 2.64. Mallas cuadriláteras en un triángulo: a) con prediscretización triangular, b) con prediscretización mixta

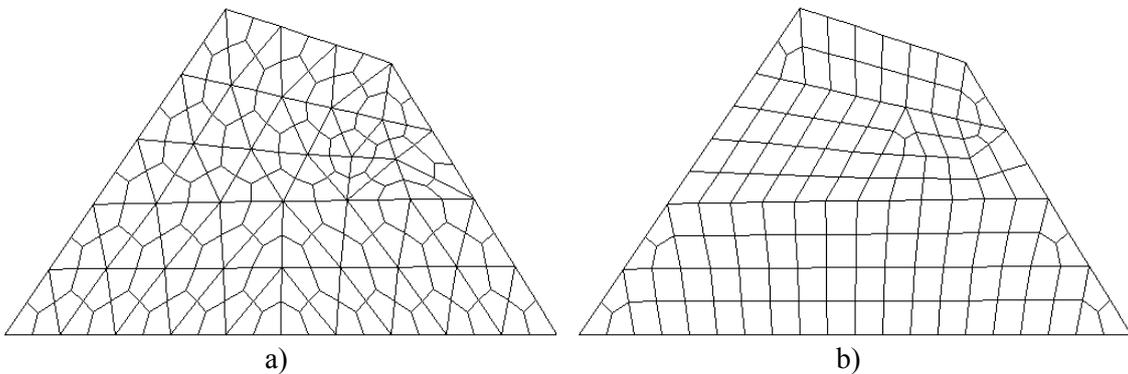


Figura 2.65. Mallas cuadriláteras en un cuadrilátero: a) con prediscretización triangular, b) con prediscretización mixta

En este tipo de malla, la calidad de los elementos cuadriláteros más irregulares está relacionada con la calidad de los triángulos de los que provienen. Cuanto más regulares sean éstos, más lo serán también los cuadriláteros que generen, como muestra la figura 2.66.

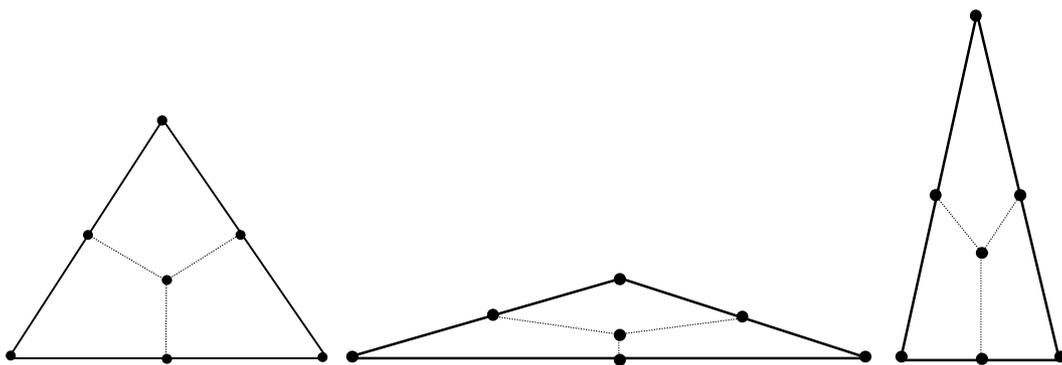


Figura 2.66. Cuadriláteros generados a partir de distintos triángulos

Asimismo, si todo el contorno o parte de él está discretizado de modo no uniforme o irregular y en la fase de prediscretización son necesarios elementos triangulares en estas zonas, pueden generarse cuadriláteros muy irregulares o incluso erróneos. Esto se debe a que tanto la generación de los nodos intermedios de las pseudoaristas internas como la del nodo interior al triángulo se basan en las coordenadas de los vértices de éste.

En la figura 2.67 se muestra un pseudoelemento en el que se genera un cuadrilátero muy irregular. Lógicamente, esto sólo ocurrirá en aquellos cuadriláteros que contengan alguna arista perteneciente a una línea discretizada no uniformemente. El hecho de que el nodo interior al triángulo sea su baricentro garantiza que no se generarán cuadriláteros cóncavos salvo en una situación: cuando el triángulo se encuentre en una esquina del área delimitada por dos líneas discretizadas no uniformemente. En ese caso se puede producir la situación que refleja la figura 2.68. Esta deficiencia queda subsanada si la posición del nodo interior se calcula como el centro geométrico de los tres nodos intermedios de los lados del triángulo.

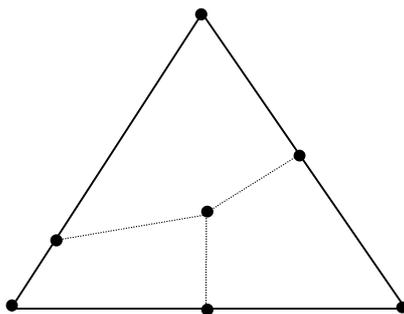


Figura 2.67. Pseudoelemento con uno de sus lados perteneciente a una línea discretizada de modo no uniforme

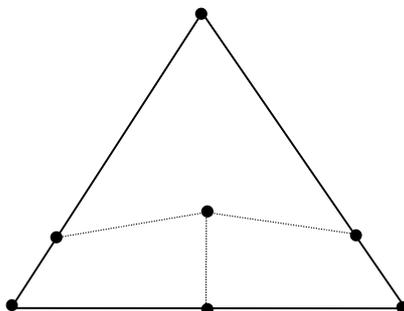


Figura 2.68. Generación de un cuadrilátero cóncavo en una esquina del área a causa de la discretización no uniforme del contorno

En el caso de discretizaciones irregulares del contorno sucede algo parecido, pero aquí cabe distinguir dos casos:

- El pseudoelemento triangular presenta una convexidad en el lado perteneciente a la línea discretizada irregularmente (figura 2.69). En este caso, se generarán cuadriláteros con una regularidad dependiente de la convexidad, pero nunca erróneos.

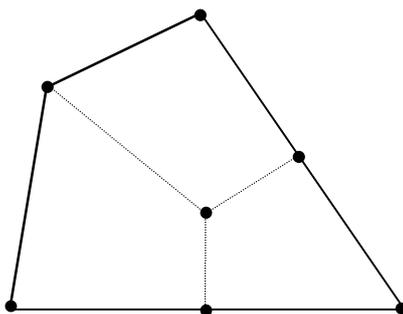


Figura 2.69. Generación de cuadriláteros en un pseudoelemento triangular con una convexidad en uno de sus lados

- El pseudoelemento triangular presenta una concavidad en el lado perteneciente a la línea discretizada irregularmente. Si la concavidad es muy acentuada, el baricentro del triángulo puede caer fuera de éste y, en consecuencia, se pueden generar cuadriláteros en los que dos de sus lados opuestos se intersectan (figura 2.70). Este tipo de cuadriláteros, al igual que los no convexos, no son tolerables en una malla.

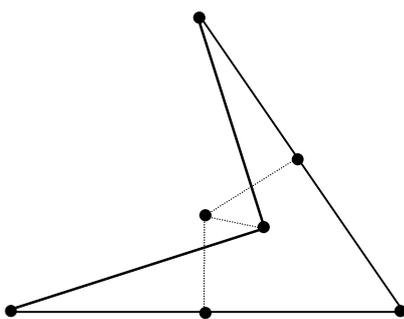


Figura 2.70. Generación errónea de cuadriláteros en un pseudoelemento triangular con una concavidad en uno de sus lados

De este estudio se puede concluir que este tipo de mallado sólo garantiza resultados correctos (con mayor o menor calidad) cuando el contorno presenta curvaturas convexas o curvaturas cóncavas de pequeña o mediana magnitud. Si se involucra a los nodos interiores de las pseudoaristas en la generación del nodo interno, mediante, por ejemplo, el interpolador triangular, es altamente improbable la generación de cuadriláteros erróneos.

En la figura 2.71 y 2.72 se muestran algunos resultados obtenidos con este tipo de discretización. Las mallas mixtas y triangulares de estos ejemplos se muestran en las figuras 2.53, 2.54, 2.60, 2.62 y 2.61, respectivamente.

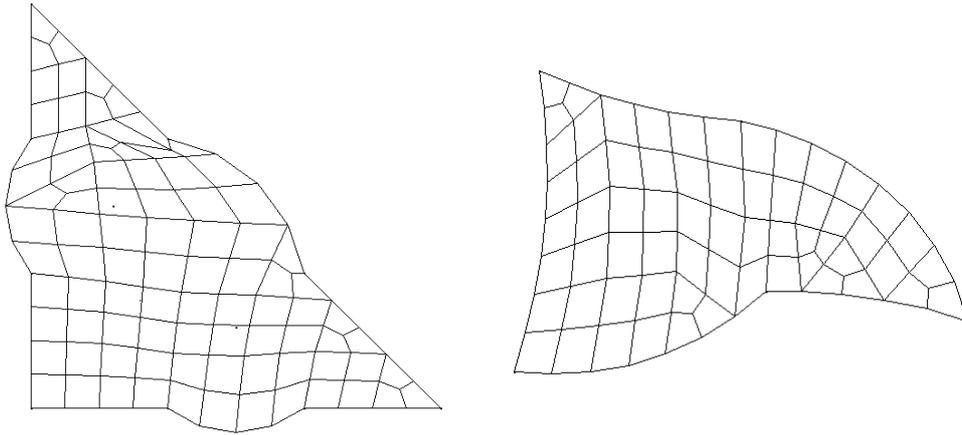


Figura 2.71. Mallas cuadriláteras en triángulos de contorno irregular

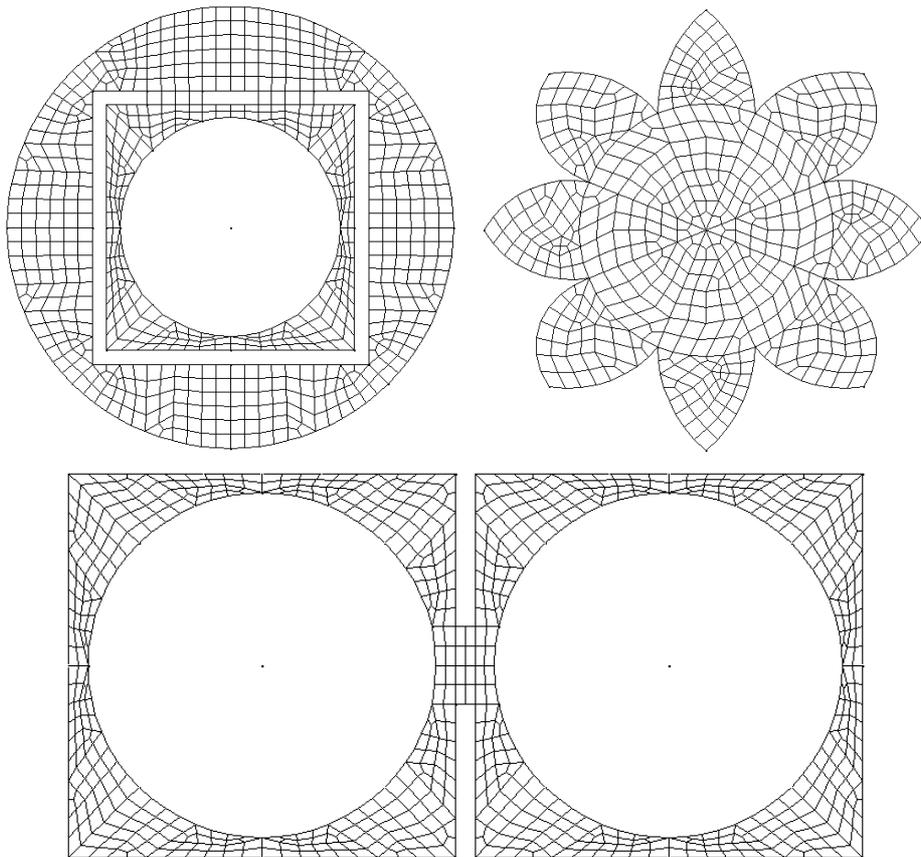


Figura 2.72. Mallas cuadriláteras en geometrías multibloque

2.6. Mejora *A Posteriori* de la Calidad de la Malla

Una vez generada la malla es posible mejorar la calidad de ésta mediante métodos regularizadores que consigan elementos más cercanos al triángulo equilátero y al cuadrado, conservando las densidades locales que la malla pueda presentar. Se presentan a continuación dos técnicas que persiguen este objetivo, la primera de ellas modifica la posición de los nodos [Knu98b], [Can98] y la segunda la conectividad de las mallas triangulares.

2.6.1. Reposicionamiento de Nodos

Esta técnica reparte los nodos de la malla de un modo localmente homogéneo. Para ello, se calcula la nueva posición de los nodos como la media de las posiciones de sus nodos más cercanos (a los que denominaremos nodos vecinos) como se muestra en la figura 2.73. Concretamente, si un nodo tiene k vecinos, la nueva posición del nodo será:

$$\begin{aligned} x_{nueva} &= \frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}}{k} \\ y_{nueva} &= \frac{y_{n_1} + y_{n_2} + \dots + y_{n_k}}{k} \end{aligned} \quad (2.30)$$

La forma más sencilla de conocer qué nodos son vecinos de otros es detectando si comparten aristas. Para ello se pueden utilizar dos estrategias que seguidamente pasamos a analizar:

- Realizar el mallado de modo normal, sin guardar información sobre los nodos vecinos. De esta forma se consigue un ahorro de memoria, pues, aunque el número de nodos vecinos no está acotado, en condiciones normales éste se encuentra entre 2 y 8 (dependiendo de muchos factores, entre ellos el tipo de mallado). Sin embargo, a la hora de detectar con qué nodos comparte uno determinado sus aristas, será necesario recorrer, para cada nodo, todas éstas. Esto supone un coste computacional $O(n^2)$, siendo n el número de nodos, lo que hace que se deseche esta solución y se adopte la siguiente.
- Almacenar la información referente a los nodos vecinos durante el proceso de generación de malla. El tamaño de ésta no se conoce en principio e irá aumentando conforme avance la generación de la malla. Durante el proceso de mallado, cada vez que se crea una arista, se debe almacenar el nodo inicial como vecino del final, y viceversa. Así se emplea más memoria, pero el tiempo requerido en el reposicionamiento, comparado con el de la otra opción, es insignificante ($O(n)$), pues no es necesario buscar las aristas comunes y sólo se emplea éste para el cálculo de la media. Para hacernos una idea, si $n=1000$ y con esta opción se tarda 1 segundo, con la otra pueden ser necesarios más de 15 minutos.

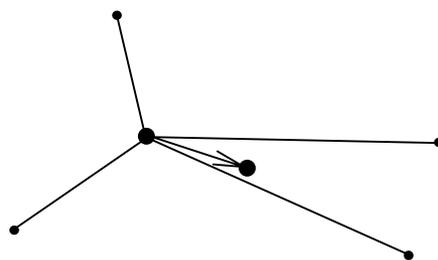


Figura 2.73. Modificación de la posición de un nodo en función de sus nodos vecinos

Este procedimiento es muy sencillo, pues en él únicamente se modifican las coordenadas de los nodos, manteniendo la conectividad de la malla, esto es, la información sobre aristas y elementos, intacta.

Se debe tener en cuenta que, en el proceso de reposicionamiento, algunos de los nodos vecinos ya estarán en su nueva posición y otros no y, por tanto, se necesita ejecutar más de una vez el algoritmo para obtener buenos resultados. Se ha comprobado que este proceso converge rápidamente (de hecho, al reposicionar por tercera vez, las coordenadas de los nodos

prácticamente no varían) y que con dos reposicionamientos consecutivos es suficiente. La figura 2.74 muestra este hecho en una malla generada sobre un cuadrilátero curvo con el método FAR para cuadriláteros rectilíneos.

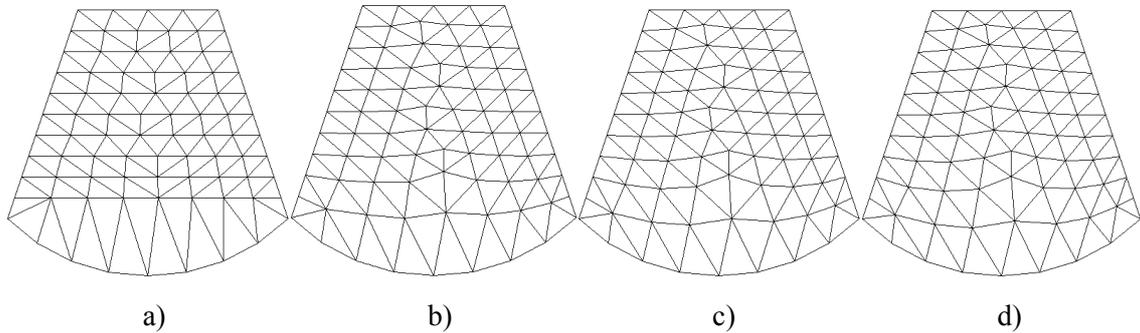


Figura 2.74. Reposicionamiento de nodos: a) malla inicial, b) tras un reposicionamiento, c) tras dos reposicionamientos, d) tras tres reposicionamientos

Asimismo, la calidad de la malla tras el reposicionamiento depende en gran medida de la conectividad que presenten los nodos en ella. Debido a este efecto de la conectividad, en general se obtienen mejores resultados en mallas triangulares, donde la conectividad de los nodos interiores es aproximadamente igual en toda la malla.

A continuación se muestran algunos resultados (figuras 2.75-2.81) sin y con reposicionamiento de nodos para distintas geometrías y distintos tipos de mallado. Se puede apreciar que, en general, la calidad de la malla mejora, consiguiendo una “regularización” o suavizado de ésta.

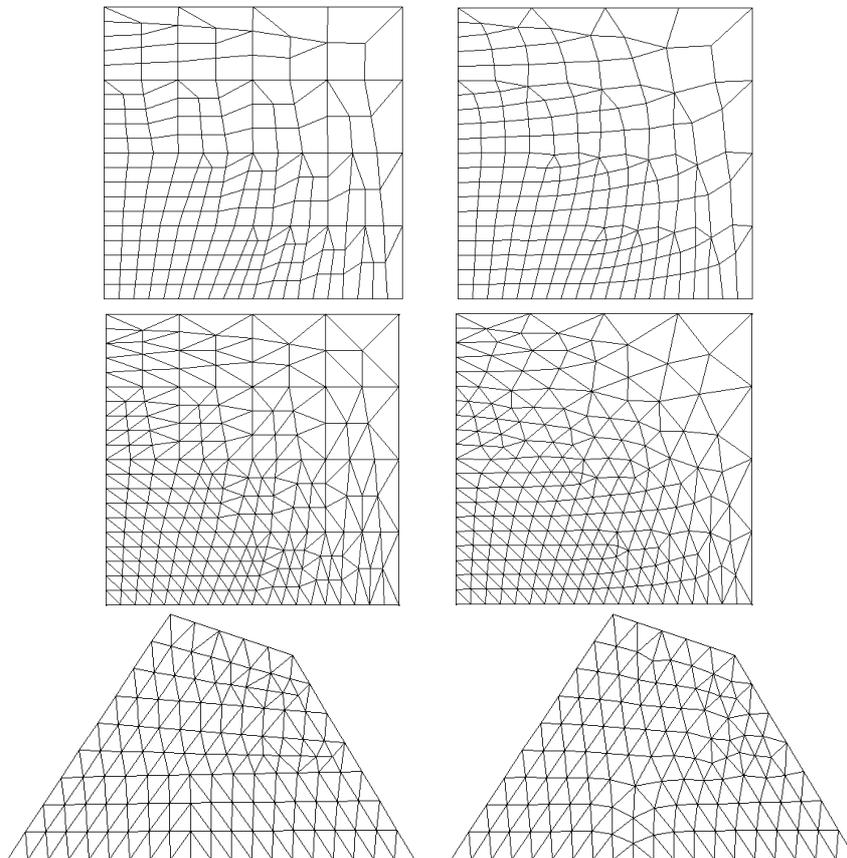


Figura 2.75. Reposicionamiento de nodos en áreas cuadriláteras

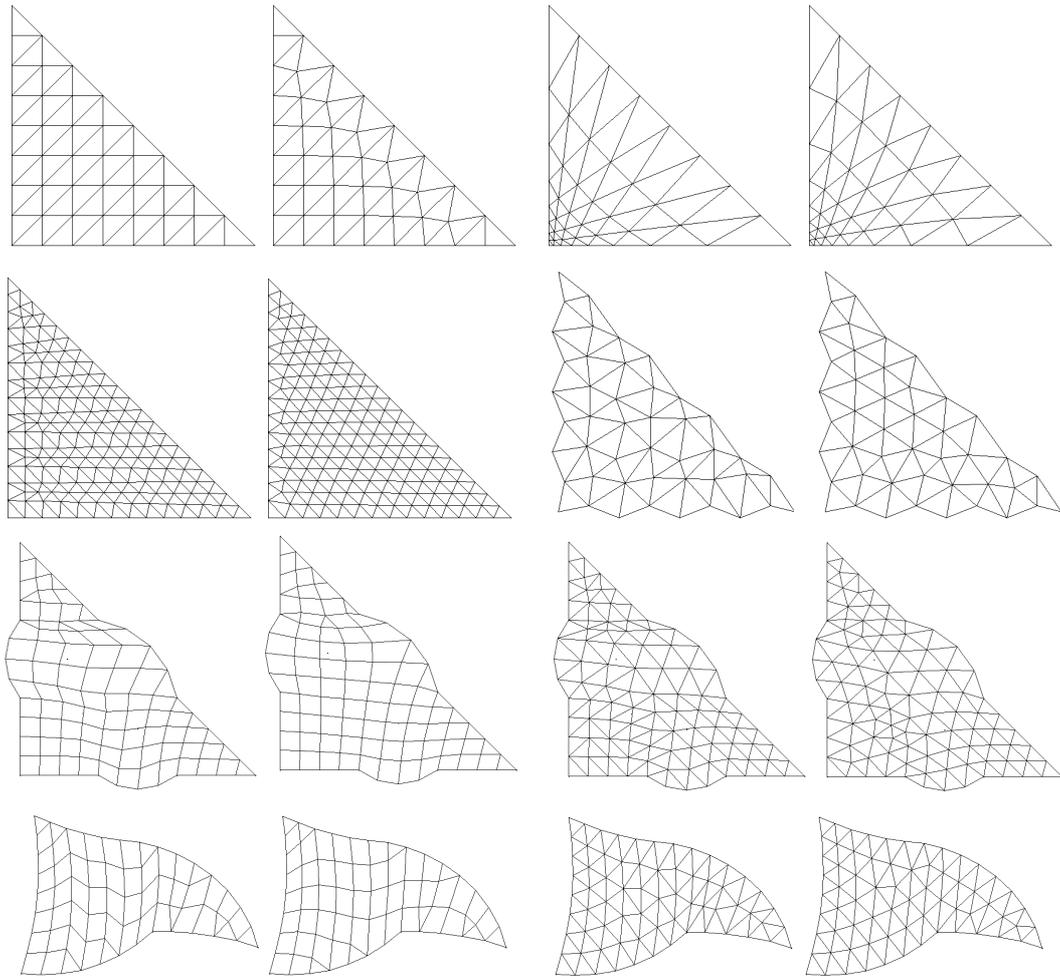


Figura 2.76. Reposicionamiento de nodos en áreas triangulares

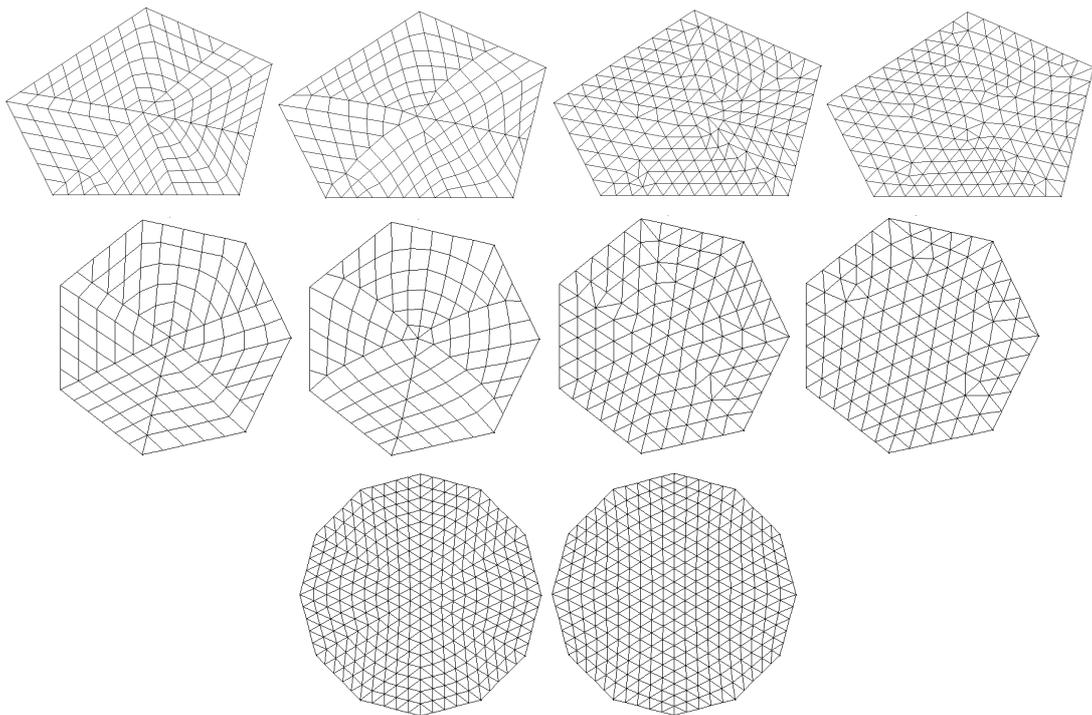


Figura 2.77. Reposicionamiento de nodos en áreas poligonales

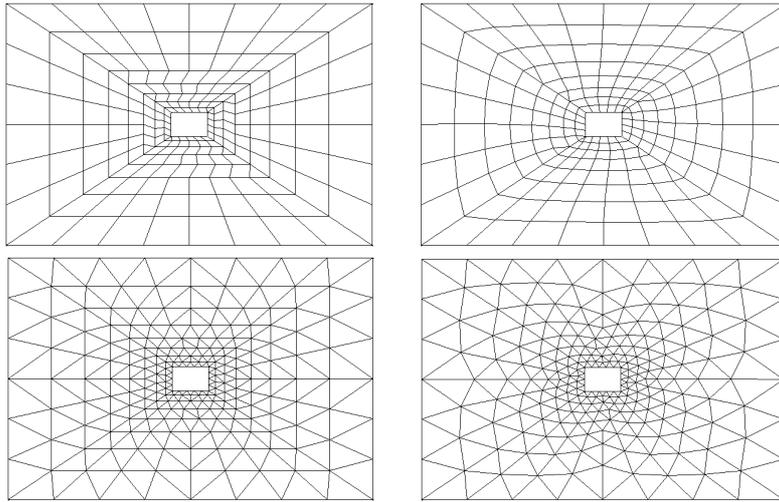


Figura 2.78. Reposicionamiento de nodos en un área multibloque

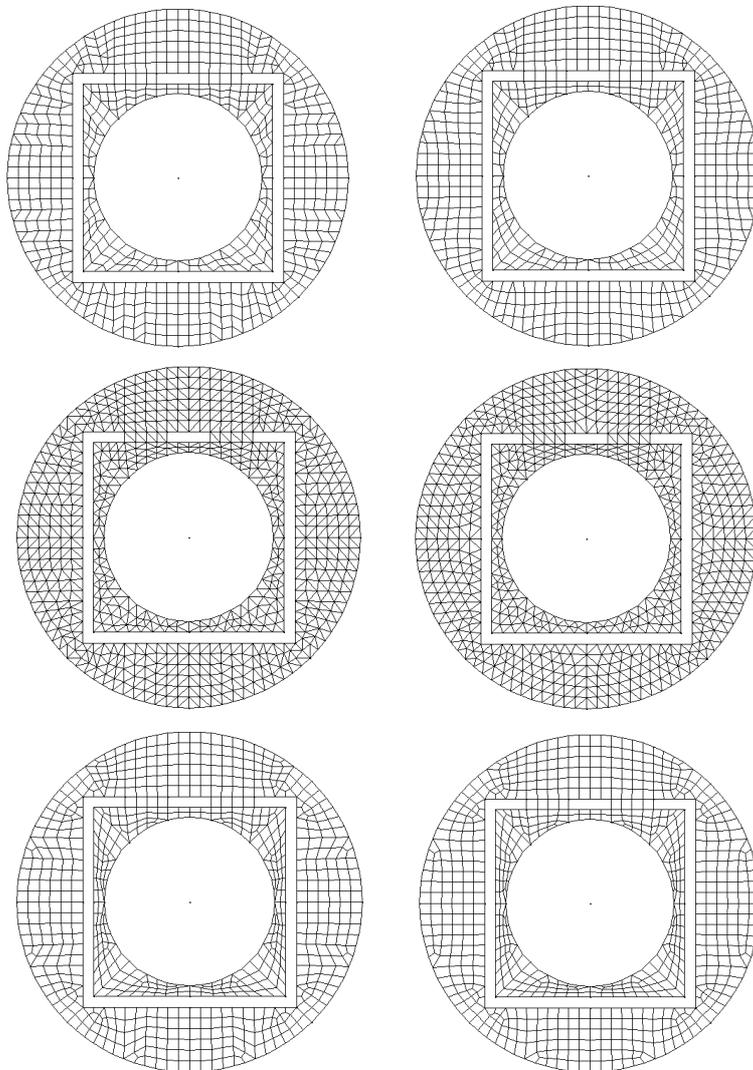


Figura 2.79. Reposicionamiento de nodos en un área multibloque

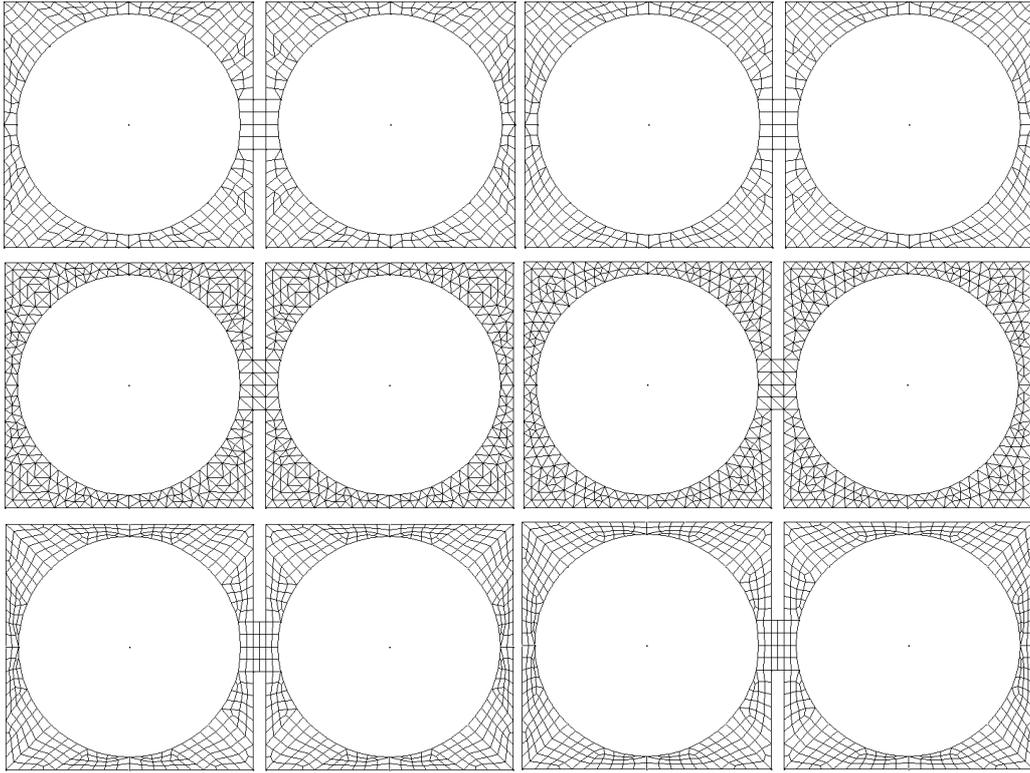


Figura 2.80. Reposicionamiento de nodos en un área multibloque

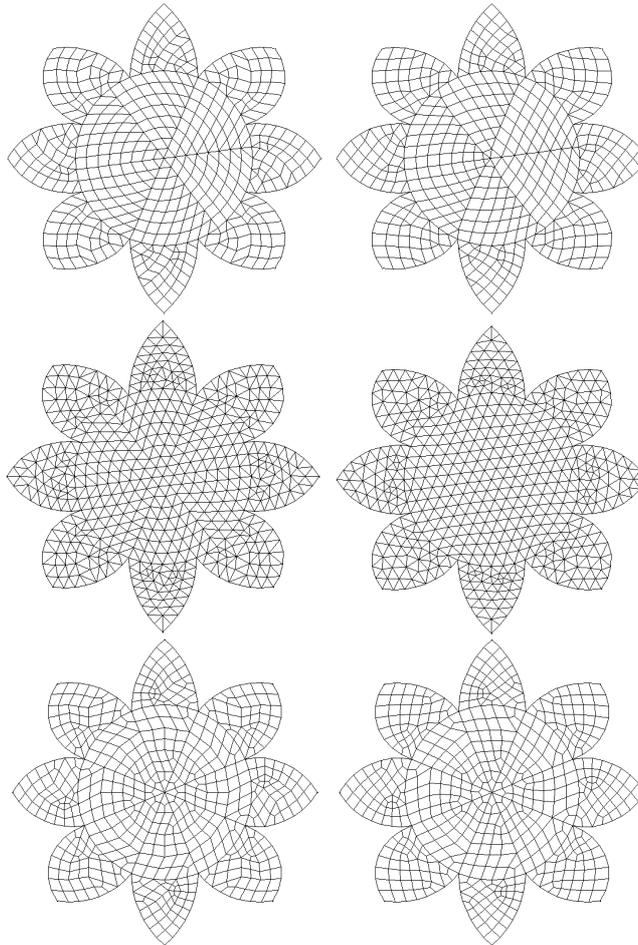


Figura 2.81. Reposicionamiento de nodos en un área multibloque

2.6.2. Intercambio de Aristas

La otra técnica que se ha desarrollado con el fin de mejorar la calidad de la malla está basada en el intercambio de aristas entre elementos triangulares vecinos, es decir, aquéllos que comparten una arista. Por “intercambio de arista” se entiende la acción de sustituir la arista común a un par de elementos por la generada a partir de la otra diagonal del cuadrilátero que forman los dos elementos, tal como muestra la figura 2.1. Para esta sustitución se sigue el criterio comentado en el punto 2.1, es decir, se elige aquella diagonal que bisecte el mayor ángulo del cuadrilátero. La propia naturaleza de esta técnica de regularización implica que sólo puede ser utilizada en mallas triangulares, pues, evidentemente, entre dos elementos cuadriláteros no es posible, en general, la sustitución de la arista común por otra sin que se formen cuadriláteros muy irregulares o degenerados. Se ha optado por el criterio del ángulo mayor, no sólo por el mejor comportamiento de éste, sino porque el criterio alternativo de la diagonal más corta puede dar lugar a elementos erróneos, como se puede apreciar en la figura 2.82. En estos ejemplos los dos triángulos forman cuadriláteros degenerados o cóncavos y la diagonal más corta de éstos no se encuentra en el interior del cuadrilátero, con lo cual se pueden formar elementos de área nula o negativa.

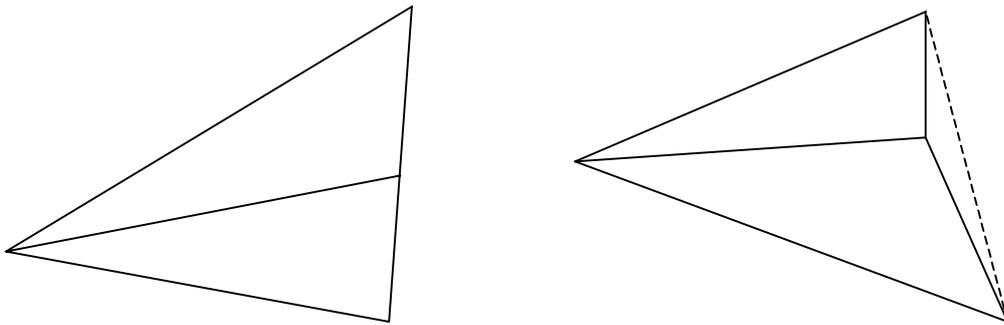


Figura 2.82. Elección de arista errónea según la diagonal más corta

Al utilizar el criterio del ángulo mayor en el propio proceso de mallado para la división de los elementos cuadriláteros, gran parte de los pares de elementos comunes (aquéllos que provengan de un cuadrilátero) no requieren el intercambio de arista. No obstante, dado que un elemento puede pertenecer a uno, dos o tres pares de elementos comunes, el cambio en alguno de ellos afecta a la conectividad local y puede hacer necesario el intercambio de arista en otro par que inicialmente no lo requería.

En la figura 2.83 se muestran las mallas antes y después de aplicar esta técnica en dos áreas cuadriláteras.

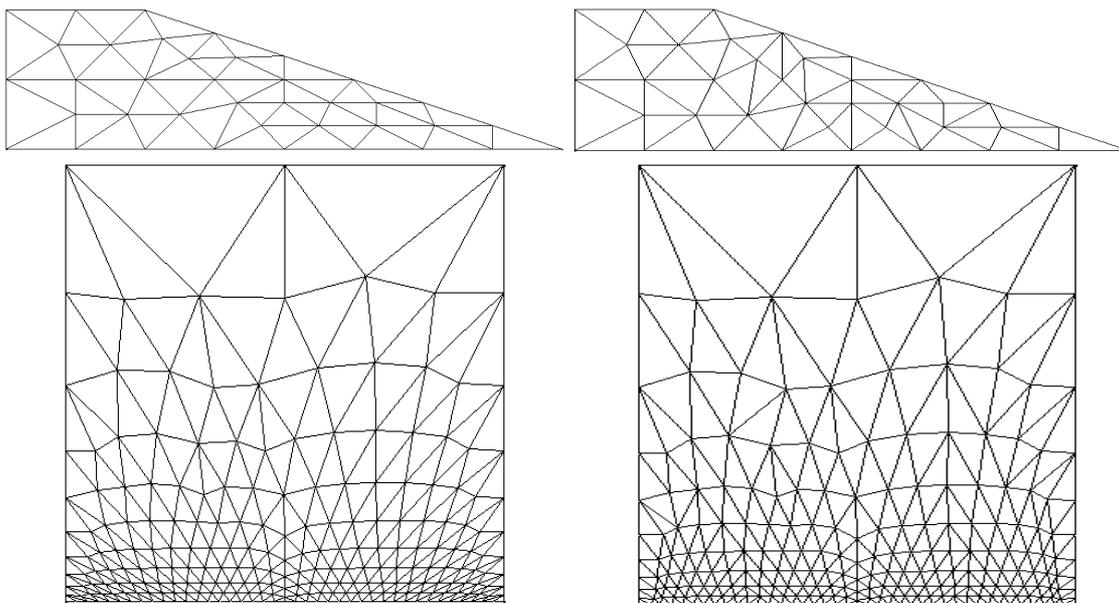


Figura 2.83. Intercambio de arista (mallas iniciales y finales)

Para llevar a cabo este intercambio de aristas es necesario conocer qué dos elementos comparten cada arista interior. Como ocurría en el reposicionamiento de nodos, es preferible conocer en todo momento esta información a realizar búsquedas a lo largo de toda la malla. En el primer caso, el coste computacional es proporcional al número de aristas y en el segundo a su cuadrado, ya que se requiere comprobar las tres aristas de cada elemento.

En la práctica, se consigue una mayor mejora de la calidad de la malla combinando las técnicas de reposicionamiento de nodos e intercambio de aristas de modo alternativo en un proceso iterativo que converge rápidamente (aproximadamente en 3 ó 4 pasos).

2.7. Coste Computacional

Los dos aspectos fundamentales a la hora de evaluar la calidad de un generador de malla son la calidad de la malla generada y el coste computacional del método, que se traduce en el tiempo necesario para generar la malla. El primer aspecto ha sido analizado a lo largo del capítulo, presentando los resultados obtenidos en distintas geometrías con los diferentes métodos desarrollados. En este punto se pretende analizar el coste computacional de estos métodos. Para ello se han generado mallas con los distintos métodos expuestos en los puntos anteriores en una estación de trabajo HP9000 C-160 de la serie 700. Las figuras 2.84-2.91 muestran los tiempos de utilización de CPU obtenidos con estos métodos y con los procedimientos de reposicionamiento de nodos e intercambio de aristas. Asimismo, en la tabla 2.1 se presentan los parámetros obtenidos al ajustar las gráficas a una función potencial $t = a \cdot x^b$, donde t es el tiempo de CPU y x el número de elementos, nodos o aristas, dependiendo del procedimiento considerado. En la última columna se muestra el factor de correlación del ajuste realizado. Valores próximos a 1 de este parámetro indican un buen ajuste de los datos empíricos a la curva obtenida.

En el caso del método de interpolación por proyectores transfinitos en áreas cuadriláteras, se han discretizado sucesivos cuadrados con el mismo número de divisiones en sus cuatro lados. La figura 2.84 muestra un comportamiento lineal del tiempo de generación frente al número de elementos cuadriláteros generados.

En el interpolador por proyectores transfinitos en áreas triangulares se han estudiado las mallas mixtas y las triangulares. Para ello se mallaron triángulos con el mismo número de divisiones por lado. De nuevo se puede apreciar en las figuras 2.85 y 2.86 el comportamiento lineal en ambos tipos de mallado.

En ambos interpoladores, la mayoría del tiempo se emplea en realizar las multiplicaciones de la función de interpolación. Para el cuadrilátero, cada nodo generado requiere 12 multiplicaciones, y para el triángulo, 9. No obstante, estas multiplicaciones se pueden reducir a la hora de programar agrupando términos con algún factor común (se reducen a 8 en el cuadrilátero y a 3 en el triángulo). Así pues, el tiempo de generación es proporcional al número de nodos y, por tanto, al número de elementos.

En cuanto al método FARG, se han realizado pruebas sobre áreas cuadriláteras únicamente, pues, como se comenta en puntos anteriores, la generación de malla en otro tipo de áreas está basada en ésta y su coste computacional será, por tanto, similar. Se utilizaron cuadrados con un vector de divisiones de $(N, N, 2N, 2N)$, de modo que se presenten en el proceso de generación de la malla los distintos casos posibles, esto es, cuadriláteros donde es posible la creación de una malla estructurada (y donde se aplica el método interpolador), casos simples y casos críticos. En estos tres casos la generación de nodos, aristas y elementos es directa, es decir, no se requieren búsquedas a lo largo de la malla ya creada ni elección entre distintos candidatos, como sucede en los métodos de frente de avance clásicos. Este hecho repercute en un coste computacional lineal con el número de elementos generados, frente al coste $O(n^2)$ ó $O(n \log(n))$ [Löh97] que presentan los métodos tradicionales de frente de avance. Los resultados obtenidos con este método (figuras 2.87 y 2.88) corroboran este hecho, pues las gráficas muestran un comportamiento prácticamente lineal frente al número de elementos generados. Cabe recordar aquí que la generación de mallas triangulares se produce por la división de elementos cuadriláteros en dos triángulos, proceso éste también lineal con el número de elementos finales.

Para el análisis del coste computacional del método de generación de mallas cuadriláteras no estructuradas se discretizaron cuadrados con un vector de divisiones $(N, N, 2N, 2N)$, teniendo en cuenta que en este caso N debe ser par. La figura 2.89 muestra los resultados obtenidos. El exponente de la curva de ajuste ($b=1.3$) ya no está tan cercano a 1 como en los métodos anteriores. Este método, tanto en la creación de la malla previa como en la generación de la malla final a partir de ésta, está basado en los métodos anteriores (FARG e interpolador) y por tanto, debe presentar el mismo coste computacional. La causa de la no linealidad que presentan los resultados hay que buscarla en la fase de borrado en memoria de la discretización previa. Este procedimiento requiere una reenumeración de los componentes de la malla de modo que no se produzcan saltos en la numeración de nodos, aristas y elementos dentro de cada área. Este proceso de reenumeración es más costoso, por su no linealidad, que la propia generación de la malla y repercute de un modo importante en el tiempo de generación de ésta.

El comportamiento de las técnicas de mejora *a posteriori* de calidad de la malla descritas en el punto 2.6, esto es, reposicionamiento de nodos e intercambio de aristas, se muestra en las figuras 2.90 y 2.91. Como se comentó en la descripción de estos métodos, el conocimiento de la vecindad de nodos y de elementos repercute en un coste computacional lineal.

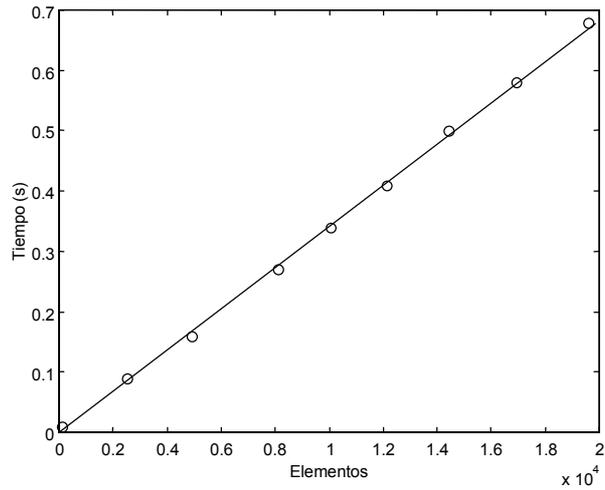


Figura 2.84. Tiempos de generación de mallas cuadriláteras en áreas cuadriláteras mediante interpolación

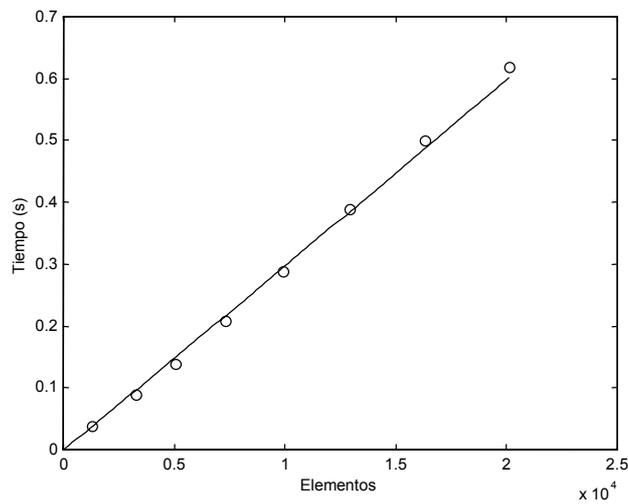


Figura 2.85. Tiempos de generación de mallas mixtas en áreas triangulares mediante interpolación

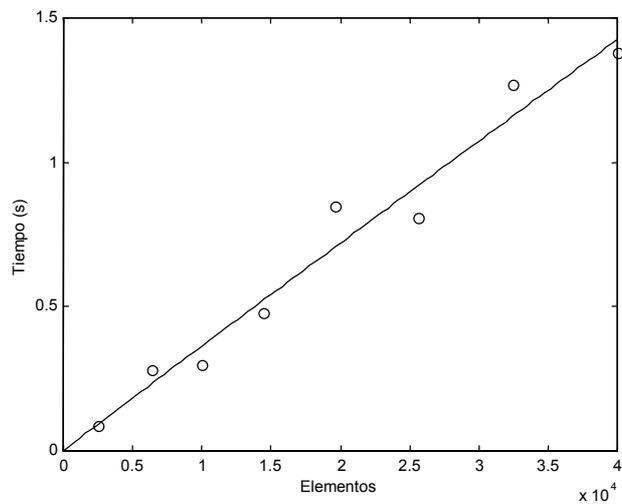


Figura 2.86. Tiempos de generación de mallas triangulares en áreas triangulares mediante interpolación

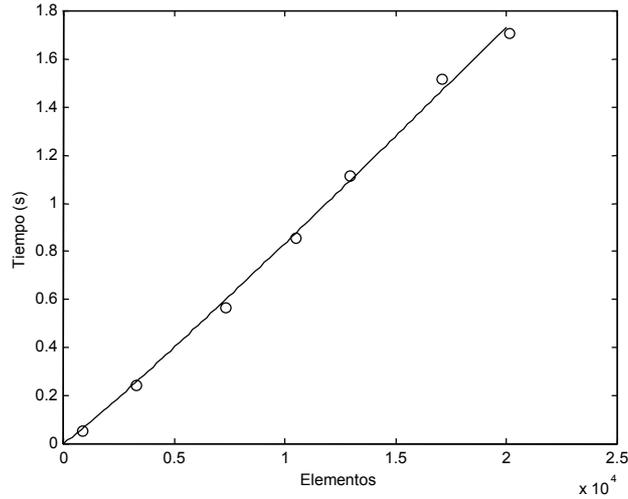


Figura 2.87. Tiempos de generación de mallas mixtas con el método FARG

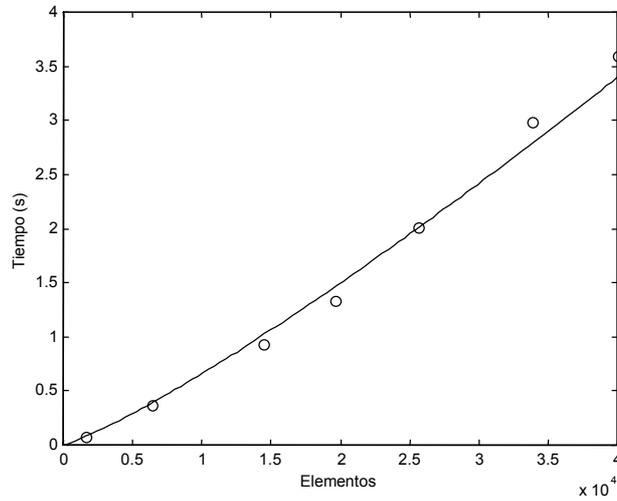


Figura 2.88. Tiempos de generación de mallas triangulares con el método FARG

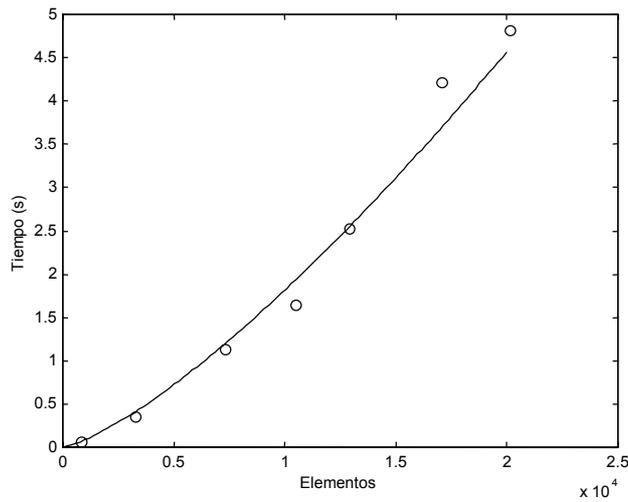


Figura 2.89. Tiempos de generación de mallas cuadriláteras no estructuradas

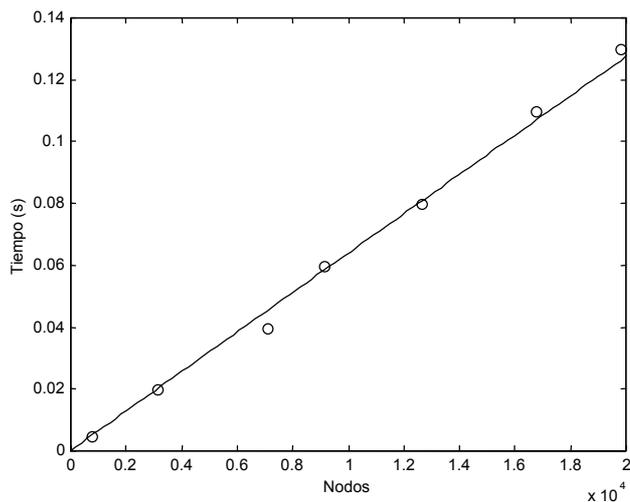


Figura 2.90. Tiempos de reposicionamiento de nodos

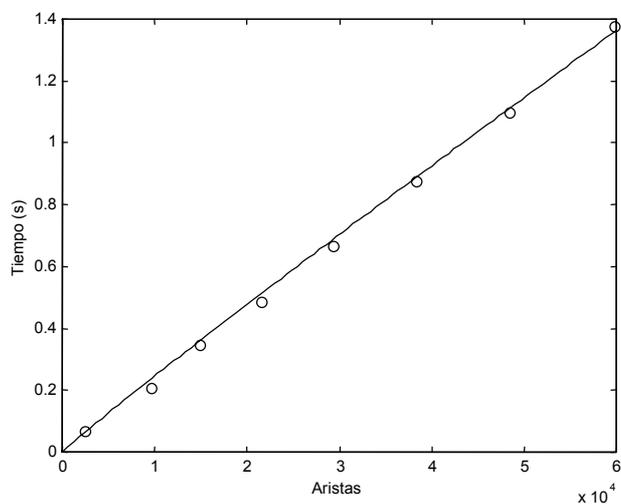


Figura 2.91. Tiempos de intercambio de aristas

Tabla 2.1. Ajuste de los tiempos de ejecución a la curva $t = a \cdot x^b$

	a	b	Correlación
Interpol. áreas cuadriláteras (m. cuadrilátera)	3.4e-5	0.99	0.95
Interpol. áreas triangulares (m. mixta)	2.7e-5	1.01	0.92
Interpol. áreas triangulares (m. triangular)	4.1e-5	0.99	0.96
FARG (malla mixta)	4.9e-5	1.06	0.98
FARG (malla triangular)	1.2e-5	1.18	0.86
Malla cuadrilátera no estructurada	8.4e-6	1.3	0.83
Reposicionamiento de nodos	6.7e-6	0.995	0.92
Intercambio de aristas	3.7e-5	0.96	0.85

Capítulo 3.

MÉTODOS DE GENERACIÓN DE MALLA SUPERFICIAL

En este capítulo se describen los métodos desarrollados para la generación de malla en determinadas superficies tridimensionales, entendiéndose por tales aquellas que no se encuentran contenidas en un plano y, por tanto, requieren tres coordenadas para ser definidas.

Los algoritmos de mallado utilizados, como ocurre en el caso bidimensional, precisan de un contorno previamente discretizado, dependiendo la malla final de la discretización de las líneas del contorno. Asimismo, estas mallas superficiales son el punto de partida para la discretización del volumen que encierran, por lo que la calidad de la malla de éste depende en gran medida de la calidad de la discretización superficial de su contorno.

En este apartado de la tesis se ha pretendido desarrollar métodos para superficies específicas que aprovechen el bajo coste computacional del método FARG bidimensional. Es decir, la mecánica de los métodos que se describen en este capítulo consiste en la transformación de la superficie real en otra que sea discretizable, bien por el método FARG bidimensional, bien por una generalización tridimensional de éste. Como muestra de las posibilidades de esta técnica, se han desarrollado métodos de generación de malla para superficies regladas, cuádricas y superficies de revolución, cuyo contorno esté definido por tres o cuatro líneas. Con estos tres tipos de superficie se abarca gran parte de las estructuras que se pueden presentar en un problema tridimensional como, por ejemplo, el análisis de cavidades u otros dispositivos de microondas. No obstante, superficies más complejas pueden ser discretizadas siguiendo una metodología multibloque, donde una superficie puede ser definida mediante la unión de distintas superficies, como se describe en el apéndice 1.

3.1. Superficies Definidas por su Contorno

Al definir un área en un plano mediante las líneas del contorno, se define de forma inequívoca la superficie que delimitan esas líneas. En el caso de tener una serie de líneas que forman un contorno cerrado en el espacio, la superficie que pueden definir queda indeterminada, existiendo infinitas posibilidades de generación de superficie. Por ejemplo, una circunferencia en el espacio puede definir el círculo interior que delimita, o bien un casquete esférico, o cualquier otra superficie que encaje en ese contorno. Según esto, denominaremos *superficies definidas por el contorno* en el espacio a aquellas superficies que se obtienen mediante una interpolación lineal de las líneas de su contorno, líneas consecutivas y que delimitan un espacio cerrado. La solución que se adopta en estos casos es aplicar una generalización tridimensional superficial del método FARG directamente sobre la superficie. Dado que este método incorpora en la generación de nodos interiores las técnicas de interpolación por proyectores transfinitos, la malla generada se adapta a la superficie más plana posible que se ajuste al contorno.

Por tanto, este método es aplicable tanto a superficies planas como a superficies regladas, es decir, aquellas superficies que se pueden obtener a partir del desplazamiento de una recta por el espacio. Este desplazamiento se produce utilizando una o dos líneas como guías de la recta generadora. Es decir, siempre que dos de las líneas del contorno opuestas (en el caso de superficies cuadriláteras) o dos de las líneas del contorno (para superficies triangulares) sean rectas, es posible generar el mallado superficial mediante el método FARG tridimensional (FARG3D). En este caso, una de estas líneas es la situación de partida de la recta generadora y la otra es la recta en la posición final. En la figura 3.1 se presentan las mallas obtenidas en dos superficies regladas, un tronco cónico y otra más arbitraria. La primera de ellas ha sido mallada con elementos triangulares y la segunda con cuadriláteros.

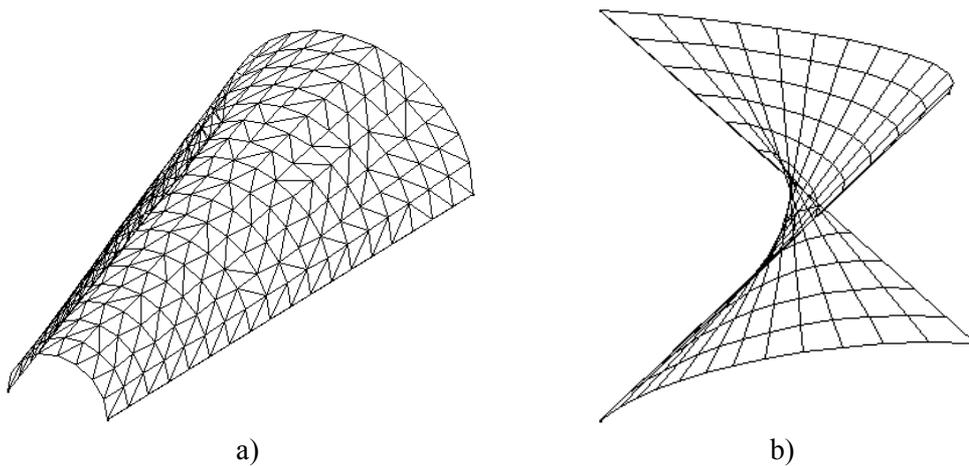


Figura 3.1. Superficies regladas: a) tronco cónico y b) arbitraria

Cabe destacar una vez más que la discretización de este tipo de superficies se realiza utilizando una generalización tridimensional del método FARG bidimensional para áreas triangulares y cuadriláteras desarrollado en el capítulo 2, no siendo necesario ningún tratamiento adicional.

3.2. Superficies Cuádricas

Las superficies que se tratan en este apartado son algunas de las cuádricas más utilizadas. Estas superficies están definidas por una ecuación de segundo grado, que se puede transformar en su forma reducida si, mediante giros y traslaciones, se sitúa la cuádrlica en el origen de coordenadas y de ángulos. Dentro de los tres tipos siguientes encontramos la mayor parte de las cuádrlicas que pueden despertar nuestro interés:

- La esfera, como caso particular del elipsoide.
- El elipsoide.
- El paraboloides elíptico.

El desarrollo de métodos para otros tipos de cuádrlicas, como paraboloides hiperbólicos o hiperboloides, sigue las mismas pautas que los comentados en este punto, siendo la única diferencia las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas.

3.2.1. Superficies Esféricas

Las superficies esféricas son las más importantes dentro de las cuádricas, ya que es un tipo de superficie muy utilizado y de fácil desarrollo. La esfera es un caso particular de las superficies elipsoidales en el que sus puntos equidistan del centro. La ecuación analítica reducida en coordenadas cartesianas que rige esta figura es

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (3.1)$$

donde R es el radio, y es válida si el centro está en el origen de coordenadas. Por tanto, para la definición completa de esta superficie son suficientes las líneas que forman el contorno y el centro.

Antes de explicar la solución que se adopta para realizar el mallado de una superficie de este tipo, es conveniente describir las posibles soluciones, más sencillas, que se barajaron y que fueron descartadas por no dar resultados lo suficientemente aceptables. Como se ha visto en el apartado 3.1, con el método FARG3D se pueden generar mallas en superficies curvas, obteniéndose una malla ajustada al contorno. Por tanto, la primera posibilidad que se plantea es realizar la discretización utilizando directamente este método, con la precaución de utilizar líneas de contorno que no estén todas contenidas en un plano, pues, en ese caso, se genera la malla de un círculo. Esta opción se descarta al comprobar que, aunque el resultado es regular, la malla no está contenida en la superficie esférica; se ajusta al contorno, pero queda aplanada, como se aprecia en el esquema de la figura 3.2. Esto es debido a que la técnica de interpolación que incorpora el método FARG3D sólo garantiza la generación de mallas coincidentes con las superficies cuando éstas son regladas.

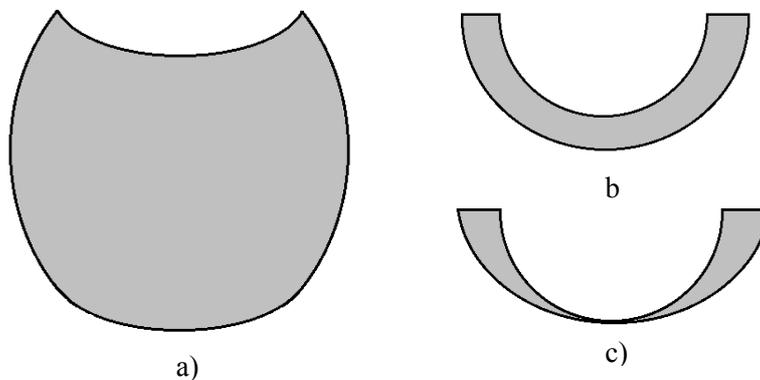


Figura 3.2. Casquete esférico: a) vista cuasi-frontal, b) vista superior real, c) vista superior de la malla generada con el método FARG3D

Una posible solución *a posteriori* de este problema es forzar a los nodos de la malla a que cumplan la ecuación de la superficie. La forma de realizar esta operación es sencilla, planteándola como una proyección de la malla, obtenida inicialmente en un plano, sobre la superficie real. Como todos los parámetros de la ecuación son conocidos, simplemente se trata de calcular el valor de una coordenada en función de las otras dos, de modo que las nuevas coordenadas pertenezcan a la superficie. Previamente se debe determinar cuál es la coordenada más adecuada para modificar de modo que el nodo sufra la menor variación posible. Por ejemplo, si la coordenada elegida es la z , se modificará la coordenada z de cada nodo en función las coordenadas x,y para que éste cumpla la ecuación de la superficie. En la figura 3.3 se muestra el resultado obtenido sobre un casquete hemiesférico cuando se utiliza esta técnica.

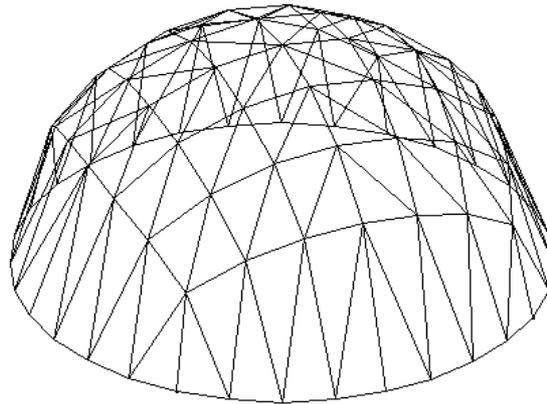


Figura 3.3. Mallado de un casquete esférico al proyectar la malla del plano sobre la superficie

Como se puede observar, el resultado es bastante defectuoso, sobre todo en las zonas próximas a las líneas del contorno. Es decir, al intentar ajustar la malla a la superficie, la calidad empeora. Este efecto se presenta en las zonas donde existe una rápida variación de la coordenada proyectada con respecto a las otras dos. Sin embargo, cuando esto no sucede, es decir, la malla que vamos a proyectar está “cerca” de un plano, los resultados son bastante buenos. En resumen, como método general, esta solución no es aceptable, sobre todo si tenemos en cuenta que, en el caso de otras cuádricas, como el elipsoide o el paraboloides, se acentúan estos problemas, ya que la variación de unas coordenadas respecto a otras puede ser más rápida.

En vista de que con este tipo de mallado de la superficie no se obtienen resultados aceptables, se plantea como solución definitiva realizar una parametrización de la superficie en coordenadas angulares y obtener el mallado de la misma sobre esas coordenadas. Veamos paso a paso el proceso seguido en el caso de las superficies esféricas:

1. En primer lugar, se procede a realizar una traslación de la esfera al origen de coordenadas. Esta operación es necesaria porque más adelante se hará uso de la forma reducida de la ecuación de la esfera.
2. Para realizar la conversión de coordenadas no basta con situar la esfera a la que pertenece la superficie en el centro, sino que además hay que orientarla en el espacio. Esta operación es necesaria porque al utilizar coordenadas angulares es importante observar que el ángulo varíe entre 0 y 2π para ϕ , y entre 0 y π para θ . Resulta fundamental tener la precaución de que no se produzcan saltos de ángulos al realizar la conversión de coordenadas, ya que esto provocaría una discontinuidad en el contorno. Para realizar este control en la esfera, en primer lugar se considera que la superficie esférica definida por un único contorno es como máximo una semiesfera. Si se quiere mallar una superficie mayor debe hacerse definiendo varios trozos de la misma por separado y definiendo la superficie final como una polisuperficie. Sabiendo que la superficie es un casquete esférico menor o igual que una semiesfera, el objetivo es situarlo en el semiplano $y \geq 0$, ya que en esta zona del espacio no se producen saltos de ángulos en ϕ .

Para ello, en primer lugar, se obtiene el punto medio de los puntos que definen las líneas del contorno. Posteriormente, se obtiene un plano, al que denominaremos *plano base* de la superficie, que en el caso de áreas triangulares es el definido por los tres puntos del área, y en áreas cuadriláteras se puede hallar mediante un procedimiento de regresión de los cuatro puntos del área. Seguidamente se obtiene el eje perpendicular al *plano base* y que contiene al punto medio calculado anteriormente. Mediante un cambio de ejes se

sitúa este eje sobre el eje y , de modo que la superficie quede centrada sobre este eje. Para realizar este cambio de ejes se sigue un procedimiento similar al descrito en el punto A2.1.

3. A continuación se realiza el cambio de coordenadas cartesianas x,y,z a angulares u,v , pudiendo identificar estas últimas con las coordenadas esféricas θ,ϕ . La transformación de coordenadas viene dada por:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ u &= \arccos \frac{z}{R} \\ v &= \arccos \frac{x}{R \cdot \sin u} \end{aligned} \quad (3.2)$$

De este modo, cada nodo del contorno tiene ahora sus coordenadas en el plano u,v . Es decir, el contorno de la superficie se encuentra ahora definido por dos coordenadas, frente a las tres cartesianas, de modo que la superficie es plana en las variables u,v .

4. El siguiente paso consiste en mallar el área del plano u,v . Para hacerlo, dado que todos los nodos del contorno de ésta están situados en un plano, se utiliza el método FARG bidimensional. En la figura 3.4a se muestra la malla de una superficie esférica en el plano de coordenadas angulares.
5. Una vez generada la malla paramétrica, ésta se debe transportar al espacio coordenado rectangular para obtener la discretización real. Este cambio de variable se realiza aplicando en cada nodo de la malla:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \sin u \cdot \cos v \\ y &= R \cdot \sin u \cdot \sin v \\ z &= R \cdot \cos u \end{aligned} \quad (3.3)$$

6. La siguiente operación consiste en deshacer el cambio de ejes; para ello se utiliza la matriz traspuesta de la de giro.
7. Por último, se deshace la traslación sumando a cada nodo las coordenadas del centro de la superficie.

Como resultado del proceso se obtiene la superficie mallada en la posición del espacio en la que había sido definida. En la figura 3.4b se muestra el resultado final, al aplicar la parametrización, de un mallado sobre una superficie esférica. Se puede observar que la única diferencia entre la malla en el plano angular y la real son las coordenadas de los nodos; la conectividad de ambas es idéntica.

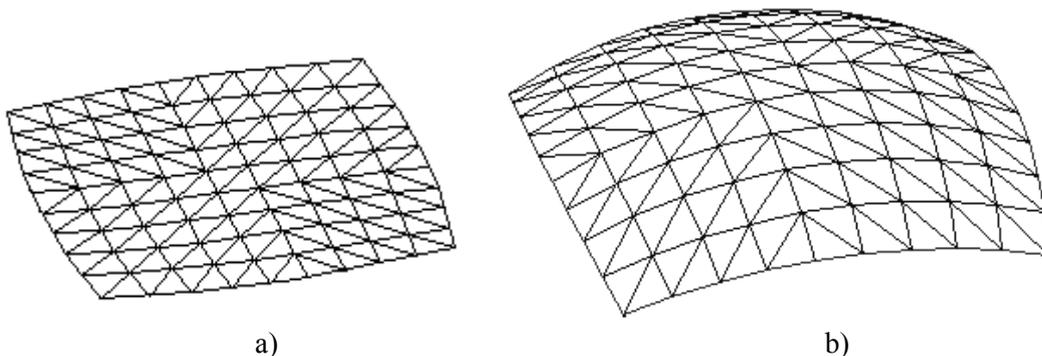


Figura 3.4. a) Aspecto de la malla en el plano angular, b) malla resultante

Esta técnica basada en transformación de coordenadas rectangulares a angulares es aplicable a todo tipo de superficies triangulares. Sin embargo, en el caso de superficies cuadriláteras, no generará una malla correcta si al menos dos líneas consecutivas del contorno de la superficie esférica se encuentran en el mismo plano. En tal caso, el área en el plano angular será un cuadrilátero degenerado, pues las líneas consecutivas pertenecientes a un mismo plano en el espacio cartesiano estarán superpuestas (total o parcialmente) o serán consecutivas en el plano u,v . Esta situación aparece, por ejemplo, en un casquete esférico de contorno circular, donde las cuatro líneas del contorno se encuentran en el mismo plano y ello implica que queden superpuestas dos a dos en el plano angular.

Este tipo de situaciones requiere un tratamiento especial, también aplicable como método general a superficies esféricas poligonales, es decir, aquéllas con más de cuatro líneas en su contorno. Este tratamiento consiste en la descomposición de la superficie inicial en tantas superficies esféricas triangulares como líneas tenga el contorno. Este proceso, basado en la creación de elementos de geometría auxiliares (puntos, líneas y superficies), se puede automatizar y el coste que añade al método previamente descrito es despreciable. Para ello, en primer lugar, se ha de crear un punto en la intersección del vector perpendicular al plano que contiene a las dos o más líneas coplanares y la esfera. A continuación, se generan sendas líneas desde cada uno de los puntos de geometría del contorno de la superficie y el punto creado. Con esas líneas y las del contorno se crean las superficies triangulares, que sí pueden ser discretizadas con el método anteriormente descrito. En la figura 3.5 se muestra la discretización obtenida en una semiesfera y la malla de una esfera formada por seis superficies.

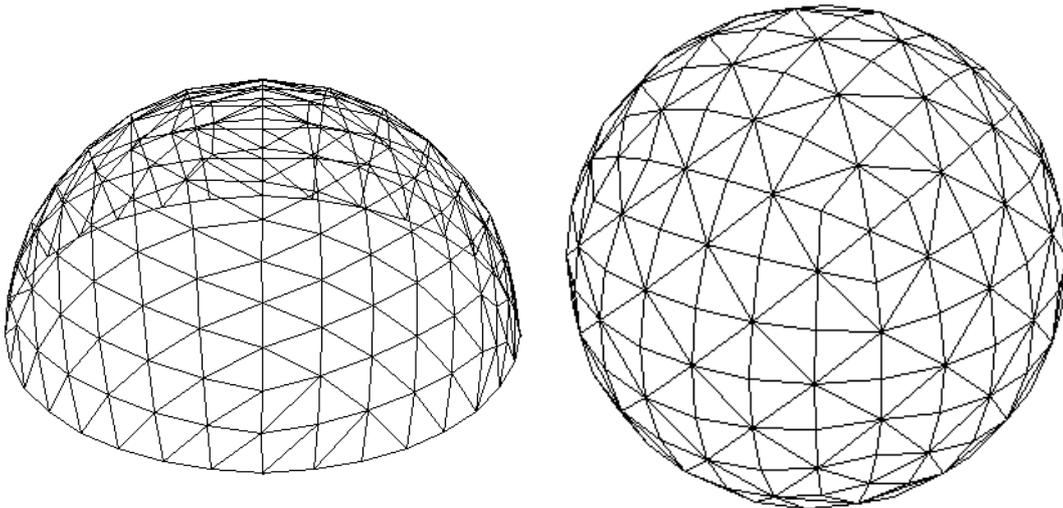


Figura 3.5. Superficies esféricas malladas mediante parametrización angular

3.2.2. Superficies Elipsoidales

El elipsoide es una superficie cuádrica cerrada que presenta cortes horizontales y verticales elípticos. Aquellas superficies con estas características se denominan superficies elipsoidales o elípticas, y de ellas se ocupa este apartado. La ecuación reducida que define el elipsoide es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.4)$$

ecuación válida si el elipsoide se encuentra centrado en el origen de coordenadas y sus ejes coinciden con los ejes coordenados. Los valores de las constantes a, b, c se corresponden con el máximo que alcanza cada coordenada en el elipsoide: a es el máximo valor que alcanza x , b el de y , y c el de z , como ilustra la figura 3.6.

Al definir la superficie elíptica, además de las líneas del contorno, es necesario especificar el centro, los ejes en el espacio, y los máximos sobre los ejes, es decir, las constantes a, b, c .

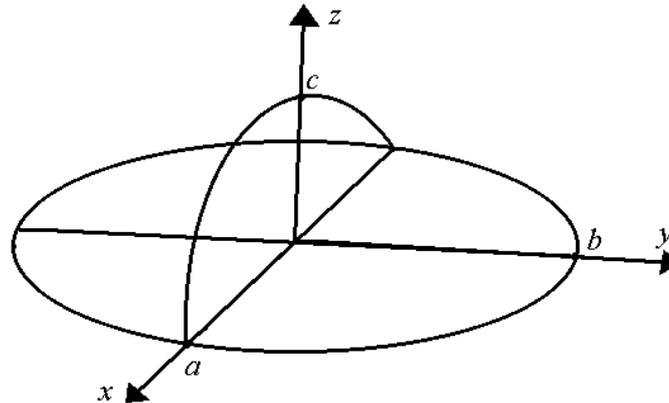


Figura 3.6. Ejes de un elipsoide

Para mallar una superficie elíptica se utiliza el mismo método de parametrización angular utilizado en las superficies esféricas, aunque en este caso las funciones de transformación de coordenadas son una generalización de las esféricas. El proceso es bastante parecido, pero presenta algunas peculiaridades que merecen ser tenidas en consideración, por lo que es conveniente verlo de nuevo de forma detallada:

1. En primer lugar se traslada el centro del elipsoide al centro de coordenadas, al igual que en la esfera.
2. El paso siguiente consiste en un giro que haga coincidir los ejes del elipsoide con los ejes coordenados. Los ejes del elipsoide en el espacio son estructuras de datos de tipo *eje* (descrita en el apéndice 1). Son, por tanto, tres vectores que permiten construir la matriz de transformación

$$M = \begin{pmatrix} eje_{1x} & eje_{1y} & eje_{1z} \\ eje_{2x} & eje_{2y} & eje_{2z} \\ eje_{3x} & eje_{3y} & eje_{3z} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

El orden de los ejes no es irrelevante. Por razones similares a las comentadas en la esfera, es decir, el problema de discontinuidad de ángulos, no es posible mallar superficies con una apertura angular superior a la de un semielipsoide. De nuevo aquí interesa situar la superficie elíptica en el semiespacio $y > 0$. El eje que interesa situar sobre el eje y es eje_2 , de modo que coincida con la coordenada y . El criterio que se sigue para buscar el eje que se debe situar sobre y es que éste sea lo más perpendicular posible a la superficie, para lo cual se define un plano en la base de la superficie a partir de los puntos de geometría del contorno, tal como se describió para las superficies esféricas, y se busca el eje más cercano

a la perpendicular a dicho plano. Una vez obtenida la matriz adecuada se aplica el giro a cada uno de los nodos del contorno:

$$P' = M \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3. Una vez situados los ejes de la superficie sobre los ejes coordenados de una forma apropiada, la siguiente operación consiste en realizar el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas angulares:

$$u = \arccos \frac{z}{c} \quad (3.7)$$

$$v = \arccos \frac{x}{a \cdot \sin u} = \arcsen \frac{y}{b \cdot \sin u}$$

4. A continuación se aplica el método FARG bidimensional sobre el contorno del plano de variables angulares. Existe un caso en el que se debe realizar una pequeña intervención sobre el contorno en el plano antes de aplicar el método discretizador. Esto sucede cuando se pretende discretizar una superficie triangular y uno de los nodos que coincide con un punto de geometría (es decir, la intersección de dos líneas del contorno), se encuentra sobre el eje z una vez realizado el giro, lo que equivale a decir que en ese punto $u=0$ ó $u=\pi$. En estos dos casos v puede adquirir cualquier valor entre 0 y 2π . En esta situación, este nodo no se transforma, adquiriendo sus nodos vecinos en cada una de las líneas a las que pertenece el papel de vértices, de modo que la superficie triangular se convierte en el plano angular en un área cuadrilátera que presenta un lado con una sola división. En la figura 3.7a se muestra un ejemplo de malla en el plano angular en el que se presenta este caso. El contorno en este ejemplo está compuesto por tres líneas. En el plano angular aparecen cuatro, pero en realidad el lado superior del cuadrado no se corresponde con una línea sino con la arista que une los últimos nodos vecinos del nodo problemático.

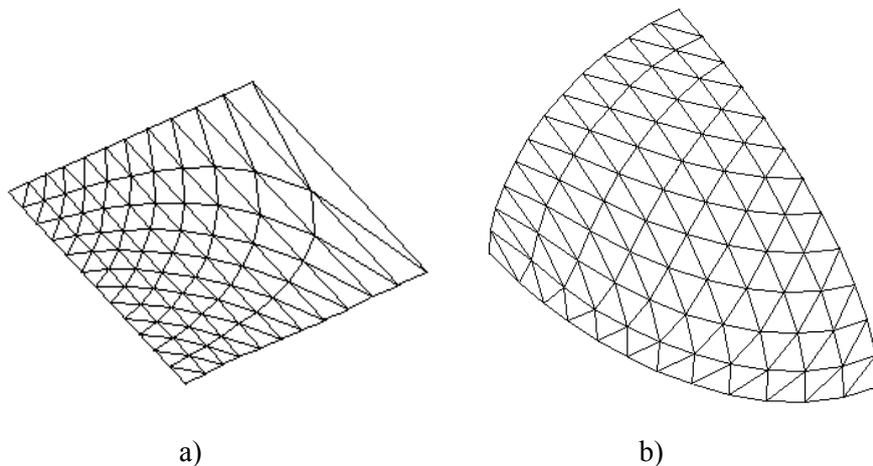


Figura 3.7. a) Malla en el plano angular de una superficie elipsoidal, b) malla final

5. Una vez obtenida la malla en el plano angular se debe deshacer el cambio de variables realizado previamente para obtener la malla en coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \text{sen } u \cdot \cos v \\y &= b \cdot \text{sen } u \cdot \text{sen } v \\z &= c \cdot \cos u\end{aligned}\tag{3.8}$$

6. A continuación se debe deshacer el giro inicial para devolver la superficie a su orientación real. Para ello se aplica la matriz (3.5), pero traspuesta (para obtener el efecto contrario) sobre cada uno de los nodos de la malla.

$$P = M^T \cdot \begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix}\tag{3.9}$$

7. Por último, se deshace la traslación del centro de coordenadas.

Una vez finalizado el proceso, se obtienen resultados como los mostrados en las figuras 3.7b ó 3.8.

En el caso de intentar mallar un semielipsoide sucede algo similar a lo que se ha visto para la semiesfera y la solución aplicada es la misma: descomponer el semielipsoide en cuatro superficies triangulares auxiliares que facilitan el mallado. De no hacerlo así, una de las variables angulares no tendría variación, y sería imposible generar la malla.

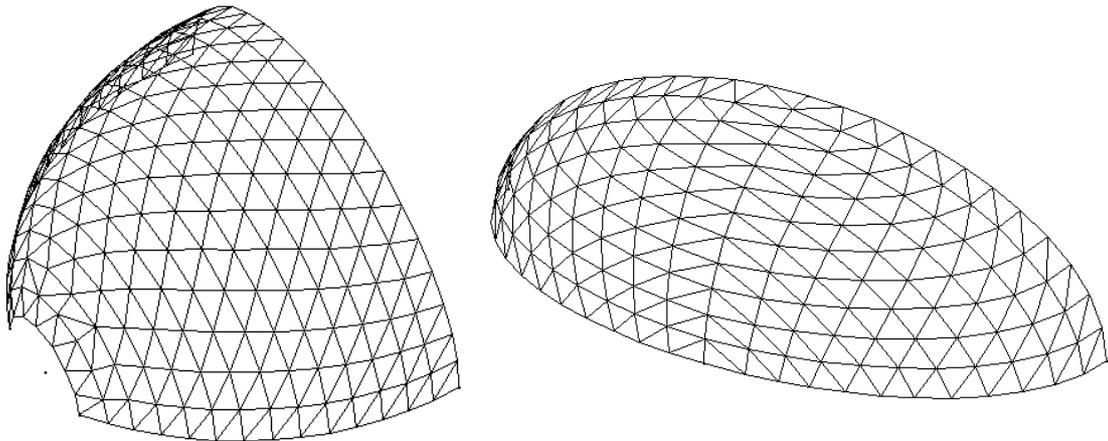


Figura 3.8. Mallas de superficies elipsoidales

3.2.3. Superficies Paraboloides Elípticas

Este tipo de cuádrica está caracterizado por las parábolas que se obtienen en sus cortes verticales y las elipses de sus cortes horizontales. Se trata de una cuádrica abierta, al contrario que el elipsoide. La ecuación reducida que presenta este tipo de cuádrica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}\tag{3.10}$$

La superficie definida por (3.10) es un paraboloides con el vértice (punto por el que pasan todas las parábolas) situado en el centro de coordenadas y el eje de las parábolas situado sobre el eje z . Las constantes a, b, c están relacionadas con los ejes de las elipses (a y b), y con la apertura del paraboloides (c). Para la definición completa de la superficie son necesarios los tres

ejes del paraboloides al que pertenece (su orientación) junto con los parámetros asociados a cada eje, es decir, las constantes a, b, c . También son necesarios el vértice del paraboloides y, por supuesto, las líneas del contorno. En la figura 3.9 se muestra la situación de las constantes a, b, c y el vértice en un paraboloides.

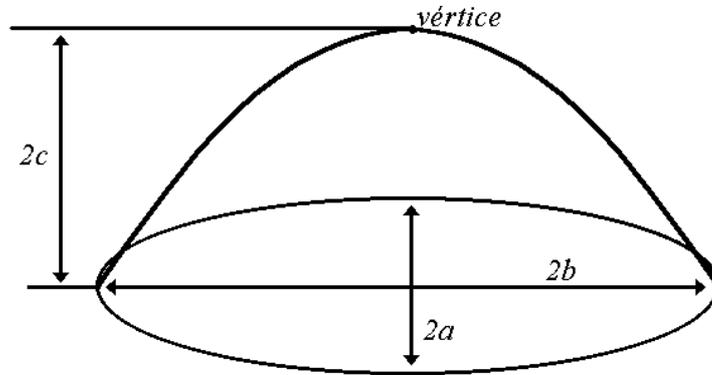


Figura 3.9. Parámetros que definen un paraboloides

Para realizar el mallado de una superficie paraboloides se sigue el mismo procedimiento que en las cuádricas anteriores. En primer lugar se procede a la traslación del vértice al centro de coordenadas y a la situación de los ejes del paraboloides sobre los ejes coordenados de manera similar a lo comentado en las superficies elipsoidales. A continuación se procede a la parametrización de la superficie en dos variables, pero, a diferencia de las situaciones anteriores, ahora no son ambas coordenadas angulares, sino que una de ellas es una coordenada lineal asociada a la altura del paraboloides sobre el eje z . Si las coordenadas angulares utilizadas en el caso de superficies elipsoidales se corresponden con las coordenadas angulares esféricas, en este caso se puede hablar de una analogía con dos de las coordenadas cilíndricas (ϕ, z) . Las ecuaciones (3.11) muestran el cambio de variable aplicado.

$$u = \sqrt{\frac{z}{c}} \quad (3.11)$$

$$v = \arctan \frac{y \cdot a}{x \cdot b}$$

Se puede constatar que u es simplemente z comprimida, y v se corresponde con la coordenada cilíndrica angular ϕ . Esta transformación sigue siendo igual de efectiva que la anterior, pues se consigue una descripción de la superficie con dos coordenadas, y, por lo tanto, en un plano, de tal forma que se puede aplicar una vez más el método FARG bidimensional para, posteriormente, deshacer el cambio de coordenadas y situar la malla angular en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot u \cdot \cos v \\ y &= b \cdot u \cdot \sen v \\ z &= c \cdot u^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Seguidamente se deshace el cambio de ejes visto anteriormente, y se concluye el proceso trasladando el vértice del paraboloides al lugar que ocupaba originalmente.

En caso de definir las líneas del contorno en un plano horizontal del paraboloides, formando una elipse, no existe variación de la variable u al realizar el cambio de variables. Por tanto, este caso debe ser tratado de forma particular, como ocurría en las superficies elipsoidales, procediendo a la construcción de superficies auxiliares que se malla por separado y, posteriormente, se agrupa toda la malla en la misma superficie. La figura 3.10 muestra la malla obtenida con este método en una superficie parabólica, donde el contorno es coplanar.

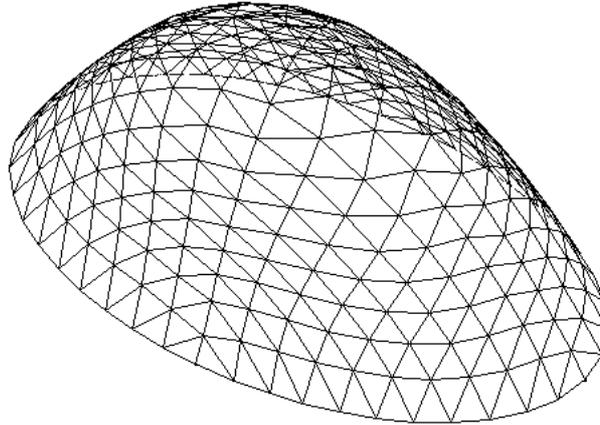


Figura 3.10. Malla de un paraboloides elíptico

3.3. Superficies de Revolución

La característica principal de estas superficies es su simetría de revolución, es decir, todos los cortes con planos que contengan este eje dan como resultado el mismo perfil. Son superficies que se crean al girar una línea generatriz respecto al eje de revolución. En la figura 3.1a se muestra un ejemplo de este tipo de superficies cuando la línea generatriz es una recta oblicua al eje de rotación. En general, las superficies de revolución pueden ser generadas por líneas generatrices arbitrarias. La figura 3.11 muestra el proceso de generación de una superficie de revolución a partir de su línea generatriz, en este caso una cónica.

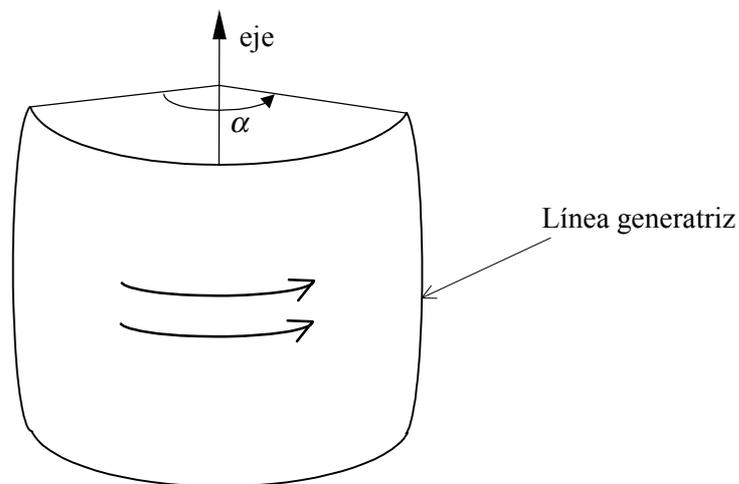


Figura 3.11. Superficie generada por una línea al girarla α grados

Para afrontar el mallado de este tipo de superficies se utiliza un método de transformación de coordenadas similar a los utilizados con las superficies cuádricas. Veamos los pasos seguidos para obtener el mallado final:

1. En primer lugar se realiza la misma traslación y el mismo cambio de ejes que se ha descrito en los puntos anteriores.
2. Una vez situado el eje de revolución sobre el eje z , se procede a realizar el cambio de variables $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ expresado mediante

$$\begin{aligned} u &= \arctan \frac{y}{x} \\ v &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ w &= z \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde u es el ángulo de giro, v es la distancia del nodo que se quiere transformar al eje de revolución, y w es la proyección del nodo sobre el eje de revolución, como muestra la figura 3.12.

Dada la geometría de este tipo de superficies, esta transformación en coordenadas cilíndricas es más útil que los tipos de transformación anteriormente descritos, pues no produce situaciones ambiguas como las existentes en las cuádricas y, en general, la calidad de la malla final es superior. En esta nueva transformación son necesarias tres coordenadas y, por lo tanto, los nodos transformados de la superficie no se encontrarán sobre un plano, como sucedía en los casos anteriores. Esto hace inviable la aplicación del método FARG bidimensional sobre la superficie transformada. Sin embargo, dado que las superficies de revolución presentan una línea (en el caso de las triangulares) o dos líneas opuestas (en el caso de las cuadriláteras) con variación únicamente en ϕ , el cambio de coordenadas transforma estas líneas (arcos de circunferencia) en rectas y la superficie definida en el nuevo espacio es reglada, lo que posibilita la aplicación directa del método FARG3D.

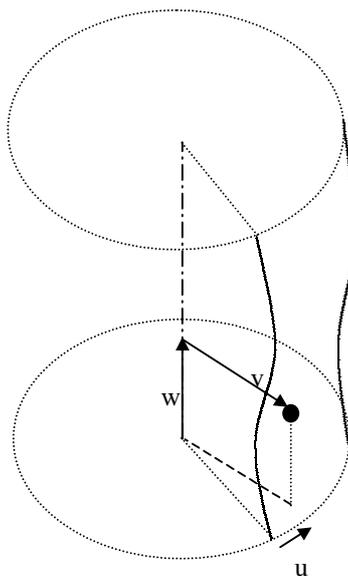


Figura 3.12. Transformación de coordenadas en superficies de revolución

En las figuras 3.13a y 3.14a se muestra el aspecto que presentan las mallas en coordenadas cilíndricas al aplicar el método FARG3D.

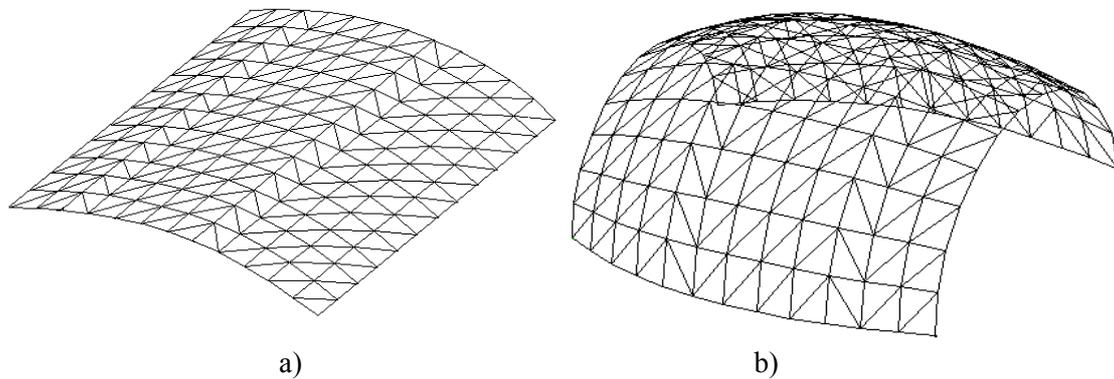


Figura 3.13. a) Malla en el espacio auxiliar, b) malla en la superficie de revolución

3. El siguiente paso consiste en deshacer el cambio de coordenadas en todos los nodos de la superficie, tanto los del contorno como los que se han creado en el interior de la malla:

$$\begin{aligned}x &= v \cdot \cos u \\y &= v \cdot \sen u \\z &= w\end{aligned}\tag{3.15}$$

4. Por último, se procede a deshacer los cambios de ejes y la traslación del centro.

Este método para mallar superficies de revolución ofrece buenos resultados, además de una gran versatilidad para crear superficies más complejas. Cualquier superficie de revolución se puede construir de esta forma. En la figura 3.13 se presenta un ejemplo de una posible superficie de revolución. En la figura 3.14 la cónica que se gira es una hipérbola y, por tanto, el resultado es una porción de hiperboloide circular. Utilizando el concepto de polilínea se pueden obtener superficies de revolución al girar líneas dispuestas de forma consecutiva. La figura 3.15 muestra una superficie obtenida de este modo y da una idea de las posibilidades ofrecidas por este tipo de superficies.

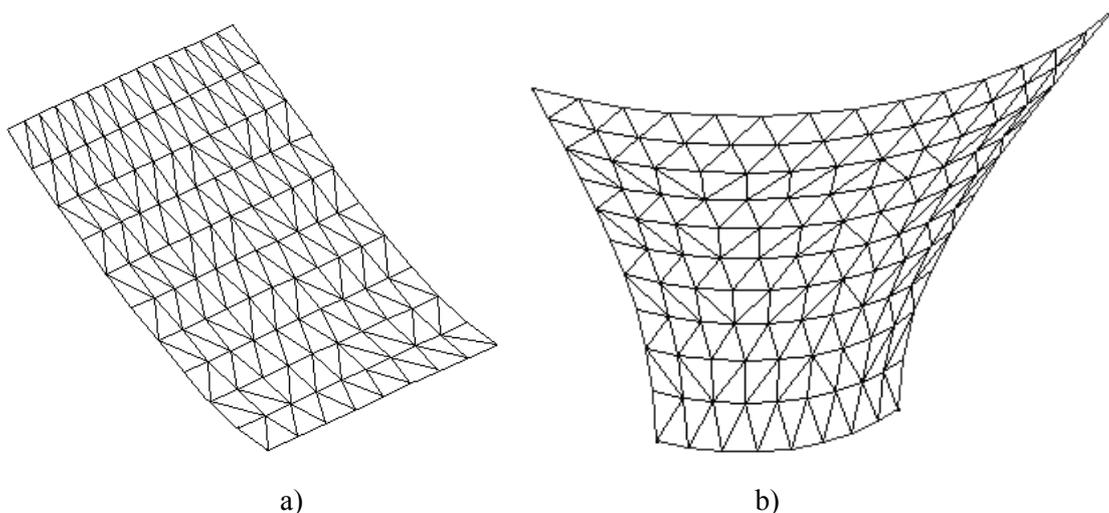


Figura 3.14. Revolución de una hipérbola: a) malla en el espacio auxiliar, b) malla final

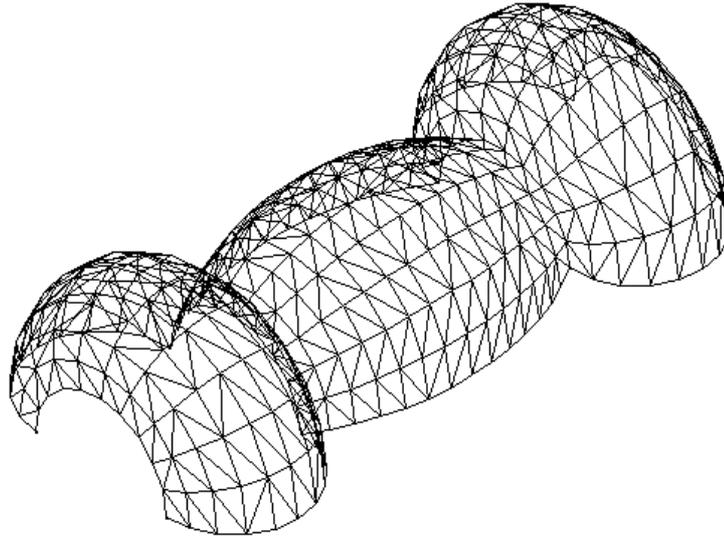


Figura 3.15. Superficie de revolución definida por una polilínea generatriz

3.4. Mejora *A Posteriori* de la Calidad de la Malla

Como en el caso bidimensional, se pueden aplicar procedimientos de mejora o regularización a la malla final. Sin embargo, en este caso la técnica de reposicionamiento de nodos es únicamente aplicable en la malla del espacio transformado, y no en la malla real. Esto es así porque, si bien se obtienen mallas más regularizadas o suavizadas, ya no está garantizado que los nodos de éstas pertenezcan a la superficie.

Sí es posible la aplicación de la técnica de intercambio de aristas en la malla real, pues ésta no modifica las coordenadas de los nodos, y únicamente afecta a la conectividad de las mallas. Además, dado que la elección de arista que divide los elementos cuadriláteros en triangulares se realiza en la generación de la malla transformada, es posible que la transformación al espacio real modifique las coordenadas de los nodos de tal modo que se consigan elementos triangulares más regulares dividiendo los cuadriláteros por la arista diagonal alternativa a la inicialmente seleccionada.

3.5. Coste Computacional

Para la evaluación del coste computacional de los métodos anteriormente descritos se realizaron distintas discretizaciones triangulares de diferentes superficies en una estación de trabajo HP9000 C-160 de la serie 700, incrementando paulatinamente el número de caras o elementos de la malla. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 3.16, donde se puede apreciar un comportamiento prácticamente lineal para las superficies regladas, es decir, para el método FARG3D, y un comportamiento más cercano al lineal que al cuadrático para las superficies cuádricas y de revolución. El mayor coste computacional que presentan las cuádricas y las de revolución frente a las regladas se debe a las traslaciones, giros y transformación de coordenadas directas e inversas necesarias en estos casos para que el método FARG bidimensional o FARG3D pueda ser aplicado. La tabla 3.1 muestra los valores obtenidos al ajustar los datos a una función potencial $t = a \cdot x^b$, donde t es el tiempo invertido en la generación de la malla y x el número de elementos generados.

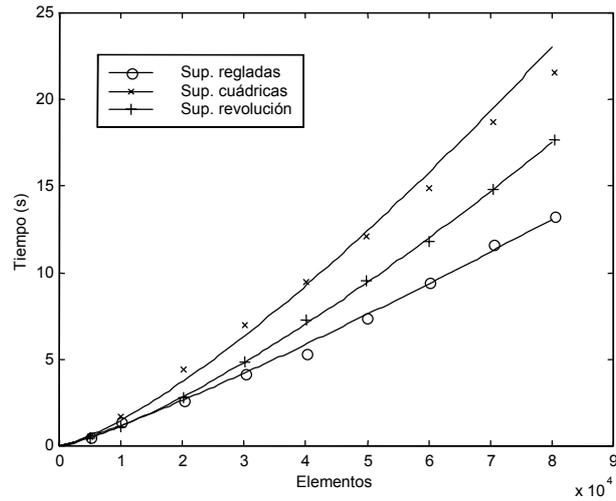


Figura 3.16. Tiempos de generación de mallas triangulares en distintos tipos de superficie

Tabla 3.1. Ajuste de los tiempos de generación de malla a la curva $t = a \cdot x^b$

	a	b	Correlación
Superficies regladas (FARG3D)	2.75e-5	1.16	0.966
Superficies cuadráticas	7.96e-5	1.32	1.18
Superficies de revolución	6.2e-5	1.32	0.998

Capítulo 4.

MÉTODOS DE GENERACIÓN DE MALLA VOLUMÉTRICA

La resolución de problemas tridimensionales como, por ejemplo, el cálculo de las frecuencias de resonancia en una cavidad de microondas mediante el MEF requiere una discretización del dominio del problema en elementos volumétricos. Del mismo modo que los métodos de discretización bidimensionales comentados en el capítulo 2 generan la malla a partir de la discretización del contorno del área, los métodos descritos en este capítulo requieren una discretización previa de las superficies que delimitan el volumen que se pretende mallar. En otros tipos de métodos, como los de superposición de retícula, la malla del contorno se genera a la vez que la malla volumétrica; en estos casos se especifica el número de elementos aproximado de la malla y, a partir de este dato, se genera la malla del volumen. El inconveniente fundamental de esta alternativa es la dificultad que plantean las diferentes discretizaciones de las interfaces entre los distintos volúmenes cuando se pretende utilizar, como es el caso, una metodología multibloque. Por esta razón y por mantener la misma estructura de datos utilizada en el caso bidimensional (apéndice 1), los métodos de mallado volumétrico descritos en este capítulo son procesos jerárquicos; es decir, el mallado unidimensional hace posible el superficial, y el superficial el volumétrico.

Se presentan en este capítulo dos métodos de generación de malla volumétrica. El primero de ellos, basado en la interpolación por proyectores transfinitos, permite la discretización estructurada de volúmenes hexaédricos en hexaedros o en tetraedros, imponiendo ciertas restricciones a la discretización del contorno. El segundo es un método de generación de malla tetraédrica no estructurada más general que hace uso de la filosofía de frente de avance.

4.1. Generación de Malla Estructurada

Como muestra de la generalización volumétrica de los métodos basados en la interpolación por proyectores transfinitos descritos en el capítulo 2, en este punto se presenta un método de generación de malla estructurada para volúmenes hexaédricos generalizados, entendiendo por tales aquellos volúmenes definidos por seis superficies cuadriláteras (planas o curvas), como los mostrados en la figura 4.1.

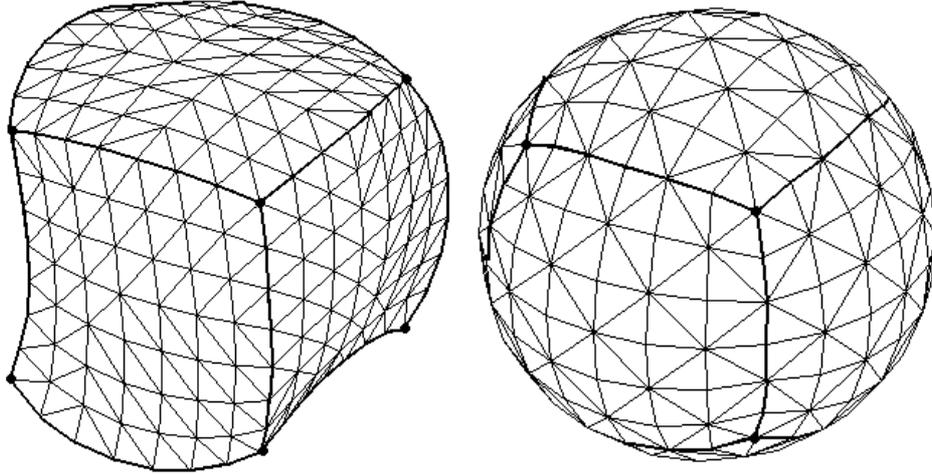


Figura 4.1. Volúmenes de contorno curvo definidos y mallados como hexaedros generalizados

La generación de mallas estructuradas, como ocurría en el caso bidimensional, restringe en gran medida las posibilidades de discretización del contorno del volumen. Para que sea posible esta discretización es necesario que las líneas que forman el contorno del volumen y que varían en la misma coordenada natural (u , v o w) de éste presenten el mismo número de divisiones. De esta forma es posible generar una retícula cúbica dentro del volumen.

Como en el caso bidimensional, para conseguir buenos resultados frente a contornos irregulares es necesario contar con una función de interpolación que tenga presente la posición de los nodos del contorno en el cálculo de la posición de los nodos interiores. Por esta razón se hace uso de nuevo de un método basado en proyectores transfinitos. Este método consiste en la construcción de una línea de proyección para cada par de nodos opuestos de la discretización del contorno del hexaedro.

Sean S_1, S_2, \dots, S_6 las funciones paramétricas que definen cada superficie del contorno del hexaedro y que, una vez discretizadas éstas, vienen descritas por sendas matrices que contienen las posiciones, mediante sus tres coordenadas rectangulares, de los nodos de cada superficie (figura 4.2). Las coordenadas naturales de estas superficies se definen como:

$$u, v, w = \frac{j}{n} \quad (4.1)$$

donde $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, siendo n el número de divisiones de la línea y que puede ser distinto para las distintas coordenadas naturales.

A partir de estas definiciones previas, se pueden definir los proyectores transfinitos como:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (1-w)S_1(u, v) + wS_2(u, v) \\ \Gamma_2 &= (1-v)S_3(u, w) + vS_5(u, w) \\ \Gamma_3 &= (1-u)S_6(v, w) + uS_4(v, w) \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde cada Γ_i proporciona 3 valores (las tres coordenadas rectangulares de los nodos):

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \Gamma_{i_x} \\ \Gamma_{i_y} \\ \Gamma_{i_z} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

En la obtención de la función de interpolación hay que tener en cuenta que, para que coincida con el contorno en valores en aquellos valores de (u,v,w) que pertenezcan a él, es necesario restarle los términos comunes a la suma de los proyectores transfinitos, con lo que se obtiene:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left[(1-w)S_1(u,v) + wS_2(u,v) + (1-v)S_3(u,w) + vS_5(u,w) + (1-u)S_6(v,w) + uS_4(v,w) \right] - \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &(1-u)(1-v)(1-w)S_1(0,0) + u(1-v)(1-w)S_1(1,0) + (1-u)v(1-w)S_1(0,1) + \\ &+ uv(1-w)S_1(1,1) + (1-u)(1-v)wS_2(0,0) + u(1-v)wS_2(1,0) + \\ &+ (1-u)vwS_2(0,1) + uvwS_2(1,1) \end{aligned} \right] \quad (4.4)$$

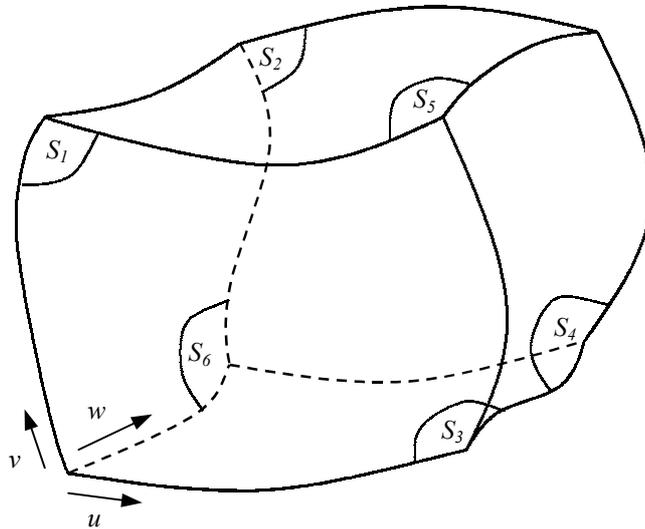


Figura 4.2. Funciones de las superficies y coordenadas naturales en un hexaedro generalizado

Si m son las divisiones en la dirección u , n lo son en v , y p en w , como resultado de aplicar (4.4) de forma sistemática y ordenada sobre cada combinación de nodos del contorno, se obtienen $(m-1) \cdot (n-1) \cdot (p-1)$ nodos en el interior del hexaedro. Los nodos consecutivos son unidos mediante aristas, las caras se crean a partir de cuatro aristas consecutivas que forman un cuadrilátero, y, por último, con seis caras que definen un volumen se crea cada elemento hexaédrico del mallado. Para saber en cada momento los nodos vecinos, las aristas que forman cada cara, y las caras que forman cada elemento es necesario un control muy exhaustivo de los nodos que se generan. Esto implica que en este método sea más compleja la generación de la conectividad de la malla que la geometría de ésta, es decir, la posición de los nodos.

La generación de una malla tetraédrica requiere la división de cada hexaedro en cinco o seis tetraedros. Ambas descomposiciones son interesantes porque mantienen intacta la geometría de la malla, pues no se generan nuevos nodos, pero cambian completamente su conectividad, ya que se crean nuevas aristas y las caras cuadriláteras y volúmenes hexaédricos son sustituidos por caras triangulares y volúmenes tetraédricos. Esta transformación de la conectividad de nuevo conlleva una compleja gestión de los componentes de la malla y elevados requerimientos de memoria.

La discretización triangular del contorno del elemento hexaédrico marca qué tipo de descomposición se puede realizar. De hecho, la descomposición 1:5 de la figura 4.3 requiere la existencia de 4 vértices del hexaedro en los que coincidan 6 aristas y otros 4 en los que sólo coincidan 3 (en la figura 4.4 se muestran estas situaciones y en la 4.5 otras que no cumplen esta condición). Otras discretizaciones permiten la descomposición 1:6, que consiste en la creación de dos pentaedros que, a su vez, se descomponen en tres tetraedros cada uno. Tampoco es posible esta descomposición en cualquier caso, y se pueden presentar discretizaciones del contorno que no permitan la descomposición del hexaedro sin generación de nodos.

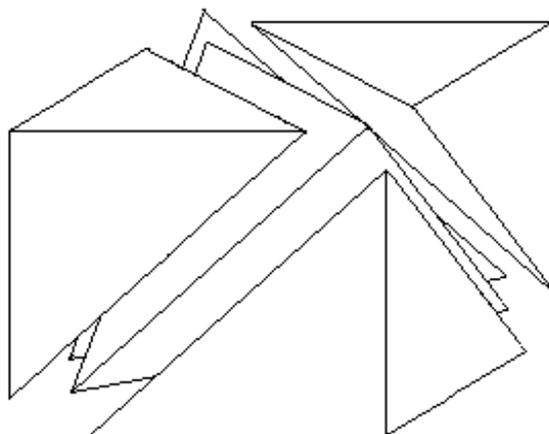


Figura 4.3. División de un hexaedro en 5 tetraedros

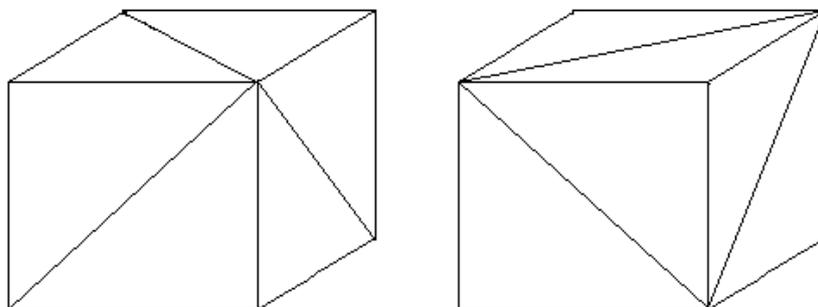


Figura 4.4. Hexaedros que permiten la descomposición en 5 tetraedros

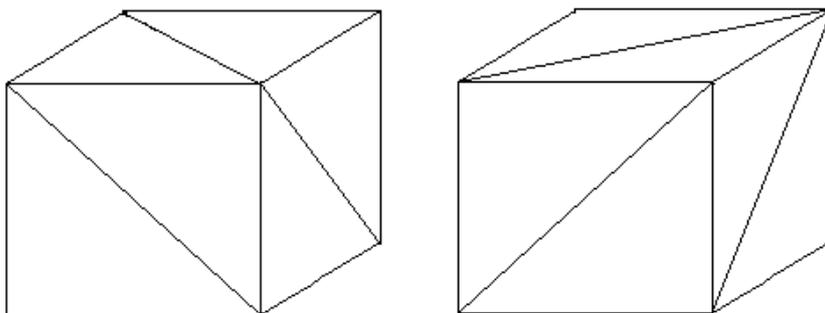


Figura 4.5. Hexaedros que no permiten la descomposición en 5 tetraedros

Dada la menor cantidad de aristas, caras y elementos generados, es preferible la descomposición 1:5. Para que ésta sea posible en la mayor parte de los elementos hexaédricos, es importante que la discretización del contorno del volumen sea propicia para esa descomposición. Por esta razón se utiliza en el mallado superficial un tipo de discretización o conectividad denominada “union jack” como la que muestra la figura 4.6. Si el número de divisiones en las líneas que unen dos superficies opuestas es par, para que sea posible la descomposición 1:5 el patrón debe ser el mismo en ambas, y si es impar debe ser en una el opuesto del de la otra. La figura 4.7 muestra la malla superficial generada en distintos casos que hace posible este mallado volumétrico. El otro tipo de descomposición (1:6) también requiere mallas del contorno específicas, por lo que en ambos casos la generación de la malla volumétrica influye en la malla del contorno, lo que hace a este método poco propicio para su utilización en una metodología multibloque, donde las interfaces entre volúmenes deben ser discretizadas previamente y permanecer constantes durante todo el proceso de mallado volumétrico. Es decir, en un entorno multibloque el mallado volumétrico se debe acomodar al de su contorno, y no al revés.

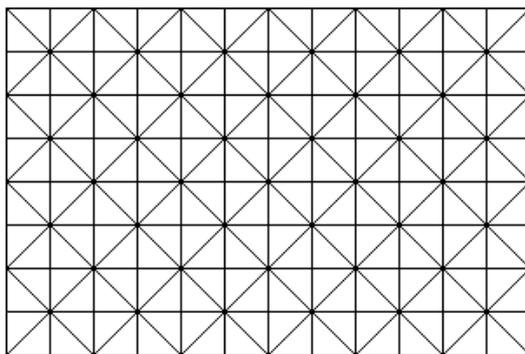


Figura 4.6. Patrón de malla bidimensional “union jack”

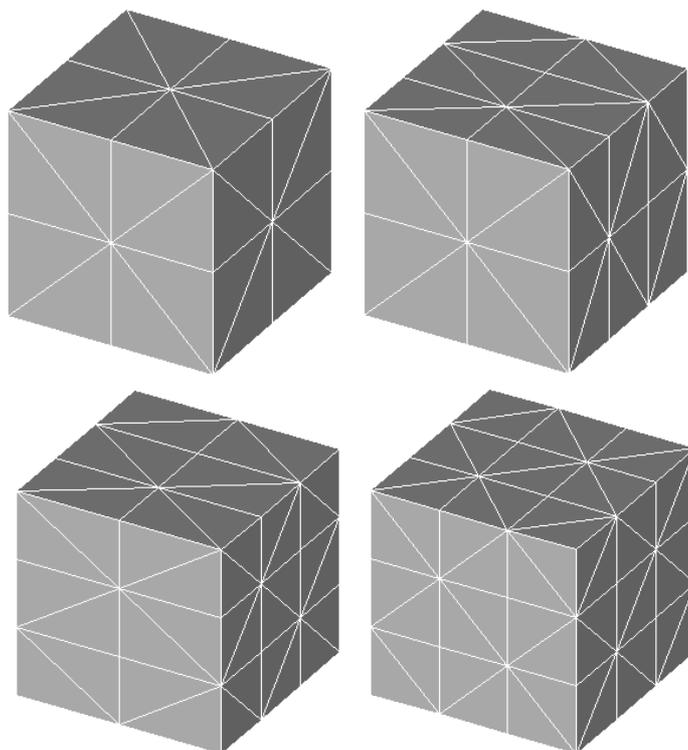


Figura 4.7. Mallas del contorno en hexaedros para distintas situaciones

En resumen, si m , n y p son las divisiones en cada coordenada natural del hexaedro, la malla estructurada presentará en su interior los siguientes componentes:

- Malla hexaédrica:

$$\text{nodos} = (m-1)(n-1)(p-1) \quad (4.5)$$

$$\text{aristas} = 3mnp - 2(mn + mp + mn) + m + n + p \quad (4.6)$$

$$\text{caras} = 3mnp - mn - mp - np \quad (4.7)$$

$$\text{elementos} = mnp \quad (4.8)$$

- Malla tetraédrica:

$$\text{nodos} = (m-1)(n-1)(p-1) \quad (4.9)$$

$$\text{aristas} = 6mnp - 3(mn + mp + mn) + m + n + p \quad (4.10)$$

$$\text{caras} = 9mnp - 2(mn + mp + np) \quad (4.11)$$

$$\text{elementos} = 5mnp \quad (4.12)$$

Se puede obtener una expresión general que relaciona los distintos componentes de la discretización (interior y contorno), tanto en mallas estructuradas como no estructuradas, y tanto tetraédricas como hexaédricas, siempre que éstas sean compactas, es decir, sin huecos en su interior:

$$\text{elementos} + \text{aristas} = \text{caras} + \text{nodos} - 1 \quad (4.13)$$

En mallas estructuradas es sencillo comprobar que esta ecuación se cumple siempre. La demostración para mallas no estructuradas se realiza por inducción.

Es posible desarrollar un método de discretización de volúmenes tetraédricos generalizados similar al descrito aquí para hexaedros que genere únicamente mallas tetraédricas, pero con restricciones similares, tanto en la discretización de líneas como de superficies. Además, en este caso, la malla estructurada está formada por tetraedros y octaedros, por lo que es necesario dividir estos últimos en 4 tetraedros de un volumen inferior a los otros. Las dificultades y restricciones de estos métodos aconsejan recurrir a técnicas más generales que respeten la discretización del contorno y permitan la discretización de volúmenes arbitrarios con una discretización de su contorno también arbitraria.

4.2. Generación de Malla No Estructurada. Método de Frente de Avance

En el punto anterior se ha constatado en el caso de un volumen sencillo como el hexaedro, cómo los métodos de generación de malla estructurada presentan restricciones muy severas respecto a la discretización del contorno. Por esta razón, se ha optado por el desarrollo de un método de generación de malla tetraédrica no estructurada que permita la discretización de volúmenes arbitrarios.

Las técnicas utilizadas en el método bidimensional FARG no son sencillas de generalizar a mallados volumétricos, pues, en este caso, la casuística aumenta considerablemente y el problema resulta inabordable. Así pues, es necesario recurrir a métodos de propósito general como el método de Delaunay-Voronoi o el de frente de avance clásico. Recordemos que el primero se ocupa exclusivamente de la conectividad de la malla, siendo

tarea de otras técnicas el cálculo de la posición óptima de los nodos interiores del volumen. Está especialmente concebido para ser utilizado como método general y ajustarse a la geometría del problema intentando crear elementos con la máxima regularidad. Por contra, como ya se ha comentado anteriormente, si bien en dos dimensiones genera triangularizaciones óptimas, en el caso tridimensional no garantiza una “tetraedrización” óptima, pudiéndose dar el caso de tetraedros muy irregulares e incluso sin volumen, es decir, con sus cuatro nodos en el mismo plano.

El método de frente de avance requiere como dato de entrada la discretización del contorno y, a partir de ella, va creando los nodos, aristas, caras y elementos de la malla de forma iterativa. También está diseñado como método de propósito general. No introduce ninguna modificación en el contorno, pero depende totalmente del mismo, de modo que cualquier irregularidad que tenga se irá reflejando en los elementos que se vayan creando en el interior. Como factor negativo, cabe destacar que puede generar elementos irregulares al cerrarse en las últimas fases del mallado, es decir, cuando una parte del frente se encuentra con otra parte del mismo que avanza en dirección contraria. Ambos métodos son los más utilizados actualmente y no existe una característica determinante que, en general, aconseje uno más que otro. Sin embargo, en esta tesis, dos han sido las causas fundamentales que han aconsejado desarrollar un algoritmo basado en la teoría que propone el método de frente de avance:

- Mantener una filosofía similar a la utilizada en los métodos bidimensionales desarrollados.
- Evitar la implementación de técnicas de regeneración del contorno, necesarias si se utiliza la triangulación de Delaunay, pues, dado que el método desarrollado se va a utilizar en un contexto multibloque, es requisito imprescindible mantener una única discretización en cada interfaz de los bloques que compongan el dominio.

4.2.1. Implementación del Método de Frente de Avance

La teoría de frente de avance suministra unas indicaciones generales para definir el algoritmo de mallado. La base principal del método consiste en la modificación de un frente de mallado compuesto por caras del volumen que, en un principio, será el contorno del volumen, y al finalizar el proceso quedará vacío. Esta metodología general permite muy variadas implementaciones particulares. En este punto se presenta la implementación desarrollada, describiendo los pasos que se han seguido, los problemas que se han presentado y la solución que finalmente se ha adoptado en cada caso.

El frente de avance inicial es una lista que contiene todas las caras triangulares del contorno. La ordenación de las caras dentro de la lista no sigue un orden específico y se van añadiendo a ella según la numeración que presentan en las superficies del contorno del volumen. El orden de las caras en la lista determina cuál es la siguiente cara que se estudia para crear un elemento con ella. Este orden influye, sin ninguna duda, en el resultado final del mallado. Por tanto, se plantea la posibilidad de ordenar las caras siguiendo algún criterio que conduzca a una mejor solución. Un posible criterio a analizar es el basado en el tamaño del área de la cara. Al tratarse de caras triangulares, obtener este parámetro no resulta computacionalmente costoso. La situación que se intenta mejorar al ordenar según el tamaño es la producida cuando existen zonas del frente cercanas con diferente tamaño de caras, algo que sucede habitualmente. En la figura 4.8 se ofrece una visión conceptual del problema utilizando un frente bidimensional. Se puede observar el diferente desarrollo del frente según se comience mallando los lados más pequeños (figura 4.8.a) o los lados de mayor tamaño. Sin embargo ¿cuál de las dos soluciones es más apropiada?; *a priori* no resulta evidente. Comenzar por las caras de mayor tamaño es la opción que podría presentar algunas ventajas. En primer lugar, el número de elementos es menor y, en segundo lugar, una zona del frente con caras de mayor tamaño se conecta más fácilmente con una zona de caras pequeñas que en el caso contrario. Sin embargo,

estas ventajas no son lo suficientemente poderosas como para contrarrestar la pérdida de definición que se produce en la zona del frente con caras de menor tamaño al crear menos elementos.

Descartado el tamaño como posible criterio para ordenar el frente, no se presenta ningún otro de suficiente consistencia y viabilidad para ser considerado (aunque análisis más exhaustivos podrían contemplar la comparación entre la situación de las caras, pequeñas proyecciones del desarrollo del frente, etc., técnicas que requieren, en general, un alto coste computacional) y se opta por el más sencillo: en el frente inicial se añaden las caras según el orden que presentan en las superficies que definen el volumen y, en las sucesivas actualizaciones del frente, simplemente se añaden las caras, según se van creando, al final de la lista.

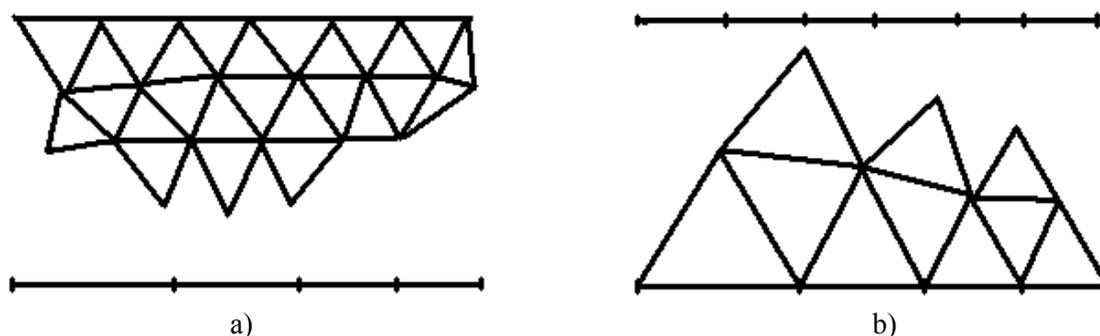


Figura 4.8. Diferentes crecimientos de un frente bidimensional según el tamaño de las aristas

Una vez definido el frente se puede comenzar la generación de la malla. Para ello se toma la primera cara del frente, se estudian las posibilidades de generación del elemento y se elige la mejor opción para crear un tetraedro con esa cara. El algoritmo que se aplica a las caras es el mismo para todas y, por lo tanto, se puede considerar como un algoritmo general. Se crea un tetraedro con la cara bajo estudio y, si al crear el tetraedro se han creado nuevas caras, éstas se añaden al final de la lista. A continuación se elimina de la lista la cara sobre la que se ha creado el tetraedro, se toma la siguiente cara de la lista y se repite el proceso hasta que se acaba el frente, es decir, hasta que la lista queda vacía.

La figura 4.9 muestra el diagrama de flujo del algoritmo general del método, dentro del cual se encuentra el algoritmo que se aplica a cada cara y que se denomina *elección del tetraedro*. Para crear un tetraedro conociendo una cara de las que lo componen sólo es necesario un nodo adicional. Uniendo éste con los tres puntos de la cara mediante aristas queda completamente definido el tetraedro. Es decir, la generación del tetraedro consiste en la búsqueda de un cuarto nodo, que puede existir en el frente o no, en cuyo caso debe ser creado.

En la figura 4.10 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo de elección del tetraedro, que es la parte más importante del programa y del que a continuación se describen detalladamente cada uno de sus pasos junto con la terminología empleada en el mismo.

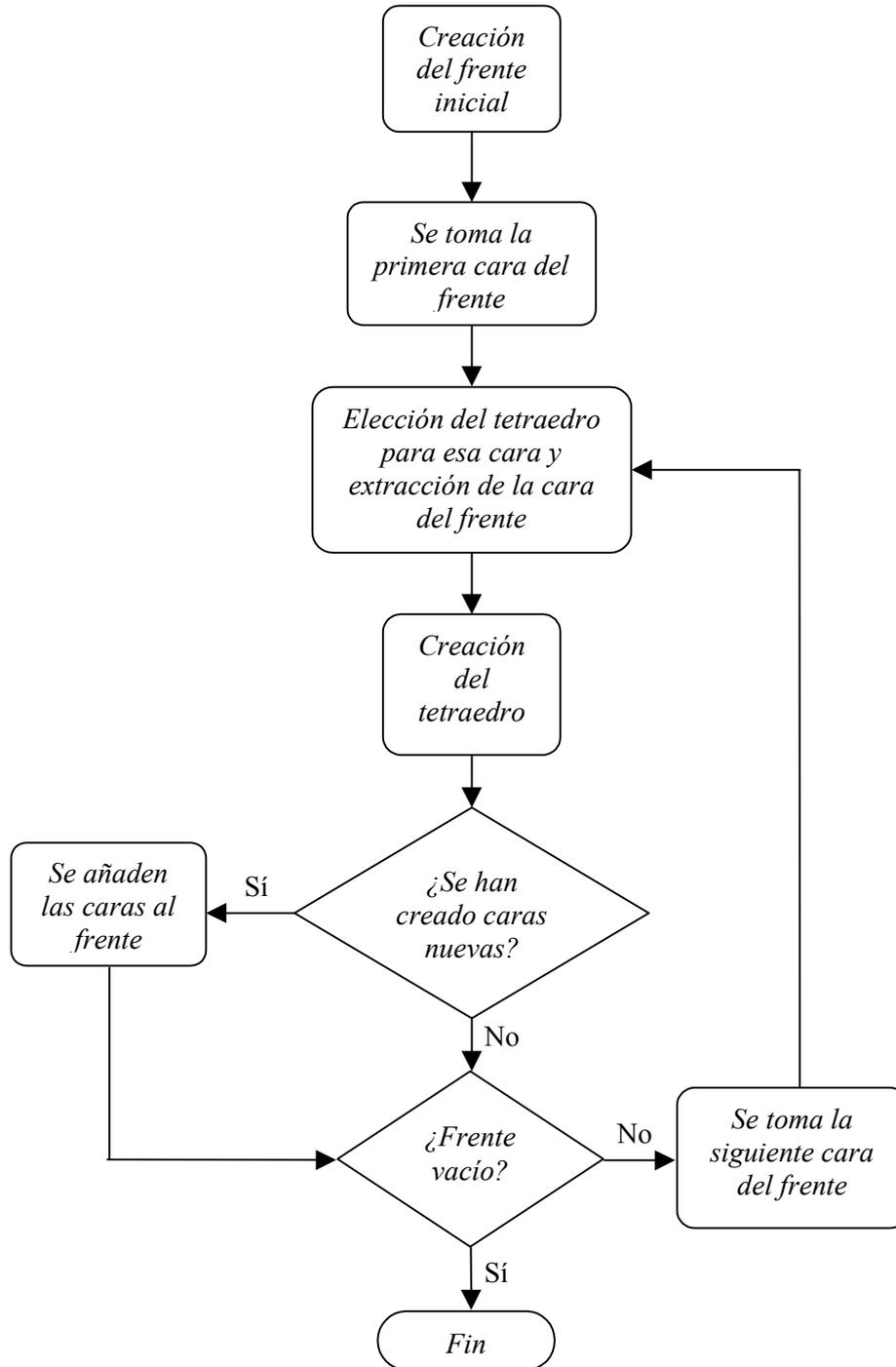


Figura 4.9. Diagrama de flujo del método de frente de avance

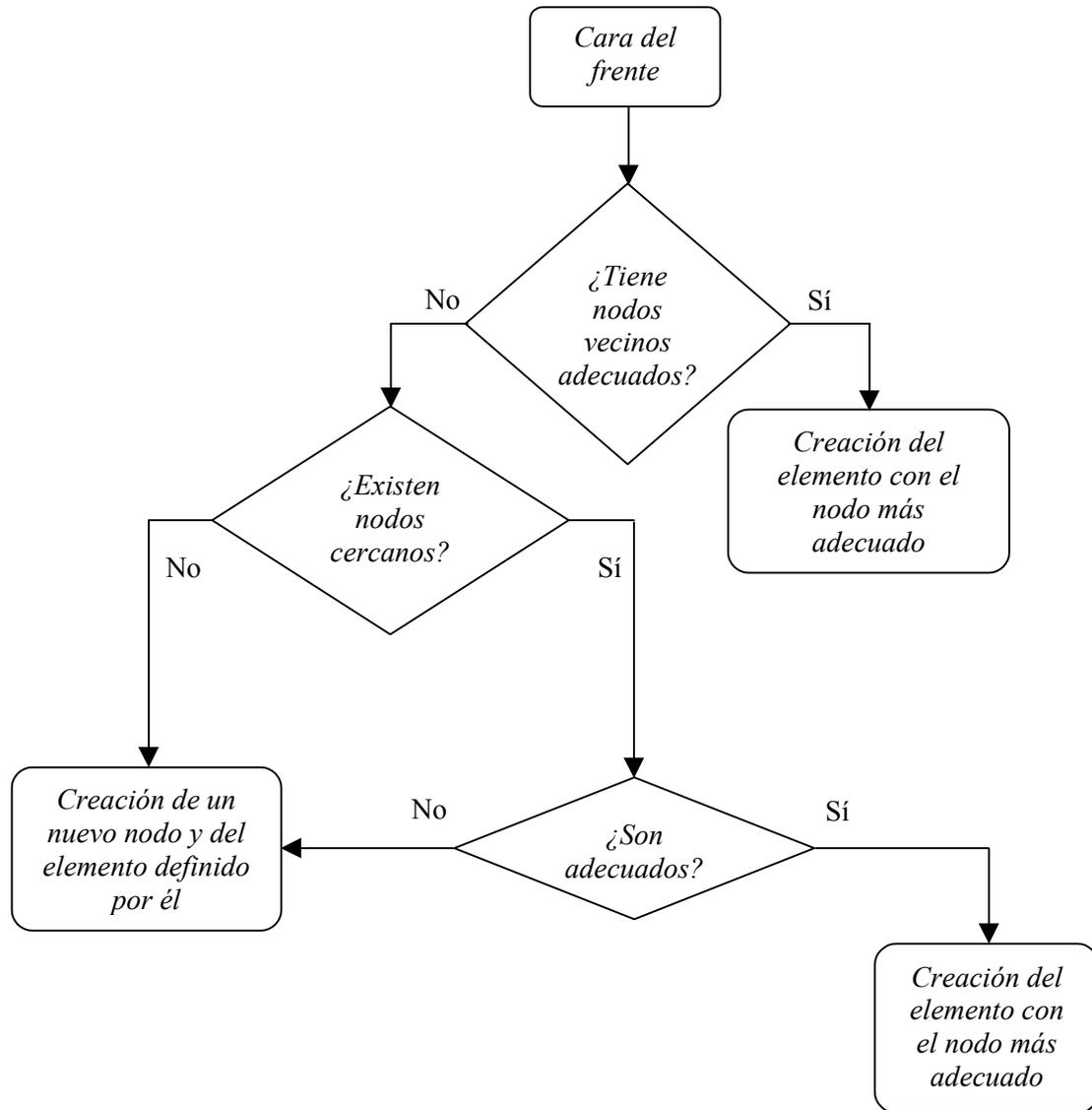


Figura 4.10. Diagrama de flujo de la elección de tetraedro

4.2.2. Nodos Vecinos

El primer paso para la generación del elemento tetraédrico es ubicar la cara considerada, que denominaremos *cara base*, en el frente, y esto se consigue conociendo la posición que ocupan las caras vecinas, es decir, aquéllas con las que comparte aristas, respecto a la cara bajo estudio. Cada una de las aristas de la cara base tiene asociadas una o más caras vecinas que pertenecerán o no al frente de avance. También se pueden identificar estas caras a través de los nodos vecinos de los nodos de la cara base. En la figura 4.11 se muestra una cara base con algunas caras vecinas, así como los nodos vecinos v_1, \dots, v_4 . En ella se puede apreciar que v_1 es nodo vecino de n_1 y de n_2 , v_2 lo es de n_1 y n_3 , etc. La forma de buscar una cara vecina de la cara base es equivalente a buscar los nodos que son vecinos de una pareja de nodos de la base. Por tanto, si un nodo de la malla es vecino de dos nodos que están contenidos en la cara base, se puede concluir que esos tres nodos forman tres líneas que componen una cara vecina.

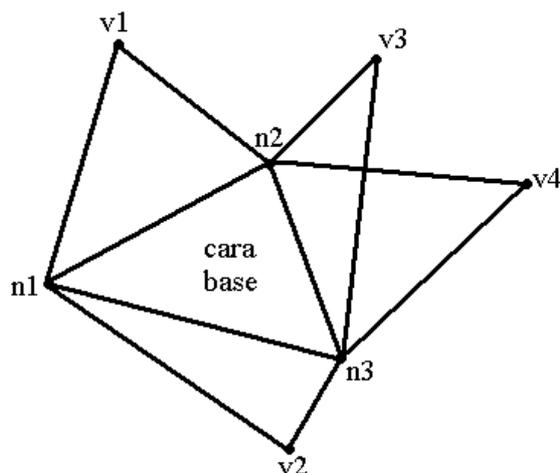


Figura 4.11. Cara base y sus vecinas

Una vez identificadas las caras vecinas se deben descartar aquellas que no se encuentran en el frente, pues eso significa que ya han sido utilizadas para la formación de elementos y se encuentran completamente integradas en la malla. En la figura 4.11 se observa que tanto v_3 como v_4 pertenecen a sendas caras conectadas a la cara base a través de la arista que forman los nodos n_2 y n_3 ; sin embargo, con la información suministrada por la figura no es posible saber qué cara o caras se encuentran en el frente. Dada una cara base y sus n caras vecinas existe una forma más sencilla que la búsqueda directa en el frente de identificar las pertenecientes a él, y consiste en conocer a cuántos elementos pertenece la cara (información que se encuentra disponible, como se puede ver en A1.6, sin necesidad de realizar búsquedas a lo largo de todo el frente). Si la cara pertenece a dos elementos significa que ya ha sido utilizada y, por lo tanto, no puede pertenecer al frente. Una vez conocidas las caras vecinas pertenecientes al frente, aquellas tres correspondientes a distintas aristas y que presenten un menor ángulo con la cara base, serán las tres vecinas más próximas.

Una vez conocido el entorno de la cara bajo estudio es necesario evaluar cómo puede afectar en la creación del tetraedro.

El caso más sencillo que se puede plantear es que, con referencia a la figura 4.11, v_1 , v_2 y v_3 sean el mismo nodo. Esto significa que existe un nodo vecino a los tres nodos de la base. Es evidente que éste es el nodo que se debe utilizar como cuarto vértice del tetraedro. En este caso ya están creadas las aristas y caras del nuevo elemento.

Cuando no se da este caso, se debe seleccionar el nodo vecino más adecuado para construir el tetraedro. Un primer criterio de selección es el ángulo que forman las caras vecinas con la cara base. Según este criterio, se descartan aquellos nodos cuyas caras formen un ángulo con la cara base superior a un umbral. El ángulo umbral de descarte de nodos vecinos es un parámetro de diseño y debe ser definido cuidadosamente para favorecer la convergencia del método. En el punto 4.2.7.2 se comentan los valores que se barajan para este umbral.

Un segundo criterio de selección consiste en dar un paso adelante e intentar observar las consecuencias de realizar una elección u otra. Es decir, se selecciona un nodo vecino candidato y se estudia el efecto que tiene la creación del tetraedro con ese nodo. Puede darse el caso de que las caras que se creen interfieran con las caras ya existentes. En la figura 4.12 se observa este comportamiento ilustrado con un ejemplo. Suponiendo las caras vecinas $v_1-n_1-n_2$ y $v_2-n_2-n_3$, si la cara base $n_1-n_2-n_3$ forma un tetraedro con v_1 se deben crear dos nuevas caras $v_1-n_2-n_3$ y $v_1-n_1-n_3$, pero la cara $v_1-n_2-n_3$ queda más alejada de la cara base que la cara $v_2-n_2-n_3$, es decir, la deja dentro del tetraedro, dando lugar a una situación incorrecta. De esta situación se deduce que el nodo v_1 no es válido para crear un tetraedro porque daría lugar a una situación errónea.

Estas situaciones se evitan comprobando que las caras que se crearían al elegir un nodo forman un ángulo con la cara base menor que las caras vecinas existentes que comparten la misma arista.

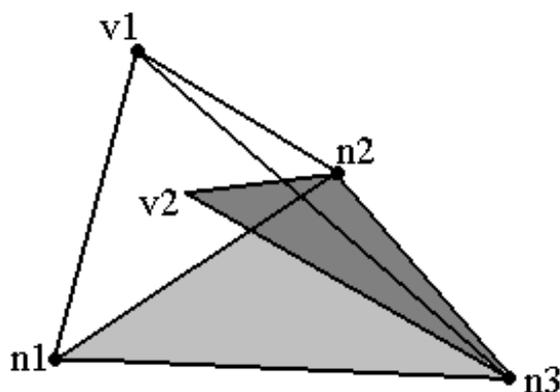


Figura 4.12. Tetraedro erróneo al elegir un nodo vecino incorrecto (v_1)

Los dos criterios descritos hasta ahora, más que criterios de selección, son criterios de descarte. Una vez aplicados dichos criterios, es muy probable que siga habiendo varios nodos vecinos candidatos a la creación del tetraedro. El criterio para realizar la selección se basa nuevamente en los ángulos que forman las caras. En primer lugar se evalúa el ángulo que forman la cara base con la cara de cada nodo vecino, eligiendo aquel nodo cuya cara presenta el ángulo menor, es decir, aquel más inclinado cercano a la base. En la figura 4.12 el nodo elegido sería el v_2 . En el caso de que el criterio anterior plantee dudas debido a que los ángulos de dos vecinos sean iguales, se aplica un segundo criterio que evalúa el ángulo entre las caras que se crearían y las caras existentes. Con este criterio se elige aquel nodo que forme un tetraedro de caras lo más separadas posible de las caras existentes. Es decir, para cada vecino se calcula el ángulo más pequeño que formaría una de las caras creadas con el nuevo tetraedro con una cara existente vecina de la cara base, y de entre todos los vecinos se elige como más favorable aquel para el cual ese ángulo mínimo es mayor.

Como resultado de todos estos criterios puede obtenerse o no un nodo candidato a formar parte del nuevo tetraedro. En el primer caso, éste es el candidato preferente, ya que proviene del contorno de la cara base, pero antes de ser aceptado como la solución definitiva debe superar ciertas pruebas de concordancia con los elementos ya existentes en la malla. Estas pruebas se aplican a todos los candidatos y se describen en el punto 4.2.6.

4.2.3. Nodos Cercanos

En el proceso de generación tetraédrica cabe contemplar la situación de que la cara base no disponga de nodos vecinos candidatos debido a alguna de estas circunstancias:

1. Todos los nodos vecinos superan el ángulo mínimo establecido.
2. Existen nodos vecinos, pero ninguno de ellos es adecuado para construir un tetraedro porque no cumplen los criterios de concordancia.

En estos casos, la determinación del nodo candidato se realiza buscando nodos cercanos a la cara base sin necesidad de que sean vecinos de la misma. Esta situación tendrá lugar habitualmente cuando dos partes del frente están a punto de encontrarse y deben ser conectadas. En la figura 4.13 se muestra una situación del frente que se corresponde con este caso. La cara base no está directamente conectada con p_i ; sin embargo, es la mejor opción para crear un nuevo tetraedro.

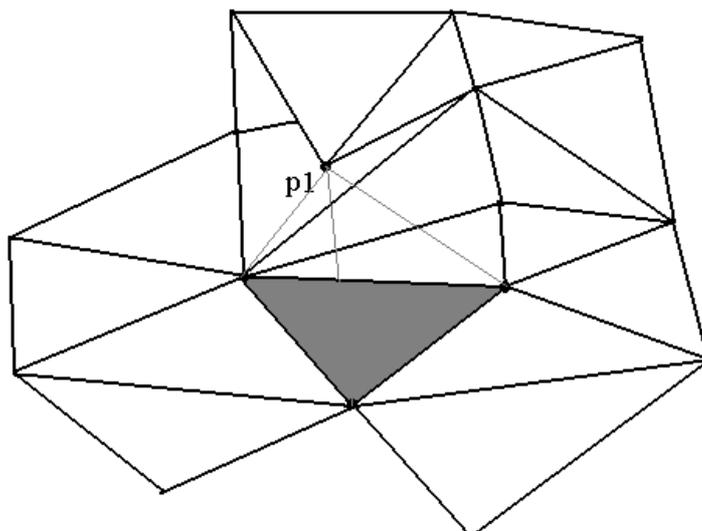


Figura 4.13. Frente con dos partes que se van a encontrar

Para buscar nodos como p_1 no se puede recurrir al estudio del contorno de la cara base, ya que no se conoce *a priori* a “cuántas caras de distancia” puede estar el nodo que se está buscando. En la figura 4.13 ese nodo no está muy distante, pero no es una situación extrapolable a casos más generales. La forma elegida para buscar esos nodos es calcular la distancia de los nodos del frente a un punto ficticio relacionado con la cara base denominado *punto óptimo*. Se fija un radio para determinar si un nodo es cercano a la cara, de manera que, si la distancia entre dicho nodo y el punto óptimo es menor que ese radio, el nodo es tenido en cuenta; si dicha distancia es mayor que el radio, el nodo queda descartado. Entre los nodos seleccionados con este criterio, se elige aquél cuya distancia al centro de la cara base es menor, es decir, aquél que está más cercano a la cara. Como resultado de esta búsqueda se obtiene un nodo que, si supera las condiciones de concordancia descritas en el apartado 4.2.6, será el utilizado para crear el tetraedro de la cara base.

El radio para determinar los nodos cercanos es un parámetro de diseño analizado en el punto 4.2.7.1, y el modo de calcular el punto óptimo es idéntico al del cálculo del *nodo óptimo*, concepto que se describe a continuación.

4.2.4. Nodo Óptimo

En el caso de que el conjunto de nodos cercanos también resulte vacío o éstos no sean adecuados, nos encontramos ante la situación de que en el frente no hay nodos propicios para crear un tetraedro sobre la cara base. Esta situación se puede producir, por ejemplo, cuando la zona que rodea a la cara base es casi plana y no tiene cerca otras partes del frente. En este caso, la solución que se adopta es crear un nuevo nodo, al que denominaremos *nodo óptimo*, que se utilizará para generar el tetraedro. A continuación se describe dónde situar el nuevo nodo, de modo que garantice la creación de un tetraedro lo más regular posible. Este procedimiento es también válido para calcular la posición del punto óptimo mencionado en el punto 4.2.3, es decir, el que sirve de referencia para considerar si un nodo es cercano o no a la cara base.

Se parte de la cara base definida por sus tres nodos $n_1-n_2-n_3$ y sus tres aristas $a_1-a_2-a_3$, como indica la figura 4.14, sin tener en cuenta su entorno, es decir, planteando el problema como si la cara estuviera aislada. En primer lugar, se calcula su punto medio (p_{med}), es decir, el centro geométrico de n_1 , n_2 y n_3 . En la figura 4.14 se muestra este punto medio. Por él se traza una línea perpendicular al plano que contiene a la cara y sobre ella se debe situar el nodo óptimo.

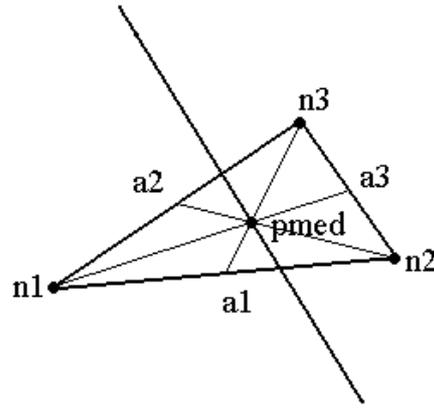


Figura 4.14. Ejemplo de cara base en el cálculo del nodo óptimo

El siguiente paso consiste en calcular la distancia h que debe mediar entre p_{med} y el nuevo nodo. Para ello es necesario establecer un criterio que permita obtener una ecuación a partir de la cual fijar esa distancia (h). Ese criterio se puede plantear desde dos puntos de vista:

- Control de ángulos
- Control de distancias

En este caso se ha decidido la segunda opción, ya que la determinación de una distancia sobre la recta perpendicular a la cara aconseja trabajar en términos de distancias y evitar las transformaciones de ángulos a distancias. El criterio consiste en regularizar la longitud de las aristas que deben formar el tetraedro. Existen tres aristas y se han de crear otras tres, que unirán los tres nodos de la cara base con el nodo óptimo. Para conseguir que todas las aristas tengan aproximadamente la misma longitud se calcula la media de las aristas existentes a_1 , a_2 y a_3 , y se fuerza a que la media de las nuevas aristas a_4 , a_5 y a_6 sea igual a ésta. Las longitudes de las aristas de la cara base son:

$$\begin{aligned} l_1 = l(a_1) &= \sqrt{(x_{n_1} - x_{n_2})^2 + (y_{n_1} - y_{n_2})^2 + (z_{n_1} - z_{n_2})^2} \\ l_2 = l(a_2) &= \sqrt{(x_{n_1} - x_{n_3})^2 + (y_{n_1} - y_{n_3})^2 + (z_{n_1} - z_{n_3})^2} \\ l_3 = l(a_3) &= \sqrt{(x_{n_2} - x_{n_3})^2 + (y_{n_2} - y_{n_3})^2 + (z_{n_2} - z_{n_3})^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

y la media de éstas:

$$\bar{l} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3} \quad (4.15)$$

La longitud media de las aristas que se deben crear se aproxima mediante las variables

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{(x_{n_1} - x_{p_{med}})^2 + (y_{n_1} - y_{p_{med}})^2 + (z_{n_1} - z_{p_{med}})^2} \\ s_2 &= \sqrt{(x_{n_2} - x_{p_{med}})^2 + (y_{n_2} - y_{p_{med}})^2 + (z_{n_2} - z_{p_{med}})^2} \\ s_3 &= \sqrt{(x_{n_3} - x_{p_{med}})^2 + (y_{n_3} - y_{p_{med}})^2 + (z_{n_3} - z_{p_{med}})^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

que son la proyección de las nuevas aristas sobre la cara base, como muestra la figura 4.15.

Haciendo uso de la ecuación

$$\bar{l}^2 = \bar{s}^2 + h^2 \quad (4.17)$$

donde

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} \quad (4.18)$$

cierta para una cara base equilátera y tanto más aproximada cuanto más regular sea ésta, se obtiene

$$h = \sqrt{\bar{l}^2 - \bar{s}^2} \quad (4.19)$$

Otra posibilidad para el cálculo de h es estimar por separado la longitud de las nuevas aristas a_4 , a_5 y a_6 como la media de sus aristas vecinas en la cara base y obtener un valor de h para cada una de ellas. El valor final de h será la media de estos tres valores.

$$l_4 = l(a_4) = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$l_5 = l(a_5) = \frac{l_2 + l_3}{2} \quad (4.20)$$

$$l_6 = l(a_6) = \frac{l_1 + l_3}{2}$$

$$h_1 = \sqrt{l_4^2 - s_1^2}$$

$$h_2 = \sqrt{l_5^2 - s_2^2} \quad (4.21)$$

$$h_3 = \sqrt{l_6^2 - s_3^2}$$

$$h = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \quad (4.22)$$

En las pruebas realizadas se ha observado que, en general, con estos dos métodos se obtiene una baja uniformidad en el tamaño de los elementos a lo largo de la malla, ya que el volumen de los elementos aumenta conforme avanza el frente, es decir, las zonas centrales del dominio mallado presentarán elementos de mayor tamaño que las cercanas al contorno.

Para evitar este problema, se puede realizar un control del volumen del elemento generado respecto al de sus elementos vecinos, de modo que éste sea aproximadamente el mismo. Es decir, si

$$V_h > \kappa_1 \bar{V} \quad (4.23)$$

ó

$$V_h < \kappa_2 \bar{V} \quad (4.24)$$

donde \bar{V} es la media del volumen de los elementos vecinos, entonces

$$h' = \kappa_3 h \quad (4.25)$$

Los parámetros κ_1 y κ_2 pueden presentar valores típicos de 1.1 y 0.9, respectivamente. El parámetro κ_3 se puede obtener como:

$$\kappa_3 = \sqrt[3]{\frac{V}{V_h}} \quad (4.26)$$

ya que el volumen de un tetraedro es proporcional a h^3 . Cuando la malla que se pretende generar es uniforme, el volumen medio se puede determinar *a priori* o al comienzo de la generación de la malla (por ejemplo, puede ser el volumen del primer elemento creado). En el caso en que la discretización del contorno del dominio provoque grandes diferencias de tamaño entre distintas zonas de la malla, la aplicación del control de volumen provoca que dos zonas del frente cercanas presenten tamaños de las caras base muy diferentes, lo que dificulta el cierre del frente. Para estos casos, otra posibilidad es la definición de una retícula de control que cubra todo el dominio de mallado y que lleve asociada a cada celda un tamaño de elemento recomendado, pudiéndose definir en este caso zonas con distinta densidad de mallado.

El valor de h finalmente obtenido conduce a dos puntos situados sobre la línea perpendicular a la cara obtenida, pero dispuestos simétricamente respecto a ella, que denominaremos $p_{\text{óptimo}}$ y $p_{\text{óptimo1}}$, como muestra la figura 4.15.

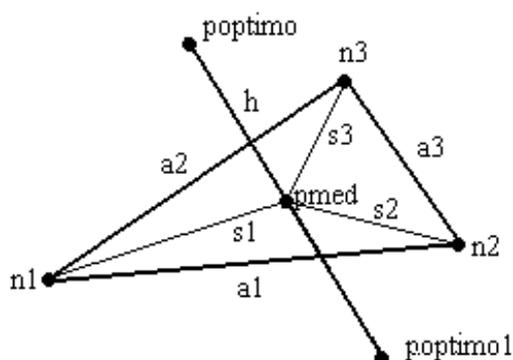


Figura 4.15. Cara base con dos posibles puntos óptimos

El hecho de que haya dos puntos óptimos obedece a que la cara ha sido considerada aislada del resto del frente, de modo que aún queda por dilucidar hacia qué lado de la cara avanza el frente. Se presentan dos situaciones diferenciadas según sea la cara base interior al volumen o pertenezca a su contorno. Si la cara es interior, ésta ya pertenece a un tetraedro. Con el cuarto nodo que determina ese tetraedro (el que no pertenece a la cara base) se tiene una referencia para conocer la orientación del frente. El cálculo de la distancia de $p_{\text{óptimo}}$ y de $p_{\text{óptimo1}}$ a dicho nodo permite la elección del correcto. El más cercano de los dos se encuentra en la zona que ya ha sido mallada, y el más alejado está situado en la zona vacía y, por tanto, es el que se debe elegir para continuar el avance del frente.

Si la cara pertenece al contorno del volumen, se utiliza como referencia el punto medio de todos los nodos del contorno del volumen. Se puede suponer que el punto así calculado está aproximadamente en el centro del volumen, de modo que este punto de referencia debe utilizarse al revés que el anterior: el punto óptimo que esté más cerca del punto central es el que indica el correcto avance del frente. Este último criterio puede ser erróneo frente a volúmenes que presenten un alto grado de concavidad, como el mostrado en la figura 4.16, pero, en general, funciona correctamente. Como último recurso, siempre se puede comprobar cuál de los

dos puntos óptimos está fuera del volumen, pero esta comprobación supone un alto coste computacional.

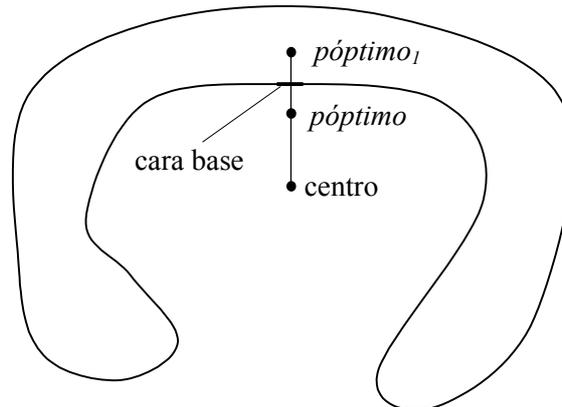


Figura 4.16. Error en la elección del punto óptimo correcto en una cara del contorno de un volumen cóncavo

Como resultado de los algoritmos descritos en este apartado se obtienen las coordenadas del nodo óptimo, esto es, el más adecuado para la construcción del nuevo tetraedro sobre la cara base, si no existen nodos vecinos ni nodos cercanos adecuados. Como se ha comentado en el apartado 4.2.3, este procedimiento también es empleado para la obtención del punto óptimo, necesario en la búsqueda de nodos cercanos.

4.2.5. Nodo Medio

En el apartado anterior se ha considerado la búsqueda de un nodo óptimo para crear el tetraedro en función de la geometría de la cara y de un parámetro de control de tamaño del elemento, pero sin tener en cuenta el entorno de la cara. Hay casos en los que es imprescindible considerar dicho entorno. Tal situación tiene lugar cuando existen nodos vecinos o nodos cercanos, pero no son adecuados para crear el tetraedro por problemas de concordancia con el resto de los elementos. En este caso se debe crear un nuevo nodo para generar el tetraedro y que no presente conflictos con el entorno de la cara.

En la figura 4.17 se muestra una cara base con tres vecinos no válidos. Se puede observar que cualquiera de los vecinos que se elijan como nodo de creación del tetraedro produce una arista que corta a otra ya existente, y, en consecuencia, se intersectan dos caras. En un caso como éste, la creación de un nodo óptimo tampoco resuelve el problema, ya que esto generaría caras muy próximas angularmente a las ya existentes.

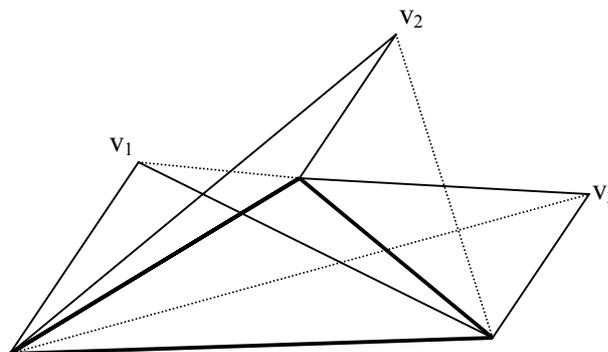


Figura 4.17. Cara base con tres vecinos no válidos

El nodo candidato, al que denominaremos *nodo medio*, se calcula en este caso como la media de las coordenadas de los nodos vecinos (o nodos cercanos en el caso de que los hubiera) que han sido descartados y el punto medio de la cara base. El nodo resultante, al estar promediado con un punto situado en la cara, está más cerca de la misma y así se evitan posibles intersecciones con otros componentes de la malla. Sin embargo, se pueden presentar casos muy desfavorables (como el caso de una cara muy próxima a la cara base) en los que incluso este punto medio no resulta adecuado. En este caso se realiza una media ponderada, dando más peso en la ponderación al punto medio de la cara con el objeto de acercar aún más el punto candidato a la cara base. De esta forma se evitan las intersecciones alrededor de esa cara y se puede crear el tetraedro.

Este tipo de situaciones se presenta cuando se encuentran dos o más partes del frente. Es el denominado *cierre* o finalización de la generación de la malla. En la figura 4.18 se muestra la solución obtenida para el caso de la figura 4.17.

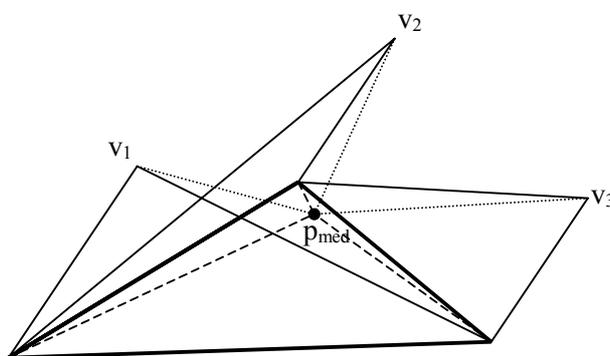


Figura 4.18. Utilización del nodo medio

4.2.6. Cierre del Frente y Condiciones de Concordancia

Como se ha visto en los puntos anteriores, cuando se está concluyendo el proceso de mallado del volumen se presenta el problema del cierre, es decir, en una zona del espacio convergen varias partes del frente, cada una de las cuales avanza de forma independiente. En la zona de convergencia se deben crear los tetraedros de forma que se adecuen unas partes del frente con otras. Existirán casos en los que, para conseguir cerrar la malla con tetraedros válidos, será necesario sacrificar la regularidad de los mismos. Es en esta fase del mallado cuando es necesario recurrir al nodo medio descrito en el apartado anterior. Como se vio allí, éste es un nodo que, al estar cerca de la cara base, puede producir tetraedros irregulares, pero es la única forma de cerrar el frente sin recurrir a la modificación de tetraedros ya existentes. En el caso de la figura 4.18 no sólo se crea un tetraedro adecuado para la cara base, sino que se pueden crear tetraedros que conecten las nuevas caras, que se han generado al introducir el nuevo nodo, con las caras de los nodos vecinos existentes. Esta particularidad es importante ya que el objetivo en este punto del mallado no es tanto conseguir un tetraedro regular para una cara, como que los nuevos elementos creados permitan la conexión con el resto de los elementos próximos.

Debido a la gran cantidad de situaciones especiales y casos particulares que se pueden presentar cuando se acercan varias partes de un frente tridimensional, no es aconsejable buscar soluciones particulares para cada situación concreta, sobre todo porque pueden quedar sin contemplar situaciones no previstas que produzcan errores en el mallado. Sin embargo, es justo reconocer que si para cada situación se busca la mejor solución se obtendrán mejores resultados que si se afronta mediante un algoritmo general la resolución de todos los casos. El camino que

se ha seguido finalmente consiste en una mezcla de las dos visiones del problema: se ha particularizado la búsqueda del nodo candidato en cuatro situaciones bastante genéricas, y las diferentes contingencias dentro de cada situación se controlan con las denominadas *condiciones de concordancia*. Estos mecanismos de control, que se aplican de forma general y no están particularizados a ninguna situación concreta, son necesarios para la correcta integración del nuevo elemento generado en la malla existente en ese instante. Las cuatro situaciones genéricas son las descritas en los apartados anteriores, realizándose la búsqueda del nodo candidato en el siguiente orden:

1. Nodo Vecino
2. Nodo Cercano
3. Nodo Óptimo
4. Nodo Medio

Las condiciones de concordancia son comprobadas cada vez que se crea un nuevo tetraedro y garantizan que no se crea ningún elemento incorrecto. Consisten básicamente en dos controles:

- Que las nuevas caras que se vayan a crear con el nuevo tetraedro no intersecten ninguna de las aristas existentes en la malla o, lo que es lo mismo, en el frente.
- Que las nuevas aristas que se vayan a crear no intersecten ninguna de las caras existentes en el frente.

La intersección entre una arista y una cara se comprueba asimilando la arista a una recta y la cara a un plano. Se calcula el punto de intersección de la recta con el plano y se comprueba si ese punto se encuentra en la arista y en la cara.

Cada vez que se intenta crear un nuevo tetraedro se llevan a cabo estas comprobaciones y, si no son superadas, se descarta ese nodo candidato y se busca otro.

Existe un tercer control general aplicado sobre todo el volumen al finalizar la discretización de éste para garantizar la correcta conectividad de los elementos:

- Que todas las caras interiores pertenezcan a dos tetraedros y sólo a dos tetraedros, y que las caras del contorno pertenezcan a un tetraedro y sólo a un tetraedro del volumen que se está discretizando.

Con esta última comprobación se garantiza que todas las caras están conectadas, es decir, la malla es conforme, y que la lista de caras del frente ha quedado vacía porque todas las caras han sido tratadas. Si a esto se añaden las comprobaciones que se realizan al crear cada tetraedro se puede garantizar que el volumen ha sido correctamente mallado.

4.2.7. Parámetros de Diseño

Para que este método de generación de malla quede completamente definido, resta por analizar los valores que pueden tomar el radio de búsqueda de nodos cercanos y el ángulo mínimo entre caras. Estos parámetros de diseño influyen directamente en la búsqueda de nodos candidatos y, por tanto, afectan a la creación de nuevos tetraedros.

4.2.7.1. Radio de Nodos Cercanos

Este parámetro es fundamental en la búsqueda de nodos cercanos, como se comenta en el punto 4.2.3, y depende de la cara base para la que se buscan los nodos cercanos. Recordemos que el proceso de búsqueda consiste en el cálculo del punto óptimo para esa cara y en la elección de aquellos nodos de la malla que disten del punto óptimo menos del radio. El punto óptimo se encuentra a una distancia h de p_{med} (figura 4.15). Si se fija un valor del radio demasiado grande, se considerarán cercanos nodos que realmente no lo están y se crearán

tetraedros demasiado grandes e irregulares. Si, por el contrario, su valor es demasiado pequeño, se pueden descartar nodos cercanos a la cara, y esto puede dificultar la adaptación a la malla del tetraedro que se forme más adelante con el nodo descartado, lo que obligará a la generación de tetraedros muy irregulares que permitan esa adaptación. Un buen valor para este radio es precisamente h .

Este parámetro de búsqueda se puede obtener a partir de dos valores con el fin de obtener mejores resultados: por un lado, el propio radio de búsqueda desde el punto óptimo, y, por otro, la distancia del nodo a p_{med} . Estos dos parámetros crean una zona de búsqueda que en la figura 4.19 aparece sombreada.

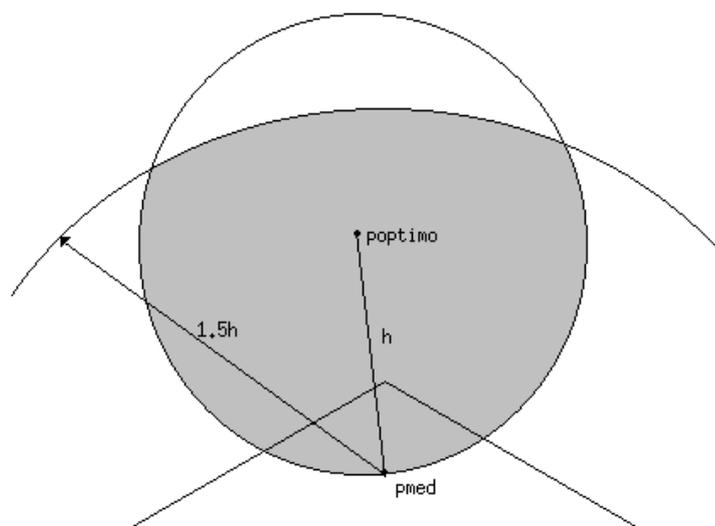


Figura 4.19. Zona de búsqueda de nodos cercanos

El criterio del radio desde el punto óptimo se utiliza para descartar los nodos que están alejados de la zona central de la cara. Como se ha comentado anteriormente, se ha elegido para este radio el valor de h . La distancia desde p_{med} decide qué nodos se descartan por encontrarse demasiado alejados de la cara. El valor para esa distancia se ha elegido $1.5h$ en un intento de llegar a un compromiso. En el caso de que el nodo cercano se encuentre muy próximo al límite superior de la zona sombreada, pero dentro de ella, se crea un tetraedro un 50% más grande de lo ideal. Si el nodo se encuentra muy próximo a este límite superior, pero fuera de la zona sombreada, para adaptar en una fase posterior del algoritmo ese nodo al tetraedro creado en esta etapa (se supone que, ante la carencia de nodos cercanos, lo habitual es utilizar el punto óptimo como nodo óptimo para crear el elemento) se debe crear un tetraedro un 50% más pequeño que el ideal. En general, al aumentar este parámetro, se incrementa el tamaño de los elementos generados en el cierre de la malla. Incluso el valor de $1.5h$ produce elementos de cierre mayores que el tamaño medio de los elementos en la malla, como se puede comprobar en los resultados presentados en el apartado 4.5. No obstante, éste es un parámetro crítico, y su reducción conduce a inestabilidades o a la generación de elementos muy irregulares en la fase de cierre, por lo que se ha mantenido ese valor, corrigiendo la no uniformidad en el tamaño de elementos mediante técnicas de mejora de la malla *a posteriori* que se analizarán en el apartado 4.4.

4.2.7.2. Ángulo Máximo entre Caras Vecinas

Este parámetro es el ángulo máximo que puede formar la cara que contiene un nodo vecino con la cara base para aceptar el nodo como vecino válido (apartado 4.2.2). Este ángulo también es crítico ya que, si es demasiado grande, el tetraedro que se cree será bastante

irregular. Por el contrario, si el ángulo mínimo es pequeño, puede descartarse una cara vecina que quedará muy próxima al tetraedro que finalmente se cree, y eso provocará en una fase más avanzada del proceso la creación de un tetraedro con un ángulo muy pequeño. En la figura 4.20a se presenta un esquema bidimensional donde el ángulo umbral es grande. Extrapolando este esquema al caso volumétrico, una cara vecina que está dentro del umbral provoca un tetraedro tanto más irregular cuanto más se aproxime al ángulo umbral. En la figura 4.20b el ángulo umbral es pequeño y, en el caso volumétrico, una cara que forme un ángulo mayor dará lugar, en un estado posterior del avance del frente, a un tetraedro tanto más irregular cuanto más se aproxime esa cara al ángulo umbral.

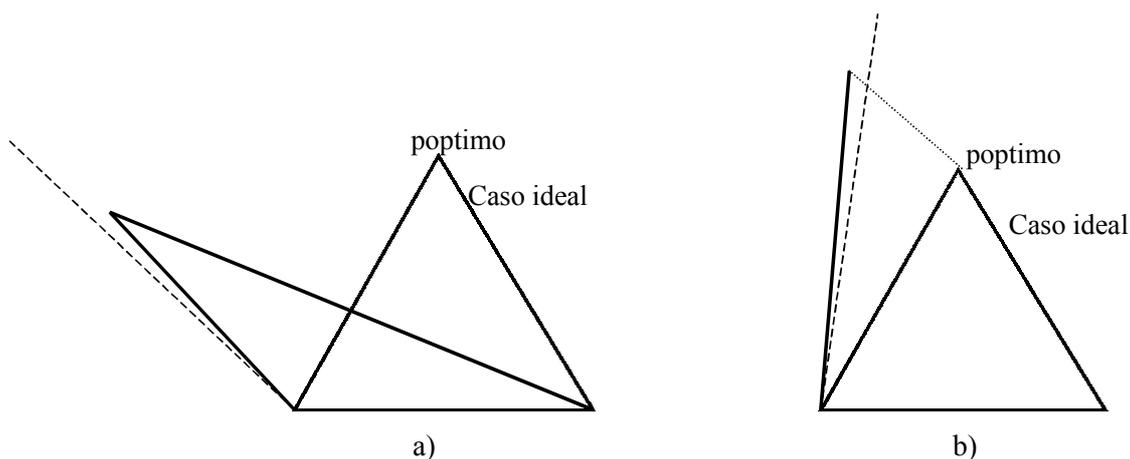


Figura 4.20. Esquema bidimensional con dos posibles ángulos umbral

Siguiendo el razonamiento del apartado anterior, y considerando que el ángulo ideal entre caras es 70.5° , el umbral debe ser 105.8° . De esta forma, en el peor de los casos, los tetraedros generados, en ese momento o más adelante en la cara vecina, presentarán ángulos de 105.8° y 35.3° , respectivamente. Sin embargo, no tienen la misma importancia las dos situaciones, ya que, al descartar un nodo vecino, no se elige directamente el punto óptimo, sino que puede utilizarse un nodo cercano. Por tanto, es preferible elegir un ángulo algo mayor de lo que sería la situación teórica para evitar el descarte de caras vecinas que sí pueden crear tetraedros aceptables. En este caso el valor elegido es de 2.1 radianes (120°), y está en parte obtenido de forma empírica, observando los resultados en la malla ante una variación de este parámetro.

4.3. Control del Frente Mediante Retícula Jerárquica

Uno de los principales lastres que soporta el método de frente de avance para volúmenes es la necesidad de recorrer todo el frente en las operaciones de búsqueda. Cuando el frente es relativamente pequeño estas operaciones de búsqueda se pueden realizar de forma sistemática sin que supongan una gran carga computacional; sin embargo, cuando se gestionan frentes de gran tamaño surge la necesidad de limitar de alguna manera la parte del frente que se analiza.

Esta situación se plantea, por ejemplo, cuando se busca el nodo adecuado para crear un tetraedro entre los nodos del frente cercanos a la cara base. Ya se ha comentado anteriormente que no es suficiente el estudio de las caras vecinas para descubrir si existe algún nodo cercano a la cara. La búsqueda completa requiere el análisis de todos los nodos del frente, pues no se conoce *a priori* la parte del frente cercana a la cara base, y esto supone un incremento muy importante del tiempo de generación de la malla.

Otro control que supone un enorme coste computacional es la comprobación de las condiciones de concordancia descritas en el apartado 4.2.6, necesarias para evitar que el nuevo tetraedro interseque con aristas o caras del frente, lo cual requiere un recorrido completo del frente.

Una solución para evitar estas búsquedas sistemáticas es desarrollar estructuras y procedimientos que permitan detectar rápidamente las zonas del frente cercanas a la cara base, de modo que al crear un nuevo tetraedro se detecten las posibles interferencias o situaciones peligrosas respecto a otras zonas del frente que no sean vecinas de la cara bajo estudio con un coste computacional acotado. Este control del frente requiere nuevas estructuras de datos que almacenen información de los componentes del frente que están en determinada zona del espacio, de tal forma que conocida ésta, se puedan identificar directamente los componentes de la malla que se localizan en ella. Nuestro interés se centra en los nodos de la malla, pues estos son los que contienen la información geométrica básica de la misma; por lo tanto, ellos serán los componentes bajo estudio en la malla.

Para este cometido se utiliza una estructura reticular cúbica que cubre el espacio ocupado por el volumen que se quiere discretizar, y cuya densidad depende del número de nodos de la malla que se admiten dentro de cada celda de la retícula.

4.3.1. Creación de la Retícula

A partir de la discretización del contorno del volumen que se pretende mallar, se puede calcular la posición y tamaño del cubo o celda inicial de la retícula, de modo que englobe completamente a este volumen. Posteriormente, se introducen los nodos del contorno en esta celda, que se dividirá en ocho celdas *hijas* cuando en su interior exista un número de nodos superior a un umbral. Se ha estimado que cada celda contenga como máximo ocho nodos de la malla. Por tanto, la inserción de un noveno nodo supone la descomposición de la celda en ocho celdas hijas (figura 4.21), que heredan los nodos de la celda madre que estén localizados en ellas. Esta descomposición también se puede producir en las celdas hijas o en cualquier descendiente de éstas, como muestra la figura 4.22.

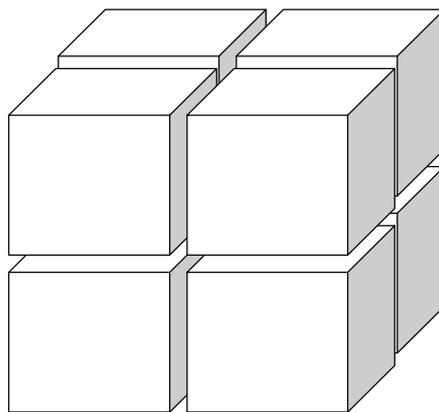


Figura 4.21. División de una celda de la retícula en 8 celdas

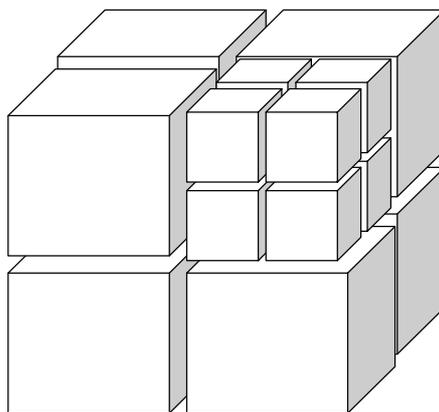


Figura 4.22. Divisiones sucesivas de las celdas

Para llevar a cabo una gestión correcta y eficiente del frente, cada una de las celdas de la retícula contiene la siguiente información:

- La región del espacio que ocupa la celda. Esta información se obtiene a partir de las coordenadas de un vértice de la celda cuya posición relativa en ella es conocida y la longitud del lado.
- Los nodos del frente situados dentro de la celda (también se podrían almacenar otros componentes de la malla como aristas o caras, aunque en estos casos un componente puede pertenecer a varias celdas).
- Las celdas vecinas, cuyo número depende de las descomposiciones realizadas a partir de la celda inicial.

4.3.2. Utilización de la Retícula

Una vez iniciado el proceso de mallado, la actualización de las celdas sigue los siguientes pasos:

1. Tras la creación de un nuevo nodo, se busca la celda a la que pertenece. Esta búsqueda es rápida y sencilla de implementar a partir de las coordenadas del nodo.
2. Si la celda no está completa se introduce el nuevo nodo.
3. Si la celda está llena, es decir, contiene ocho nodos, se procede a su descomposición, reubicando los nodos que contenía en las nuevas celdas, e introduciendo el nuevo nodo en la que corresponda.

Si un nodo deja de formar parte del frente, debe ser eliminado de la celda a la que pertenece. En este caso, si se detecta que el conjunto de celdas hijas no contiene más de ocho nodos, se podrían fusionar en una sola. Sin embargo, esta característica introduce una alta complejidad al proceso que no se justifica con las ventajas que proporciona la reducción del número de celdas.

Con la ayuda de la retícula de celdas, la búsqueda de nodos cercanos se restringe a las celdas vecinas de aquéllas que contienen los nodos de la cara base. Si se pretende realizar la comprobación de condiciones de concordancia, es preferible seguir trabajando con nodos y que estos dispongan de un atributo que indique las aristas a las que pertenecen, a incluir aristas y caras en la estructura jerárquica de celdas, pues estos componentes de la malla pueden estar en varias celdas a la vez y la gestión de la estructura y el proceso de búsqueda se complican enormemente.

4.4. Mejora *A Posteriori* de la Calidad de la Malla. Reposicionamiento de Nodos

En el punto 2.6 se describen dos procedimientos que pretenden regularizar la malla bidimensional una vez generada. En el caso del mallado volumétrico la técnica de intercambio de arista, o su análoga en tres dimensiones, el intercambio de cara, no tiene sentido, pues la conectividad de la malla volumétrica tetraédrica imposibilita la existencia de una cara alternativa a la que une dos tetraedros. Sí son posibles otros tipos de transformaciones locales [Zav96], [Lo97], como la transformación de dos tetraedros en tres o la inversa, pero éstas quedan como futuros temas de ampliación de la tesis.

También es factible el reposicionamiento de nodos [Zav96], [Lo97], [Jon98], [Owe98a]. De hecho, el procedimiento es similar al analizado en el caso bidimensional, con la salvedad de que ahora es necesario el cálculo de la media de una tercera coordenada. En el punto 4.5.5 se presenta la mejora obtenida con esta técnica y en el 4.5.6 su coste computacional.

4.5. Resultados

El análisis de la calidad de la malla generada y el coste computacional del método son dos aspectos fundamentales que permiten conocer la bondad del método de mallado. En este apartado se presentan algunos de los resultados obtenidos en la generación de mallas volumétricas, así como el coste computacional de los distintos procesos.

En el caso bidimensional la calidad de la malla generada se puede apreciar visualmente. Sin embargo, la inspección visual de una malla volumétrica completa no permite realizar una estimación de la calidad de ésta, tanto si se presenta de forma transparente, es decir, visualizando todas las aristas, como si se hace de forma opaca, en cuyo caso sólo se muestra la malla superficial del contorno. Por tanto, es preciso presentar la información de la malla de alguna otra manera que dé una idea de la calidad de ésta. En [Dom98] se proponen algunos métodos de evaluación de la calidad en mallas tetraédricas no estructuradas. En este apartado se ha optado por mostrar representaciones opacas de las mallas de diferentes geometrías (esfera, tronco piramidal, cilindro deformado y sector curvo) en distintos instantes del dibujo de éstas, teniendo en cuenta que éste se realiza desde las caras más alejadas del punto de vista hasta las más cercanas. Por tanto, no se debe confundir esta representación con un estado determinado del método de frente de avance. Lamentablemente, no es posible mostrar distintas fases de este método porque en él el frente se propaga desde el contorno hacia el interior del volumen y, por tanto, las primeras caras creadas tapan las posteriores.

Esta información se completa con un análisis estadístico de las mallas generadas que se concreta en el cálculo de la media, la mediana, la desviación típica y el coeficiente de variación, definido como el cociente entre la desviación típica y la media, así como la representación del histograma, para la longitud de las aristas, el área de las caras, el volumen de los elementos y el ángulo entre las caras pertenecientes a un mismo elemento. El análisis de los tres primeros parámetros estima la uniformidad de la malla, mientras que el análisis de ángulos entre las caras de un mismo elemento informa sobre la regularidad de los elementos en la malla.

4.5.1. Esfera

Las figura 4.23 muestra la discretización obtenida con el método de frente de avance en una esfera. La superficie de la esfera se discretizó con 218 nodos, 648 aristas y 432 caras triangulares, y la malla volumétrica final, en la que está incluida la discretización del contorno, consta de 304 nodos, 1578 aristas, 2334 caras y 1059 elementos.

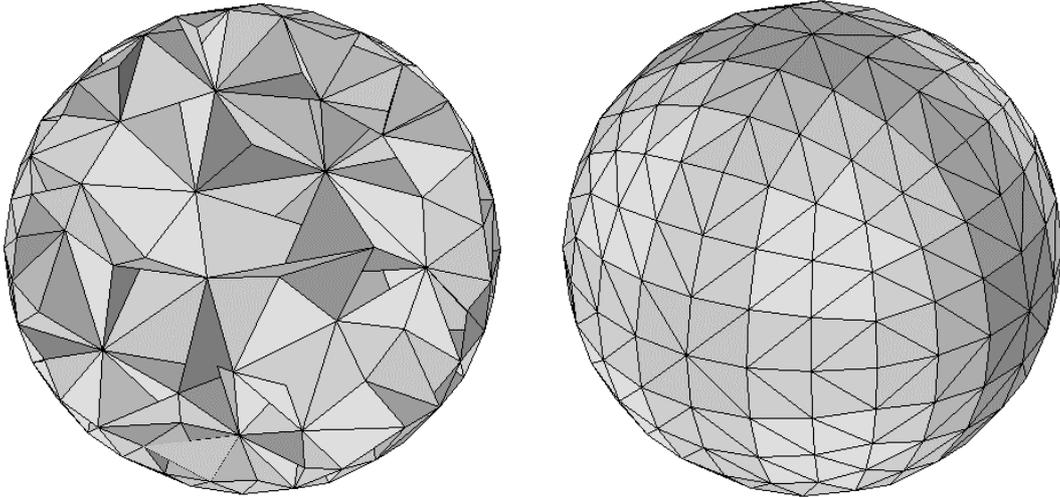


Figura 4.23. Esfera: interior y exterior de la malla no estructurada

Se puede apreciar en la figura 4.23 que en las zonas del interior hay una cierta tendencia a que el tamaño de los elementos aumente debido al cierre de la malla. Este efecto se refleja en el estudio estadístico realizado, cuyos resultados se presentan en la tabla 4.1 y en figuras 4.24-4.27.

Tabla 4.1. Parámetros estadísticos de la malla no estructurada en una esfera

	Media	Mediana	Desviación típica	Coef. de variación
Longitud de las aristas	28.41	26.56	8.12	0.286
Área de las caras	345	295.3	171	0.496
Volumen de los elementos	2496	1812	1850	0.741
Ángulo entre caras en un elemento	1.406	1.327	0.524	0.373

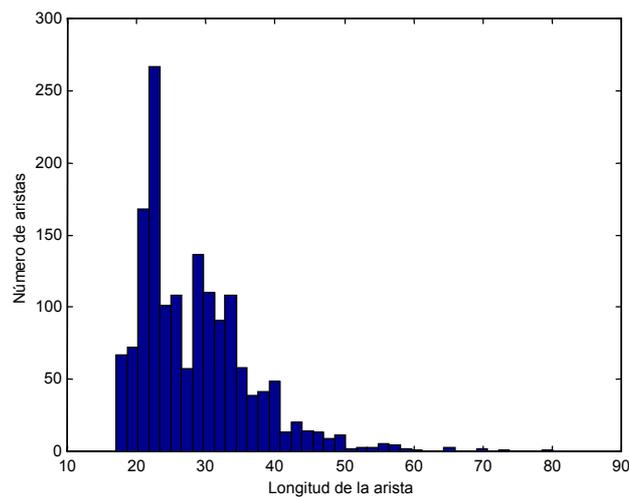


Figura 4.24. Histograma de la longitud de las aristas en la malla no estructurada de una esfera

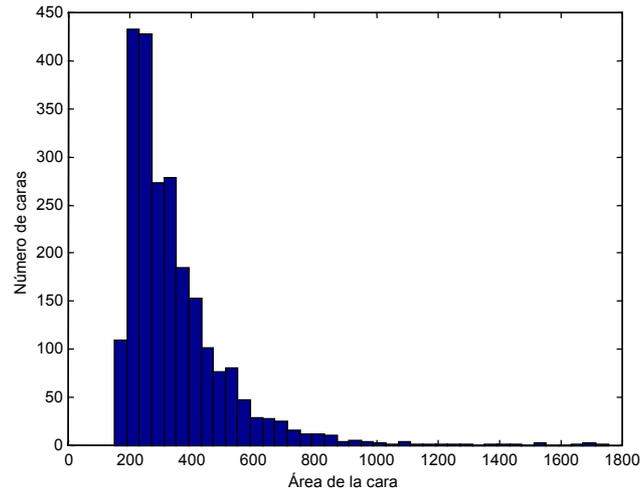


Figura 4.25. Histograma del área de las caras en la malla no estructurada de una esfera

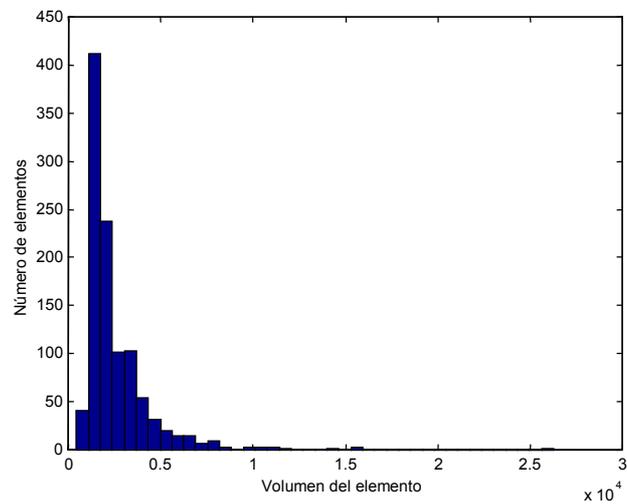


Figura 4.26. Histograma del volumen de los elementos en la malla no estructurada de una esfera

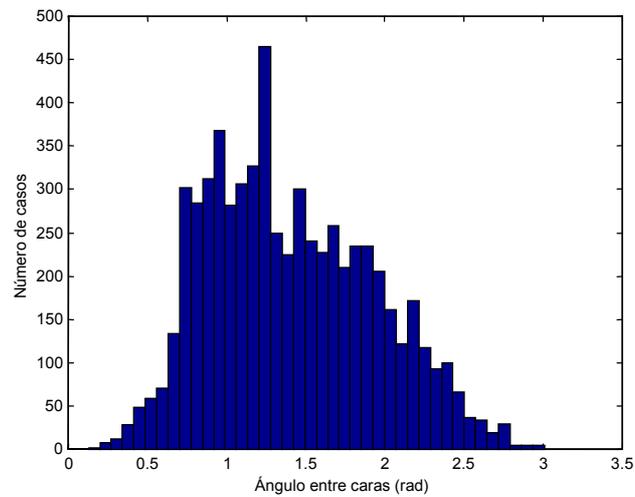


Figura 4.27. Histograma del ángulo entre las caras de cada elemento en la malla no estructurada de una esfera

Se puede observar en las figuras 4.24-4.26 que los histogramas no son simétricos. La interpretación que se puede hacer de este hecho es que se han creado algunos elementos más grandes que el resto en las últimas fases del proceso. Estos elementos, como se aprecia en la figura 4.23, se encuentran en el centro de la esfera. Esta disparidad en el tamaño de los elementos generados queda reflejada en un elevado coeficiente de variación (0.741).

Ya que la discretización realizada sobre las líneas de la esfera permite la generación de una malla estructurada, en la figura 4.28 se muestra el aspecto interior de la malla obtenida con el método de interpolación por proyectores transfinitos. La superficie fue discretizada con el mismo número de nodos, aristas y caras que en el caso no estructurado, aunque siguiendo un patrón “union jack” que permite la descomposición en tetraedros. En la malla final se obtuvieron 343 nodos, 1638 aristas, 2376 caras y 1080 elementos.

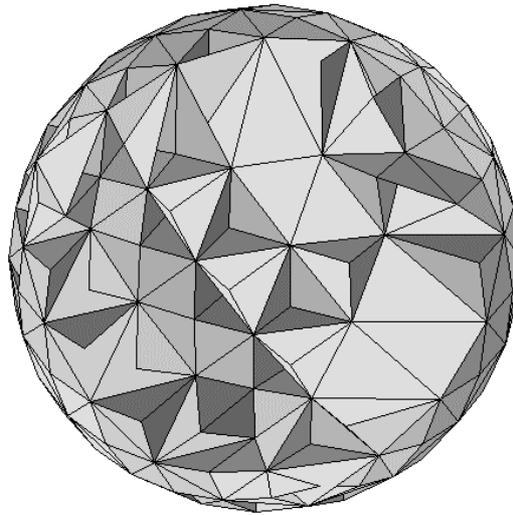


Figura 4.28. Malla tetraédrica generada con el método interpolador en una esfera

Se puede apreciar en la figura 4.28 la condición de malla estructurada que presenta la discretización. En ella los elementos son más regulares y la conectividad de la malla sigue un patrón determinado, al contrario de lo que sucede con la malla de la figura 4.23, donde la creación de los elementos se advierte más arbitraria.

Los parámetros estadísticos y los histogramas obtenidos en esta malla se presentan en la tabla 4.2 y en las figuras 4.29-4.32. De ellos cabe destacar la menor dispersión en el tamaño de los elementos respecto al mallado no estructurado, aunque se puede apreciar un mayor tamaño en los elementos más cercanos al contorno debido a la función de interpolación, y una dispersión similar en cuanto a regularidad (ángulos entre caras) de los elementos.

Tabla 4.2. Parámetros estadísticos de la malla tetraédrica estructurada en una esfera

	Media	Mediana	Desviación típica	Coef. de variación
Longitud de las aristas	27.88	28.04	7.18	0.258
Área de las caras	345.5	301	132.4	0.383
Volumen de los elementos	2445	2214	1136	0.465
Ángulo entre caras en un elemento	1.467	1.488	0.539	0.367

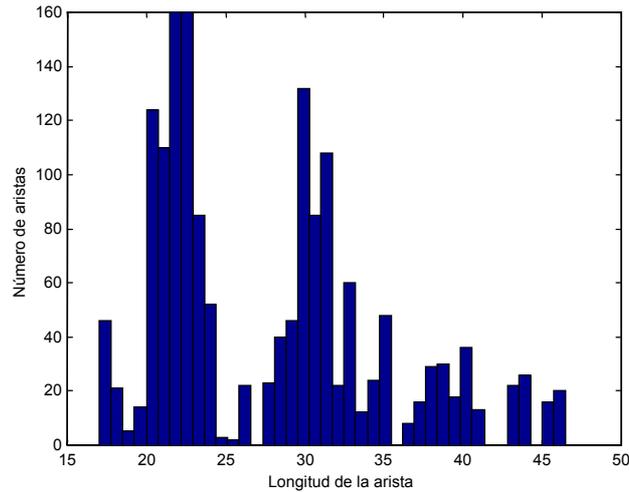


Figura 4.29. Histograma de la longitud de las aristas en la malla tetraédrica estructurada de una esfera

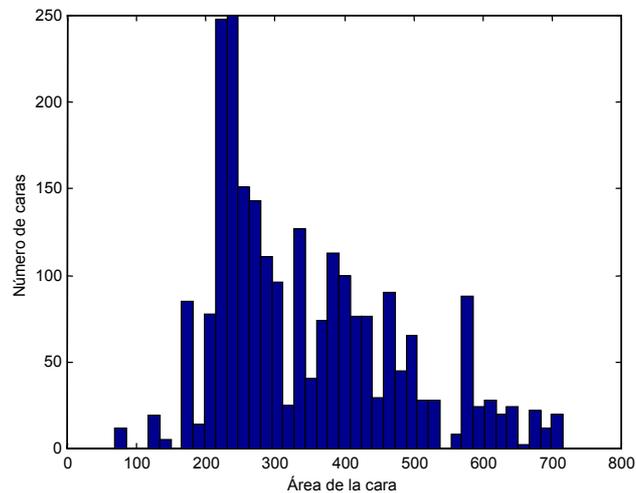


Figura 4.30. Histograma del área de las caras en la malla tetraédrica estructurada de una esfera

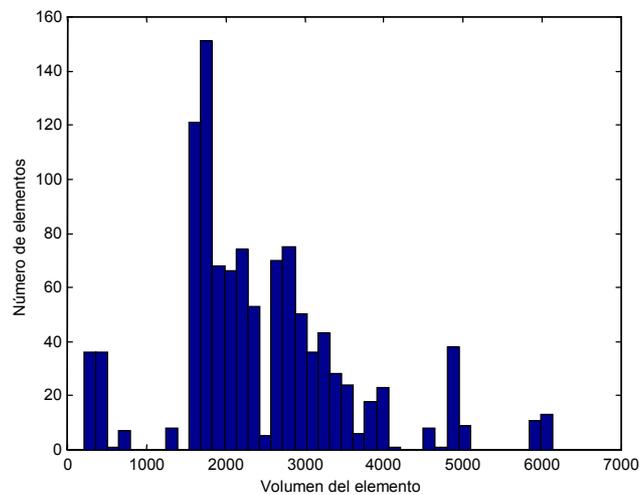


Figura 4.31. Histograma del volumen de los elementos en la malla tetraédrica estructurada de una esfera

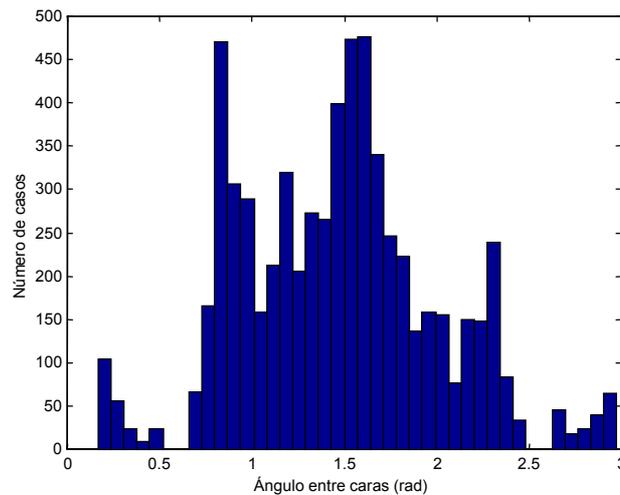


Figura 4.32. Histograma del ángulo entre las caras en la malla tetraédrica estructurada de una esfera

Para finalizar el análisis de resultados en la esfera, se presentan los obtenidos en la generación de una malla hexaédrica estructurada con el método de interpolación en la figura 4.33, así como el estudio estadístico de la longitud de las aristas de la malla en la tabla 4.3 y la figura 4.34. La discretización del contorno requirió 218 nodos, 432 aristas y 216 caras, y la malla volumétrica 343 nodos, 882 aristas, 756 caras y 216 elementos. Las conclusiones sobre calidad de la malla, tanto en homogeneidad de tamaños como en regularidad de elementos, son las extraídas de la malla estructurada tetraédrica, pues ésta se obtiene, como se vio, directamente de la hexaédrica mediante la descomposición de los hexaedros en tetraedros.

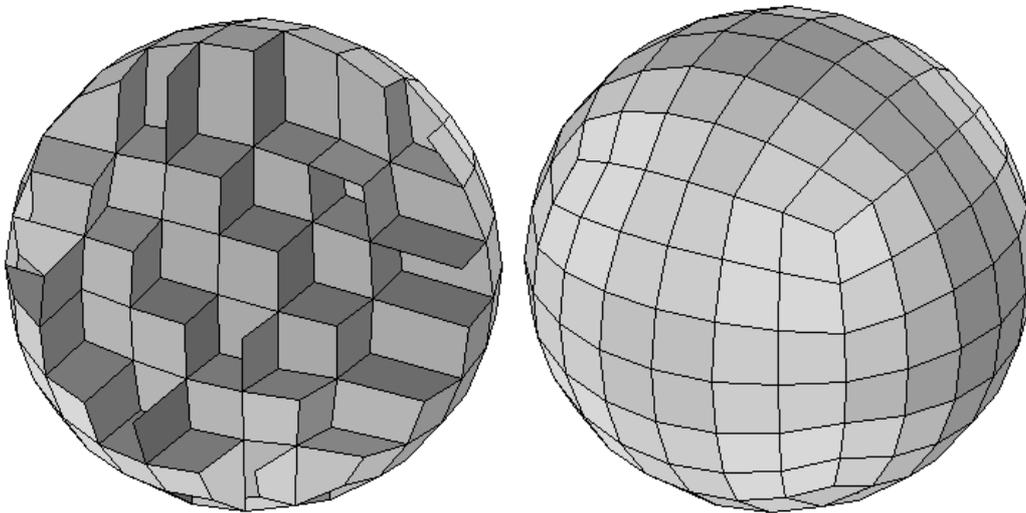


Figura 4.33. Malla hexaédrica generada con el método interpolador en una esfera: interior y exterior

Tabla 4.3. Parámetros estadísticos de la longitud de las aristas de la malla hexaédrica estructurada en una esfera

Media	Mediana	Desviación típica	Coef. de variación
23.17	22.02	4.48	0.193

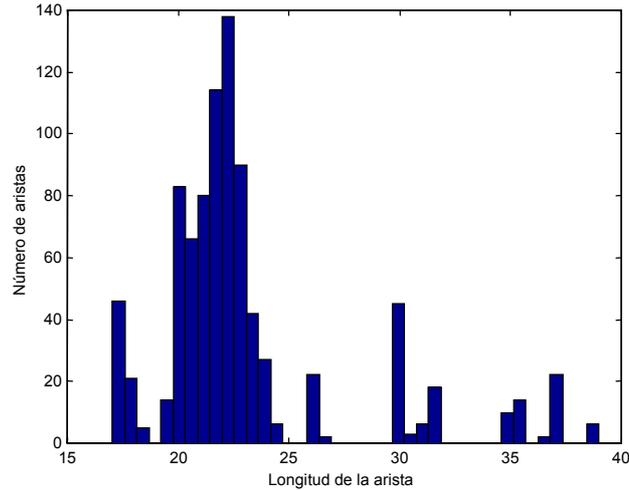


Figura 4.34. Histograma de la longitud de las aristas en la malla hexaédrica estructurada de una esfera

4.5.2. Tronco Piramidal

En este apartado se muestran los resultados obtenidos al discretizar un tronco piramidal. Tanto este ejemplo como los posteriores no permiten la generación de una malla estructurada, por lo que todos los resultados presentados se refieren al método de frente de avance. La base del tronco está dividida en 18 caras, mientras que la parte superior lo está en 11. La malla superficial completa consta de 62 nodos, 180 aristas y 120 caras, y esta discretización del contorno genera una malla volumétrica final (interior más contorno) de 68 nodos, 297 aristas, 400 caras y 170 elementos que se muestra en las figuras 4.35 y 4.36. Los parámetros estadísticos e histogramas de la malla se presentan en la tabla 4.4 y en las figuras 4.37-4.40.

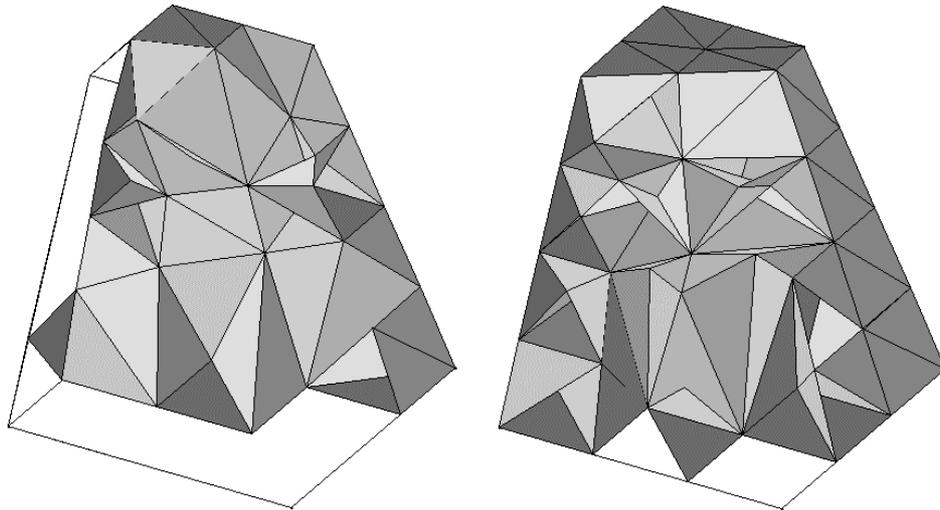


Figura 4.35. Tronco piramidal: estados 1 y 2

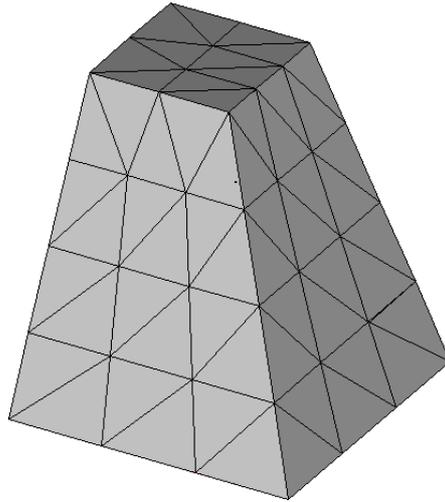


Figura 4.36. Tronco piramidal: estado final

Tabla 4.4. Parámetros estadísticos de la malla no estructurada en un tronco piramidal

	Media	Mediana	Desviación típica	Coef. de variación
Longitud de las aristas	32.57	30.71	8.22	0.252
Área de las caras	438	410.6	169.7	0.387
Volumen de los elementos	3451	3011	1830	0.53
Ángulo entre caras en un elemento	1.392	1.348	0.525	0.377

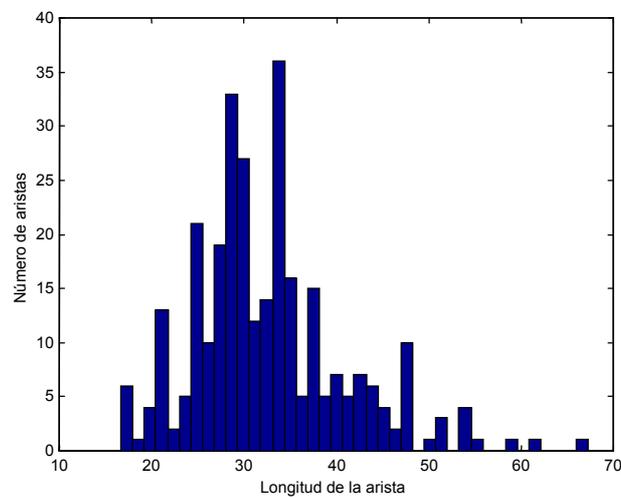


Figura 4.37. Histograma de la longitud de las aristas en la malla de un tronco piramidal

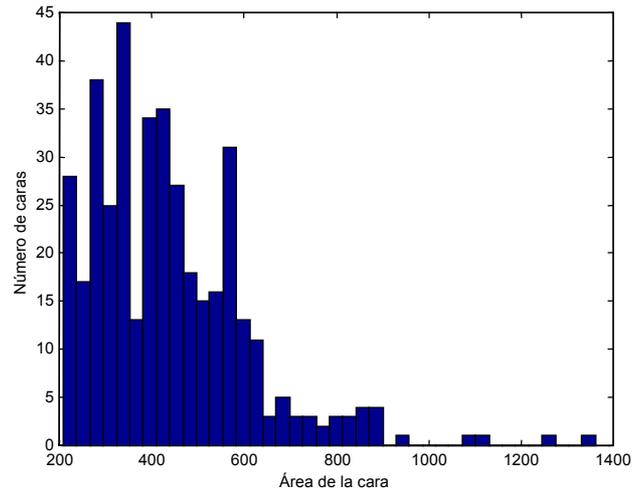


Figura 4.38. Histograma del área de las caras en la malla de un tronco piramidal

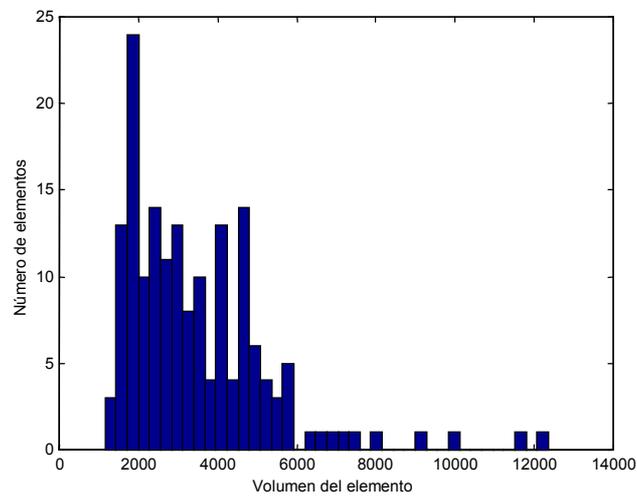


Figura 4.39. Histograma del volumen de los elementos en la malla de un tronco piramidal

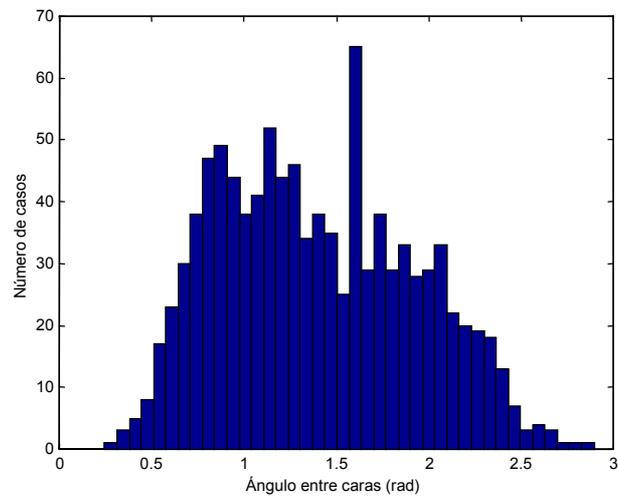


Figura 4.40. Histograma del ángulo entre las caras en la malla de un tronco piramidal

De estos datos se puede deducir que la tendencia a crear elementos más grandes en las etapas finales del mallado, constatada en el caso de la esfera, es menos acusada en este caso.

4.5.3. Cilindro Deformado

En este punto se analiza una figura de geometría cuasi-cilíndrica en la que tanto la base como las superficies laterales están formadas a partir de líneas curvas. La superficie fue discretizada con 128 nodos, 378 aristas y 252 caras, y se obtuvo una malla final de 152 nodos, 709 aristas, 990 caras y 432 elementos.

En la serie de estados que se presentan a continuación (figuras 4.41 y 4.42) se puede observar, soslayando el problema de la perspectiva, cómo en la parte central del mallado se forman elementos bastante pequeños e irregulares. Ésta es una situación típica de cierre, donde para poder ajustar las caras del frente se deben crear elementos de tamaño muy variable e irregulares. El análisis estadístico (tabla 4.5 y figuras 4.43-4.46) refleja este hecho en un elevado coeficiente de variación tanto para la uniformidad de los elementos como para su regularidad.

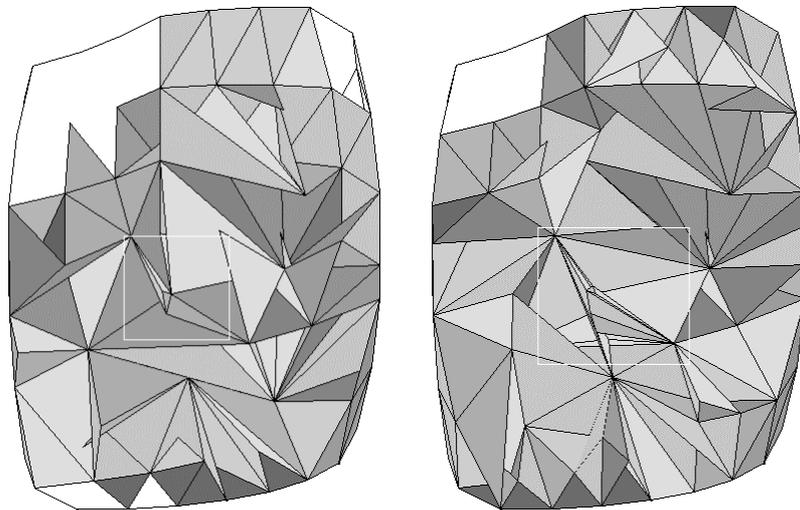


Figura 4.41. Cilindro deformado: estados 1 y 2

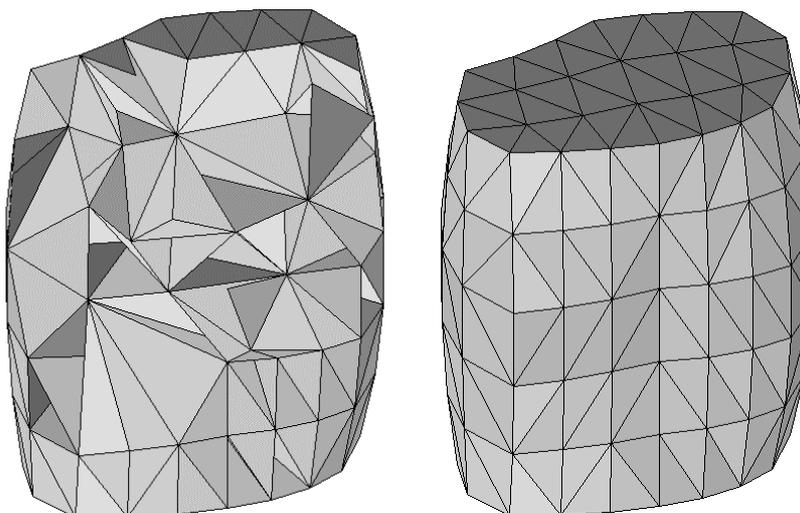


Figura 4.42. Cilindro deformado: estados 3 y final

Tabla 4.5. Parámetros estadísticos de la malla en un cilindro deformado

	Media	Mediana	Desviación típica	Coef. de variación
Longitud de las aristas	15.65	14.46	5.25	0.335
Área de las caras	99.91	86.65	49.26	0.493
Volumen de los elementos	354.9	295	210.2	0.592
Ángulo entre caras en un elemento	1.424	1.396	0.579	0.407

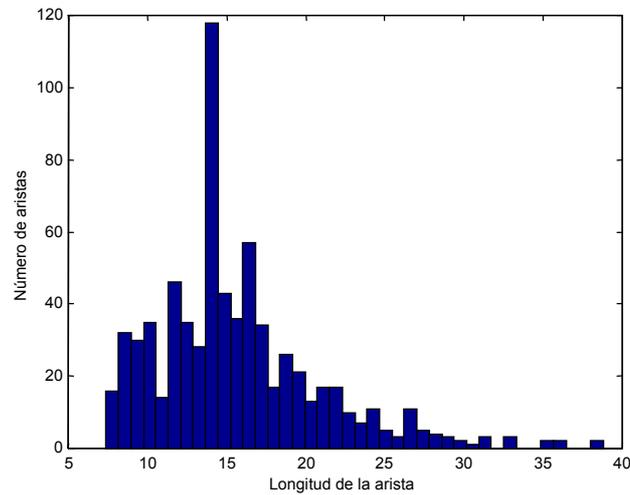


Figura 4.43. Histograma de la longitud de las aristas en la malla de un cilindro deformado

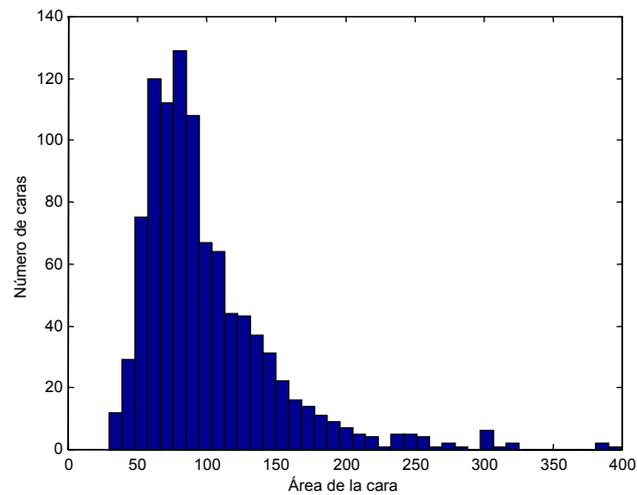


Figura 4.44. Histograma del área de las caras en la malla de un cilindro deformado

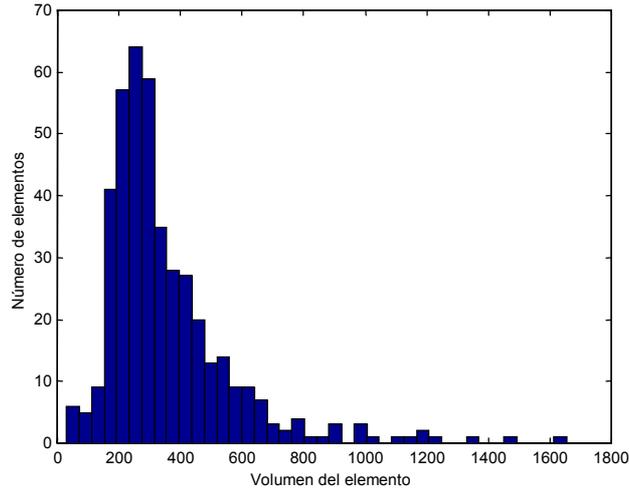


Figura 4.45. Histograma del volumen de los elementos en la malla de un cilindro deformado

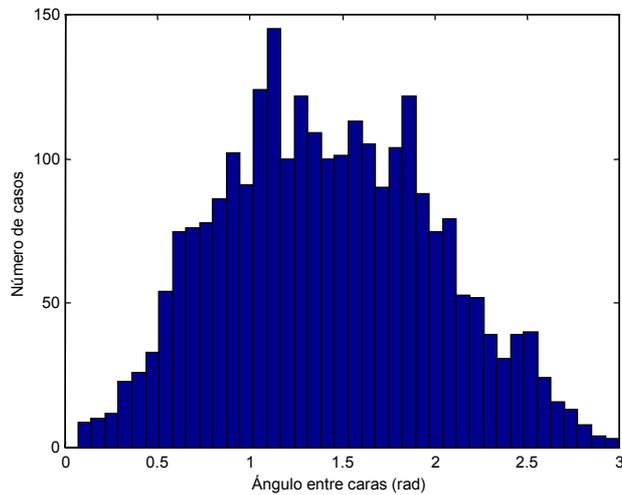


Figura 4.46. Histograma del ángulo entre las caras en la malla de un cilindro deformado

4.5.4. Sector Curvo

Esta figura consiste en una base plana sobre la que se levanta una superficie curva, definida por dos arcos de cónica. La discretización de este contorno está compuesta por 97 nodos, 285 aristas y 190 caras, y tras su discretización volumétrica se obtienen 116 nodos, 545 aristas, 765 caras y 335 elementos, que muestran parcialmente las figuras 4.47 y 4.48. Los parámetros estadísticos obtenidos, así como los histogramas de las características geométricas de los distintos componentes de esta malla se muestran en la tabla 4.6 y las figuras 4.49-4.52.

Se puede apreciar, de nuevo, la generación de tetraedros más irregulares en las zonas de cierre, lo que provoca una dispersión considerable en el volumen de los elementos y en los ángulos entre caras.

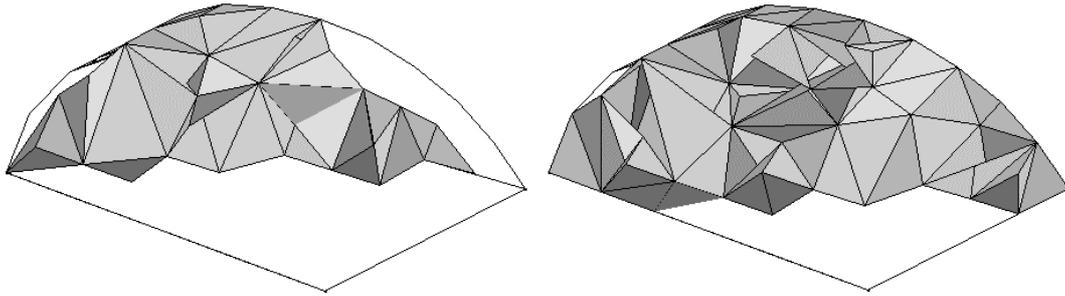


Figura 4.47. Sector curvo: estados 1 y 2

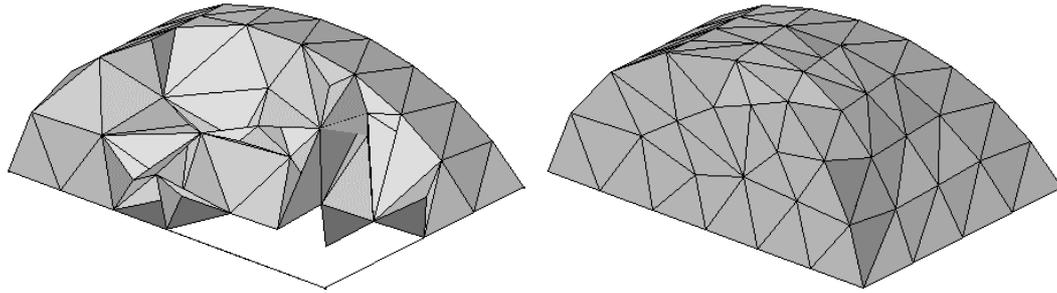


Figura 4.48. Sector curvo: estados 3 y final

Tabla 4.6. Parámetros estadísticos de la malla no estructurada en un sector curvo

	Media	Mediana	Desviación típica	Coef. de variación
Longitud de las aristas	32.77	31.39	8.41	0.257
Área de las caras	432.7	401.5	152.5	0.352
Volumen de los elementos	3219	2995	1338	0.416
Ángulo entre caras en un elemento	1.385	1.333	0.5598	0.404

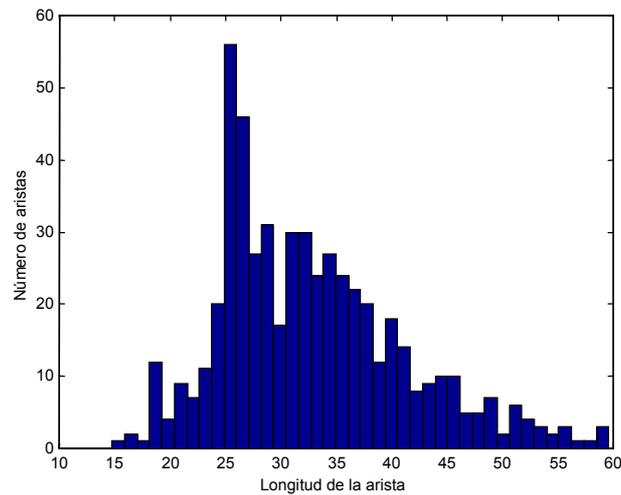


Figura 4.49. Histograma de la longitud de las aristas en la malla de un sector curvo

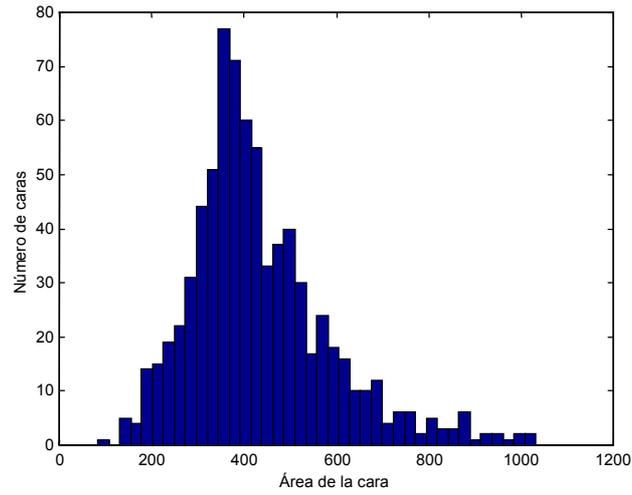


Figura 4.50. Histograma del área de las caras en la malla de un sector curvo

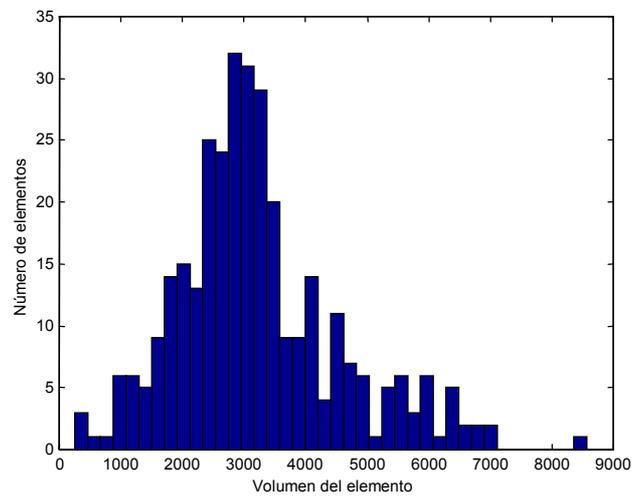


Figura 4.51. Histograma del volumen de los elementos en la malla de un sector curvo

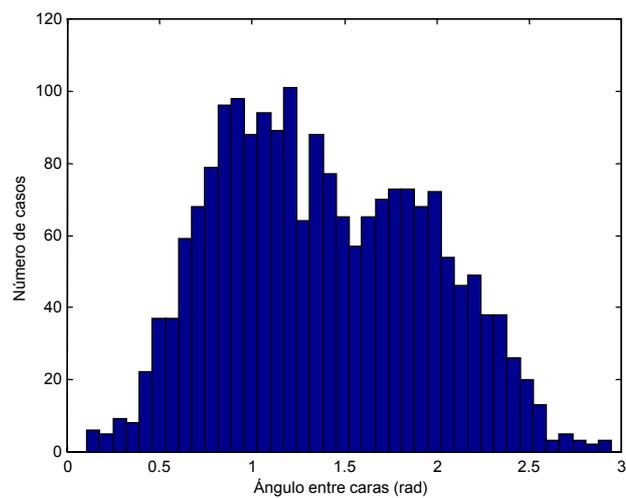


Figura 4.52. Histograma del ángulo entre las caras en la malla de un sector curvo

Tanto de este ejemplo como de los anteriores se puede extraer una conclusión fundamental relacionada con el principal inconveniente que presentan, en general, los métodos de frente de avance: las situaciones de cierre provocan la aparición de elementos de tamaño y forma muy variables, lo que repercute en una pérdida de calidad de la malla en esas zonas. Una posible solución a este problema es el uso de técnicas de mejora de calidad de la malla a posteriori, como las comentadas en el punto 4.4.

4.5.5. Reposicionamiento de Nodos

Como se comentó en el punto 4.4, la técnica de reposicionamiento de nodos pretende mejorar la calidad de la malla generada, es decir, sus características de uniformidad local y de regularidad. Para analizar en qué grado cumple este propósito se presentan en la tabla 4.7 los principales parámetros estadísticos de la malla no estructurada de una esfera, antes y después del reposicionamiento de sus nodos interiores. Visualmente se puede comprobar la mejora obtenida en la comparación de estas mallas que se muestra en la figura 4.53. En ella se puede apreciar cómo en la malla inicial existen, en la zona de cierre, unos elementos mayores y más irregulares que el resto, y cómo el reposicionamiento de nodos permite mejorar tanto la relación de aspecto como el tamaño de estos elementos. Las figuras 4.54-4.61 muestran los histogramas anteriores y posteriores a este reposicionamiento para las distintas variables analizadas. En todos ellos se observa una compresión del rango de variación de dichas variables tras la aplicación de esta técnica, lo que se traduce en una disminución del coeficiente de variación en todas ellas.

Tabla 4.7. Parámetros estadísticos de la malla no estructurada de una esfera antes y después del reposicionamiento de nodos

		Media	Mediana	Desviación típica	Coef. de variación
Longitud de aristas	Antes	25.7	23	8.13	0.316
	Después	24.5	23.8	5.19	0.212
Área de caras	Antes	264.7	224.5	144.2	0.545
	Después	249.9	238	77	0.308
Volumen de elementos	Antes	1523	1185	1267	0.83
	Después	1522	1419	623.6	0.409
Ángulo entre caras	Antes	1.426	1.35	0.5421	0.38
	Después	1.417	1.359	0.4567	0.322

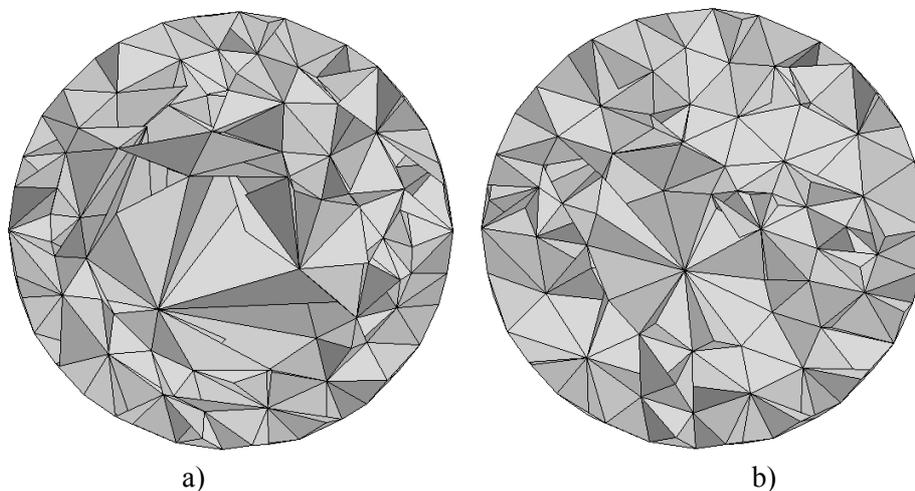


Figura 4.53. Malla interior en una esfera antes (a) y después (b) del reposicionamiento de nodos

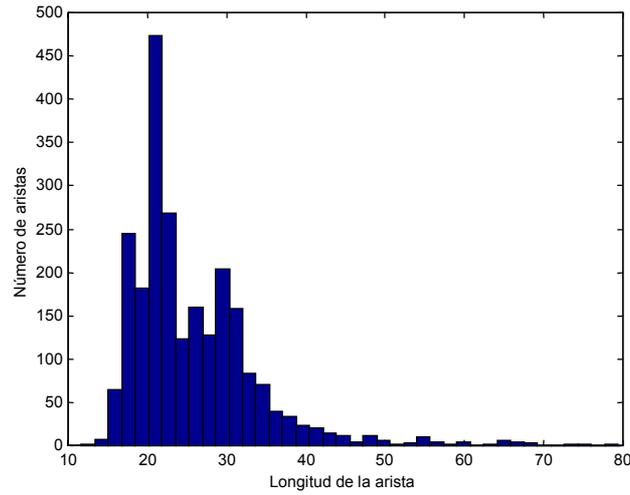


Figura 4.54. Histograma de longitudes de aristas antes del reposicionamiento de nodos

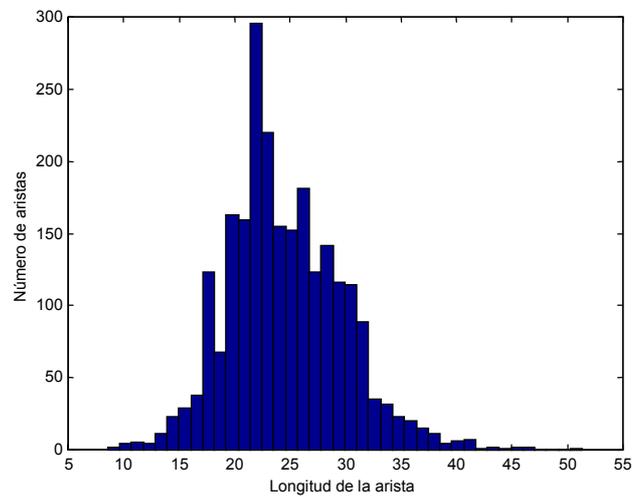


Figura 4.55. Histograma de longitudes de aristas después del reposicionamiento de nodos

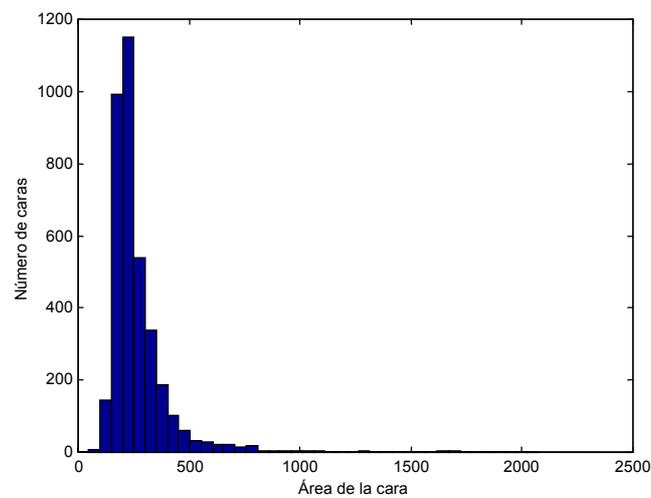


Figura 4.56. Histograma de áreas de caras antes del reposicionamiento de nodos

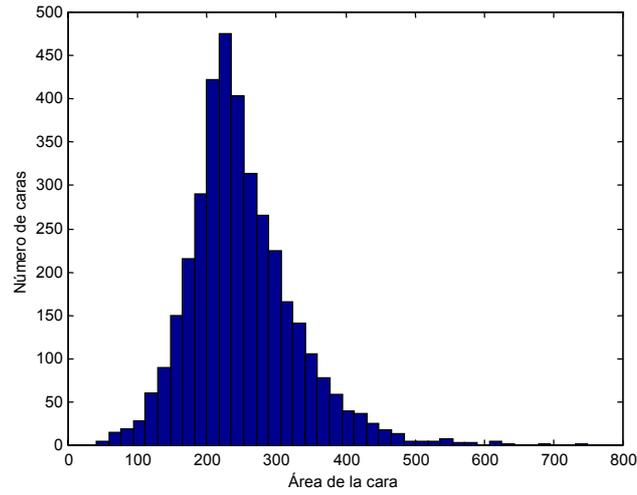


Figura 4.57. Histograma de áreas de caras después del reposicionamiento de nodos

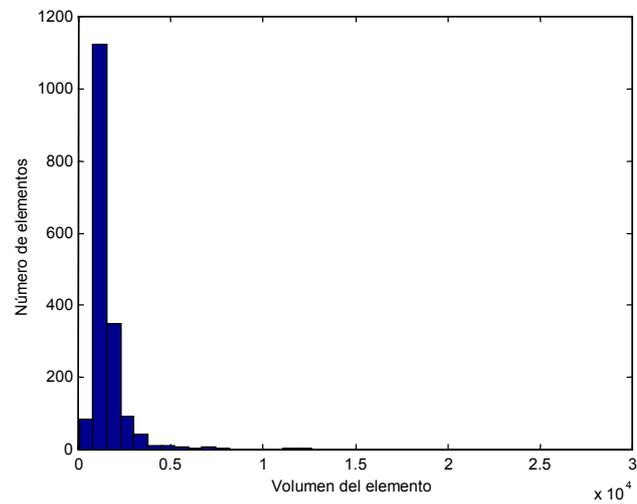


Figura 4.58. Histograma de volúmenes de elementos antes del reposicionamiento de nodos

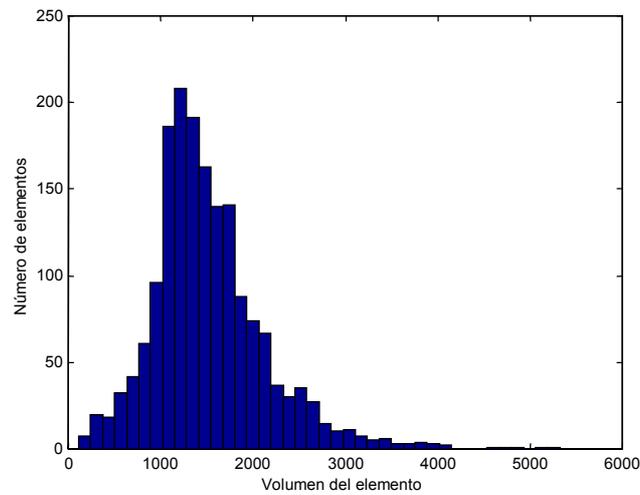


Figura 4.59. Histograma de volúmenes de elementos después del reposicionamiento de nodos

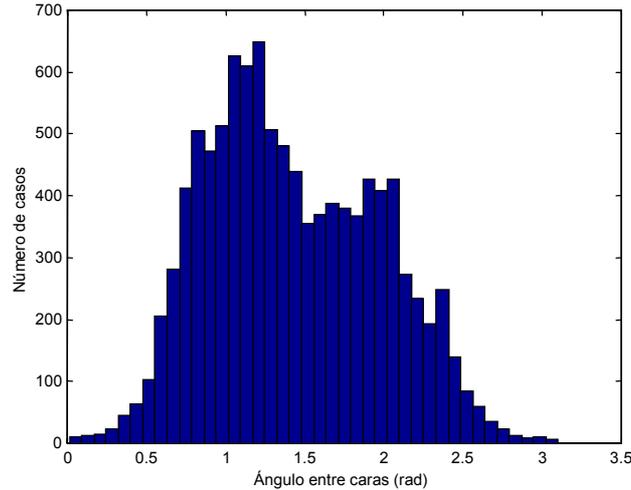


Figura 4.60. Histograma de ángulos entre caras antes del reposicionamiento de nodos

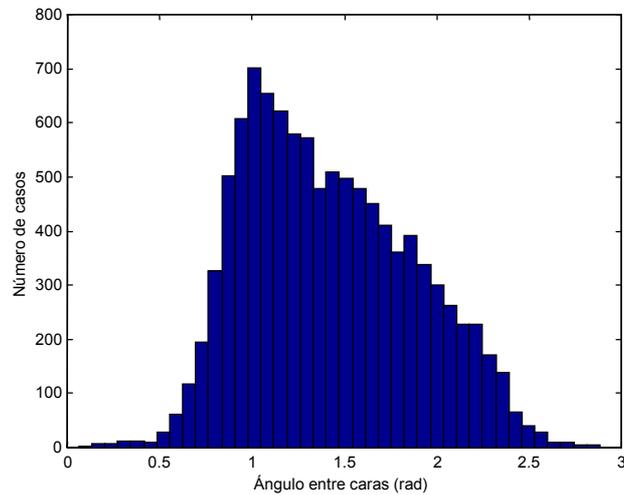


Figura 4.61. Histograma de ángulos entre caras después del reposicionamiento de nodos

4.5.6. Coste Computacional

El análisis del coste computacional de cada una de las técnicas descritas en este capítulo se realizó sobre un hexaedro regular discretizado uniformemente en su contorno con distintas densidades de malla. Las figuras 4.62-4.64 muestran el tiempo de generación de malla para los distintos métodos de mallado, y la tabla 4.8 presenta los parámetros obtenidos en el ajuste de los datos a una función potencial. Las mallas estructuradas, tanto hexaédrica como tetraédrica, presentaron la mayor velocidad de generación, ambas con un comportamiento cercano al cuadrático. La malla hexaédrica debería presentar un comportamiento lineal, pues en el método de interpolación tanto la generación de los nodos, como la de las aristas, caras y elementos lo son. El comportamiento cuasi-cuadrático es debido a causas ajenas al propio método, concretamente a la gestión de nodos vecinos que tiene lugar durante la generación de la malla. Esta gestión, que se realiza cada vez que se crea una arista, requiere funciones de almacenamiento dinámico en memoria que ralentizan considerablemente el proceso. De hecho, como ejemplo, eliminando esta gestión se ha obtenido un tiempo de 11.08 segundos en la generación de 125.000 elementos hexaédricos. El mayor coste obtenido en la malla estructurada tetraédrica se debe a este hecho y a otra característica inherente a la implementación del método,

no al propio método. Efectivamente, en la programación del método, la primera fase consiste en la generación de la malla hexaédrica, obteniéndose en una segunda fase la malla tetraédrica final como descomposición de los hexaedros. Esta implementación requiere la eliminación de los elementos hexaédricos, así como de sus caras cuadriláteras, y la renumeración de las nuevas caras triangulares y los tetraedros creados para mantener la coherencia en la numeración de los componentes de la malla. Como se comentó en el punto 2.7, los procedimientos de renumeración utilizados no son, en general, lineales, por lo que este efecto se suma al coste computacional total de la generación de la malla.

En el caso de la malla no estructurada, no es necesaria en ningún momento la renumeración de sus componentes, pues ninguno de ellos es eliminado. Por lo tanto, la naturaleza cuasi-cuadrática que presenta, según la figura 4.64, es achacable a otros motivos: la gestión de nodos vecinos comentada anteriormente, y las operaciones de búsqueda de nodos y control de intersecciones que se deben realizar recorriendo todo el frente. Este último motivo sí es propio del método, y para reducir su efecto en el coste computacional total se ha diseñado el control por retícula jerárquica descrito en el punto 4.3. La aplicación de este control, que evita el recorrido total del frente, consigue una reducción en el coste computacional como la que muestra la figura 4.64, donde puede apreciarse que la propia gestión de la retícula introduce un coste adicional que provoca que la utilidad de ésta sólo se manifieste a partir de un número dado de elementos generados.

Respecto al reposicionamiento de nodos, la figura 4.65 muestra que, al igual que en el caso bidimensional, el coste de esta técnica es lineal si, como es el caso, cada nodo conoce cuáles son sus nodos vecinos y no es necesaria una búsqueda por toda la malla.

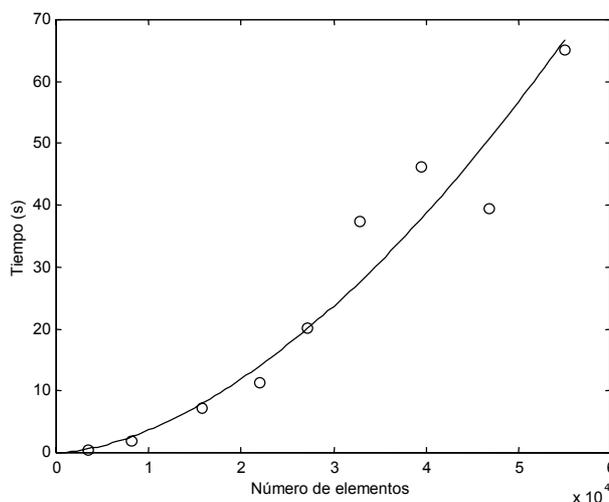


Figura 4.62. Tiempos de generación de malla hexaédrica estructurada con el método interpolador

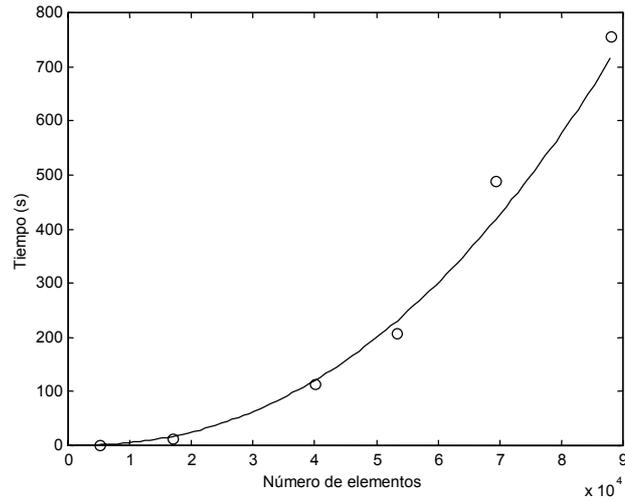


Figura 4.63. Tiempos de generación de malla tetraédrica estructurada con el método interpolador

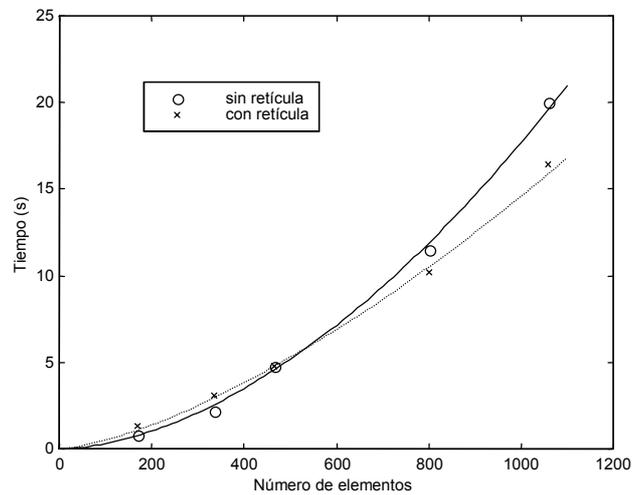


Figura 4.64. Tiempos de generación de malla tetraédrica no estructurada con el método de frente de avance, con y sin retícula jerárquica

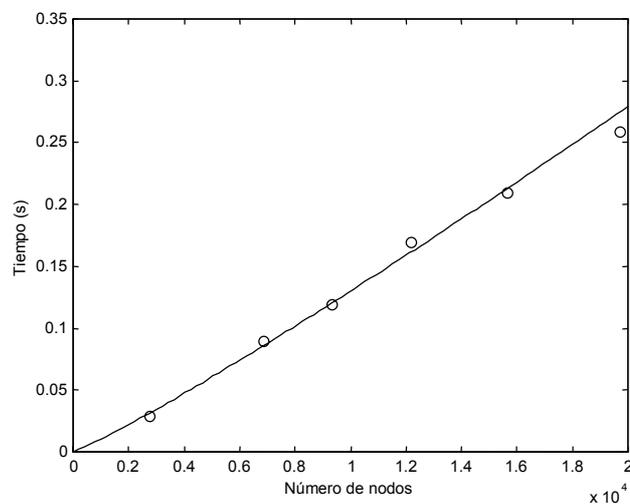


Figura 4.65. Tiempos de reposicionamiento de nodos

Tabla 4.8. Ajuste de los tiempos de ejecución a la curva $t = a \cdot x^b$

	a	b	Correlación
Mallado hexaédrico con interpolación	5.2e-7	1.7	1.001
Mallado tetraédrico con interpolación	4.9e-9	2.26	0.83
Frente de avance	8.35e-5	1.78	0.95
Frente de avance con retícula	5.83e-4	1.47	0.93
Reposicionamiento de nodos	5.01e-6	1.1	1.11

Capítulo 5.

MÉTODOS DE MALLADO ADAPTATIVO

Como se comenta en la introducción de la tesis, la etapa de generación de malla es una de las más importantes en el MEF, pues la calidad de la discretización repercute directamente en la precisión de la solución obtenida. En los capítulos anteriores se han presentado métodos de generación de malla flexibles que permiten la adecuación de la malla a las características del problema que se pretende estudiar. Buena parte de los problemas tratados con el MEF presentan soluciones suficientemente uniformes como para ser obtenidas con una buena precisión mediante discretizaciones homogéneas del dominio. Es el caso, por ejemplo, del análisis de una guía rectangular o una cavidad cilíndrica homogéneas. Sin embargo, en muchos casos, las características de la geometría de la estructura y de los materiales que alberga producen soluciones que presentan una gran variación a lo largo del dominio del problema o, incluso, singularidades en algunas zonas del mismo. En este caso, una malla homogénea es altamente ineficiente, pues presenta incógnitas en zonas donde no son necesarias por la escasa variación de la solución, y carencia de grados de libertad allí donde la variación de la solución es mayor. El aumento de la densidad de la malla de forma homogénea mejora la precisión de la solución, pero no es una solución adecuada, pues incrementa considerablemente el coste computacional del problema, principalmente en la fase de resolución del problema algebraico asociado. Es decir, la eficiencia de la malla se mantiene constante al aumentar su densidad de forma homogénea.

La generación de una malla eficiente se consigue con la adecuación de ésta a la variación de la solución del problema. Con los métodos de generación de malla descritos anteriormente y una definición multibloque de la geometría, un usuario puede generar una discretización adecuada que reduzca considerablemente el error cometido en la solución. Asimismo, la utilización de elementos singulares [Gil97], [Pan98] en las proximidades de una singularidad requiere un previo conocimiento de la situación de ésta en el dominio del problema. En ambos casos es necesario que el usuario disponga de una experiencia previa en el tipo de problemas que se analizan, de forma que pueda tener una idea aproximada del tipo de solución, o de dónde va a requerir ésta mayor densidad de grados de libertad, en el primer caso, o la introducción de elementos singulares, en el segundo caso. Este requisito se complica en problemas cerrados sin fuentes como los que se tratan en esta tesis, donde la solución del problema es un conjunto de autofunciones, cada una de ellas con su distribución característica y, por tanto, con una malla adecuada para cada modo. Por otra parte, la definición de la geometría y de las características de densidad de la malla necesarias para obtener una discretización *ad hoc* supone un coste, en este caso no computacional, que puede ser evitado con la utilización de técnicas que generen de modo automático estas mallas eficientes que conjugan una elevada precisión en la solución con un reducido número de grados de libertad.

Los métodos adaptativos son los encargados de esta generación automática de malla adaptada a la solución. En la bibliografía se puede encontrar otro tipo de métodos [Zwa98], [Li98], [Cou98], [Lea98b], [Kup98], [Wan98] que persiguen la adaptación al dominio en problemas parabólicos donde el dominio se ve modificado a largo de la simulación, de modo

que la malla utilizada se debe modificar con el tiempo. Esta tesis no trata estos métodos pues, en general, el dominio en los problemas de guiado de ondas y cavidades resonantes no sufre una deformación temporal.

Grosso modo, un método de mallado adaptativo es una variante iterativa del MEF en la que, en un primer paso, se genera una malla inicial con pocos elementos y, posteriormente, se resuelve el problema con esa discretización, se estima el error cometido en el cálculo de la solución, y se añaden grados de libertad en las regiones del dominio donde el error sea mayor. Tal como muestra la figura 5.1, este proceso se repite hasta que tiene lugar la condición de finalización. Esta condición puede consistir, por ejemplo, en la obtención de una precisión preestablecida o en alcanzar un número de grados de libertad máximo. En el esquema de la figura 5.1 se pueden distinguir los tres puntos fundamentales de un método adaptativo: la estimación o indicación del error en cada elemento, la elección de las zonas o elementos que deben ser refinados, y el enriquecimiento o aumento de grados de libertad en los elementos seleccionados.

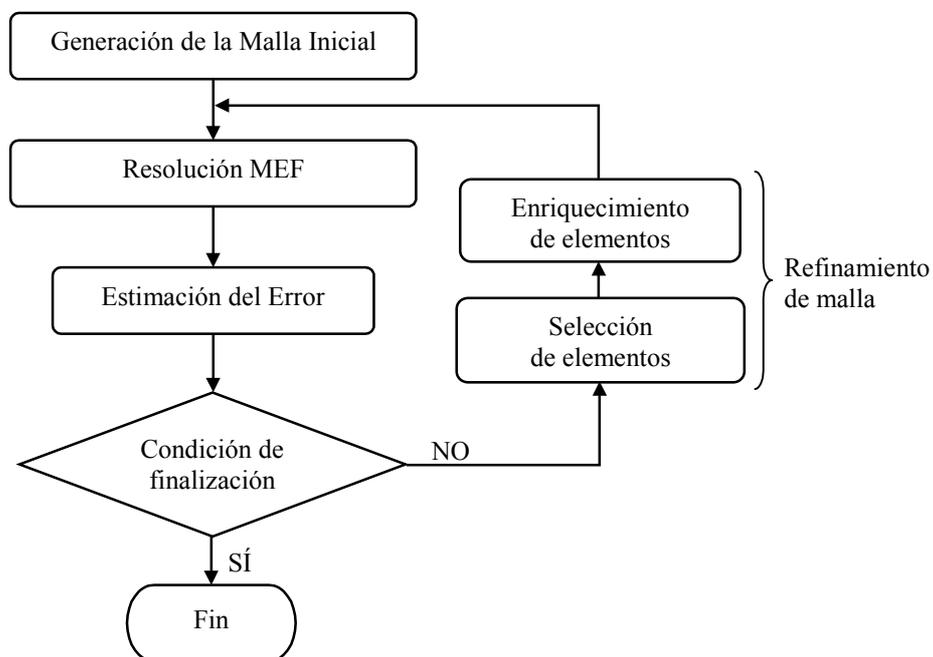


Figura 5.1 Diagrama de flujo del MEF adaptativo

En este capítulo se presentan los distintos indicadores de error y métodos de refinamiento de malla desarrollados en la presente tesis para la resolución eficiente de problemas electromagnéticos cerrados en guías y cavidades. La aplicación del MEF a este tipo de problemas y los tipos de interpolación utilizados se describen en los apéndices 3 y 4, respectivamente.

En esta introducción se han comentado algunos aspectos generales de los procedimientos adaptativos. A continuación, en el primer punto, y tras una breve revisión del concepto de error y de los distintos tipos de estimadores que se pueden encontrar en la bibliografía, se presentan los indicadores de error desarrollados. En el punto 5.2 se describen las estrategias de refinamiento implementadas para problemas de guiado de onda. En el siguiente punto se desarrollan indicadores para problemas en cavidades y, por último, se analizan los resultados obtenidos en la aplicación del método adaptativo en el análisis de líneas de transmisión.

5.1. Estimación del Error *A Posteriori*

El error cometido en la resolución de un problema vectorial genérico mediante el MEF se define como:

$$\bar{e} = \bar{u} - \bar{u}_h \quad (5.1)$$

donde \bar{u} es la solución exacta del problema y \bar{u}_h es la solución obtenida mediante el MEF.

Esta diferencia entre la solución obtenida y la real es la suma de distintos tipos de error [Sal98]:

- Errores por discretización insuficiente de contornos e interfaces en el problema cuando éstos no son rectos. Este error se puede disminuir con la utilización de elementos curvos.
- Errores al estimar constantes las propiedades del material en un elemento o un conjunto de ellos.
- Errores de integración numérica, cuando las funciones de interpolación utilizadas obligan a la utilización de métodos no analíticos para resolver las integrales que se plantean en el MEF.
- Errores de truncamiento debidos a la precisión finita de las computadoras. El condicionamiento de las matrices del autosistema final influye en gran medida sobre la magnitud de este error.
- Errores de convergencia cuando se utilizan métodos iterativos en la resolución del autosistema final. Este error depende del número de iteraciones realizadas.
- Errores de no conformidad, debidos a la discontinuidad de las derivadas de la solución en las aristas interiores y al cumplimiento aproximado de las condiciones de Neumann en las aristas del contorno que presentan este tipo de condición. Las discretizaciones no conformes del dominio o la utilización de elementos de distinto orden también producen este tipo de error si no se impone a las incógnitas no conformes un valor interpolado, como indican las figuras 5.16 y 5.18.
- Errores de interpolación, al sustituir la forma desconocida de la solución por formas, en general, polinómicas.

De todos ellos, los inherentes al MEF y susceptibles de ser reducidos mediante el incremento de incógnitas son el primero y los dos últimos.

Particularizando la definición (5.1) a cada elemento de la malla, se tiene:

$$\bar{e}^e = \bar{u}^e - \bar{u}_h^e \quad (5.2)$$

La norma de este vector error es una medida del error cometido en el elemento:

$$\|\bar{e}^e\| = \|\bar{u}^e - \bar{u}_h^e\| \quad (5.3)$$

Para el cálculo de (5.3) se pueden emplear, entre otras, la norma de energía:

$$\|\bar{e}^e\|_E = \left(\int_{\Omega^e} \bar{e}^{e*} \cdot L \cdot \bar{e}^e d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

donde L es el operador diferencial, en nuestro caso $\nabla \times \nu_e^{-1} \nabla \times -\omega^2 \vartheta_e$, o la norma L_2 :

$$\|\bar{e}^e\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega^e} \bar{e}^{e*} \cdot \bar{e}^e d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

Cualquiera que sea la norma utilizada, el error total es la suma de las contribuciones elementales:

$$\|\bar{e}\|^2 = \sum_{e=1}^{n_e} \|\bar{e}^e\|^2 \quad (5.6)$$

Evidentemente, en la práctica la solución exacta del problema no es conocida (si lo fuera no sería necesario ningún método numérico de resolución) y, por tanto, no es posible conocer el error exacto o la precisión exacta obtenida. Si se puede, sin embargo, obtener una estimación o una indicación del error cometido.

Los estimadores de error proporcionan un modo fiable de llevar a cabo el proceso de refinamiento de la malla. Un buen estimador de error no sólo identifica las regiones críticas del problema, sino que, además, fija la exactitud de la solución calculada. Los estimadores de error se pueden clasificar en estimadores *a posteriori* y estimadores *a priori*. Debido a la falta de datos relacionados con la naturaleza y el comportamiento físico del problema y su solución, resulta muy difícil estimar el error *a priori*, es decir, antes de que se calcule la solución. Por tanto, la mayoría de los estimadores de error utilizados en la práctica son *a posteriori*, es decir, calculan el error una vez la solución ha sido hallada. Para controlar de un modo efectivo el error de discretización, el estimador de error *a posteriori* debe ser robusto, fiable y preciso, y debe controlar el proceso adaptativo de refinamiento de la malla de un modo computacionalmente económico. La fiabilidad de un estimador de error debe asegurar la correcta adaptación de la malla del problema independientemente de su naturaleza y el tipo de materiales que presente.

En la bibliografía se puede encontrar una gran variedad de estimadores de error. En [Fer88], [Hin91], [Ain92a], [Bab93], [Ver96] se hace una revisión somera de algunos de más utilizados. La clasificación más completa se puede encontrar en [Sal98], donde se distinguen los siguientes tipos de estimadores:

- Residuales:
 - Completos: estiman el error a partir del residuo elemental interior y el de interfaz en las aristas comunes a dos elementos y en las aristas del contorno Neumann. Es decir, cuantifican en qué medida se cumple la ecuación diferencial que define el problema en el interior del elemento y las condiciones de contorno (generalmente de continuidad de variables asociadas a la solución) en sus aristas. Desarrollado originalmente para problemas unidimensionales [Bab78] y bidimensionales [Bab79] por Babuška y Rheinboldt, en [Kel83] se puede encontrar un desarrollo más sencillo y que incorpora los factores de ponderación necesarios para obtener una estima del error. Otras implementaciones y aplicaciones de este tipo de estimador se presentan en [Fer88], [Ode89], [Fer90], [Hin91], [Bab92], [Bel93], [Sal95], [Ver96], [Ste97], [Sal98].
 - Interiores: sólo tienen en cuenta el residuo en el interior del elemento [Fer88].
 - De interfaz: sólo tienen en cuenta el residuo en las aristas del elemento. Es decir, dan una medida del incumplimiento de las condiciones de continuidad en las variables del problema [Cen85], [Gol92], [Rai94].
 - Residuales autoequilibrados o de resolución de problema local: la estimación del error se basa en el residuo completo, pero a través de la resolución de problemas locales en cada elemento o conjunto de elementos con un nodo común [Kel84], [Ban85], [Kel87], [Fer88], [Fer90], [Ain92b], [Dra92], [Ain93], [Che94], [Ver96], [Alo96], [Gir96], [Jän96], [Ban97].

- Basados en el cumplimiento de relaciones constitutivas de variables relacionadas con la solución del problema [Lad83], [Rem96] o de condiciones de continuidad en las aristas (2D) o caras (3D) del problema [Gol93]. Estos métodos generalmente coinciden con los residuales de interfaz, pues la violación de continuidad es precisamente el salto producido en las interfaces de la malla.
- Complementarios o duales: proporcionan un límite superior y un límite inferior del error. [Kel84], [Cen85], [Kel87], [Ode89], [Mit92].
- De recuperación: en ellos, la solución exacta en (5.2) es sustituida por una función recuperada o suavizada a partir de la obtenida con el MEF y que se supone más exacta que ésta [Fer88], [Zhu90], [Hin91], [Dur91], [Bab93], [Wib93], [Low93], [Li94], [Ver96], [Oh96], [Mer98]. De todos ellos, el más popular es el denominado estimador Zienkiewicz-Zhu [Zie87], [Ain89], [Zie91], [Zie92a], [Zie92b].
- Basados en técnicas de extrapolación.
- Basados en teoría de interpolación: en ellos se estiman derivadas de orden superior de la solución en el elemento a partir de los valores de la solución en los elementos vecinos [Bid86], [Eri88], [Ode89], [Bel93]. Estos estimadores, en su mayor parte, pueden catalogarse también como estimadores de recuperación.
- Basados en la fórmula de integración de Green [Ada92], que estiman el error cometido comparando el valor de la solución en un nodo con el obtenido a partir de la fórmula de integración de Green en un contorno alrededor del nodo.
- Basados en la variación de alguna magnitud en dos soluciones MEF, y asumiendo que una de ellas es más precisa que la otra [Gol93].
- Basados en la variación de las posiciones nodales. Una pequeña variación de la posición de un nodo de la malla en una zona correctamente discretizada implica una pequeña variación en el valor del funcional. Sin embargo, si el nodo se encuentra en una zona del dominio con una pobre discretización, la variación de su posición se traducirá en un cambio significativo del valor del funcional. Por tanto, las derivadas de este funcional respecto a la posición del nodo son un instrumento de identificación de las zonas que necesitan ser refinadas [McF96].

A esta lista se pueden añadir otros estimadores menos extendidos, como los basados en el postprocesado de la solución [Ode89] o en bases jerárquicas de funciones de interpolación [Mit91], [Ver96]. La mayor parte de los estimadores enumerados han sido desarrollados en el contexto de problemas de ingeniería civil (mecánica estructural) y dinámica de fluidos. En el campo del electromagnetismo, se pueden encontrar distintos desarrollos y aplicaciones de estimadores de error en [Cen85], [Bid86], [Fer88], [Fer90], [Ada92], [Gol92], [Dra92], [Mit92], [Gol93], [Low93], [Che94], [Rai94], [Alo96], [Gir96], [McF96], [Jän96], [McF96], [Rem96], [Sal95], [Sal98].

5.1.1. Indicador de Error Residual

La expresión general de la norma de energía al cuadrado del indicador de error residual en el elemento e para problemas de análisis de onda completa en problemas bidimensionales [Sal98] viene dada por:

$$\|\vec{e}^e\|^2 = f_s \frac{h_e^2}{\lambda_{v_e^{-1}, \min}^p} \iint_{\Omega^e} \vec{r}_s^{e*} \cdot \vec{r}_s^e d\Omega + f_l \frac{h_e}{\lambda_{v_e^{-1}, \min}^p} \sum_{\Gamma_k \in \Gamma_{\text{int, Neu}}^e} \int_{\Gamma_k} \vec{r}_l^{k*} \cdot \vec{r}_l^k d\Gamma \quad (5.7)$$

donde el primer término es una medida del residuo interno \vec{r}_s^e y el segundo es una medida de los residuos singulares en las aristas internas $\vec{r}_l^k|_{\text{int}}$ o de condición de contorno Neumann $\vec{r}_l^k|_{\text{Neumann}}$, f_s y f_l son factores de ponderación de estos residuos; h_e es una medida del tamaño del elemento, que viene dada por la mayor distancia entre nodos del elemento, es decir, la mayor arista en el caso del triángulo, y la mayor diagonal en el caso del cuadrilátero; $\lambda_{v_e^{-1}, \min}$ es el menor autovalor del tensor v_e^{-1} , y p es el orden de las funciones de interpolación empleadas. Los elementos utilizados en esta tesis son lineales y, por tanto, $p=1$. Las expresiones de los residuos internos y singulares son:

$$\vec{r}_s^e = \nabla \times v_e^{-1} \nabla \times \vec{u}^e - \omega^2 \vartheta_e \vec{u}^e \quad (5.8)$$

$$\vec{r}_l^k|_{\text{int}} = \hat{n} \times (v_1^{-1} \nabla \times \vec{u}_1 - v_2^{-1} \nabla \times \vec{u}_2) \quad (5.9)$$

$$\vec{r}_l^k|_{\text{Neumann}} = \hat{n} \times v_e^{-1} \nabla \times \vec{u}^k \quad (5.10)$$

En estas expresiones, \vec{u}^e es la solución obtenida mediante el MEF en el elemento e , y \vec{u}^k su particularización para la arista k , teniendo en cuenta la variación en z , es decir:

$$\vec{u}^e(x, y, z) = \vec{u}_0^e(x, y) e^{-\gamma z} \quad (5.11)$$

Los tensores v_e y ϑ_e describen las propiedades del material presente en el elemento e . Su significado viene descrito en el apéndice 3, así como el de ω . Los subíndices 1 y 2 de (5.9) hacen referencia a los dos elementos que comparten la arista interior k , y \hat{n} es el vector unitario perpendicular a esa arista.

La expresión (5.7) coincide con la utilizada en las formulaciones cuasiestáticas [Sal98], pero allí $\|\vec{\epsilon}^e\|^2$ es un estimador del error cometido, es decir, es una cota superior de la diferencia entre la solución obtenida mediante el MEF y la solución exacta. En el caso del análisis de onda completa, $\|\vec{\epsilon}^e\|^2$ es una medida cualitativa de esa diferencia, es decir, permite conocer si el error cometido es mayor en un elemento que en otro y, por tanto, detectar zonas que requieran una mayor densidad de grados de libertad, pero la suma de los distintos errores elementales no proporciona una cota del error cometido en el problema. Por esta razón, tanto éste como los posteriores estimadores de error descritos en esta tesis se denominan indicadores de error.

La obtención de auténticos estimadores de error en problemas de onda completa no es posible. Se puede encontrar información sobre los problemas que plantea la ecuación de onda respecto a una estimación correcta del error en [Bab97a], [Bab97b].

Tanto para este indicador como para cualquier otro se puede definir el *índice de efectividad* asociado a él como el cociente entre la estimación del error y el error real cometido en el cálculo de la solución. Este parámetro debe tender a uno conforme el proceso de adaptación avanza, pero sólo se puede obtener en problemas cuya solución exacta y, por tanto, su error real son conocidos.

5.1.1.1. Residuo Interior

Desarrollando (5.8) y teniendo en cuenta (5.11) se tiene:

$$\nabla \times \bar{u}^e = e^{-\gamma z} \left[\left(\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial y} + \mathcal{W}_{0y}^e \right) \hat{x} + \left(-\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial x} - \mathcal{W}_{0x}^e \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} - \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} \right) \hat{z} \right] \quad (5.12)$$

$$\nabla \times \hat{v}_e^{-1} \nabla \times \bar{u}^e = e^{-\gamma z} \left[\begin{aligned} & \gamma \left(v_{yx}^{-1} \left(\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial y} + \mathcal{W}_{0y}^e \right) + v_{yy}^{-1} \left(-\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial x} - \mathcal{W}_{0x}^e \right) + v_{yz}^{-1} \left(\frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} - \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} \right) \right) + \\ & + v_{zx}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial u_{0y}^e}{\partial y} \right) + v_{zy}^{-1} \left(-\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial x \partial y} - \gamma \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} \right) + v_{zz}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_{0y}^e}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_{0x}^e}{\partial y^2} \right) \\ & - \gamma \left(v_{xx}^{-1} \left(\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial y} + \mathcal{W}_{0y}^e \right) + v_{xy}^{-1} \left(-\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial x} - \mathcal{W}_{0x}^e \right) + v_{xz}^{-1} \left(\frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} - \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} \right) \right) - \\ & - v_{zx}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} \right) - v_{zy}^{-1} \left(-\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial x} \right) - v_{zz}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_{0y}^e}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{0x}^e}{\partial x \partial y} \right) \\ & - v_{xx}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial u_{0y}^e}{\partial y} \right) - v_{xy}^{-1} \left(-\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial x \partial y} - \gamma \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} \right) - v_{xz}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_{0y}^e}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_{0x}^e}{\partial y^2} \right) + \\ & + v_{yx}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} \right) + v_{yy}^{-1} \left(-\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial x} \right) + v_{yz}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_{0y}^e}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{0x}^e}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right] \quad (5.13)$$

$$\omega^2 \vartheta_e \bar{u}^e = e^{-\gamma z} \omega^2 \begin{bmatrix} \vartheta_{xx} u_{0x}^e + \vartheta_{xy} u_{0y}^e + \vartheta_{xz} u_{0z}^e \\ \vartheta_{yx} u_{0x}^e + \vartheta_{yy} u_{0y}^e + \vartheta_{yz} u_{0z}^e \\ \vartheta_{zx} u_{0x}^e + \vartheta_{zy} u_{0y}^e + \vartheta_{zz} u_{0z}^e \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

donde se ha elidido el subíndice e en los elementos de v_e^{-1} y ϑ_e para simplificar la notación.

Elementos Triangulares Lineales con Interpolación Mixta Vectorial Conforme en Rotacional / Nodal Lagrange

Particularizando para la interpolación utilizada en el análisis de líneas de transmisión con elementos triangulares, descrita en los apéndices 3 y 4, la expresión (5.13) se simplifica considerablemente, pues las derivadas segundas se anulan:

$$\nabla \times \hat{v}_e^{-1} \nabla \times \bar{u}^e = e^{-\gamma z} \left[\begin{aligned} & \gamma \left(v_{yx}^{-1} \left(\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial y} + \mathcal{W}_{0y}^e \right) + v_{yy}^{-1} \left(-\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial x} - \mathcal{W}_{0x}^e \right) + v_{yz}^{-1} \left(\frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} - \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} \right) \right) - \gamma v_{zy}^{-1} \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} \\ & - \gamma \left(v_{xx}^{-1} \left(\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial y} + \mathcal{W}_{0y}^e \right) + v_{xy}^{-1} \left(-\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial x} - \mathcal{W}_{0x}^e \right) + v_{xz}^{-1} \left(\frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} - \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} \right) \right) - \gamma v_{zx}^{-1} \frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} \\ & \qquad \qquad \qquad \mathcal{W}_{xy}^{-1} \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} + \mathcal{W}_{yx}^{-1} \frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} \end{aligned} \right] \quad (5.15)$$

A partir de (5.14) y (5.15) se pueden obtener las tres componentes del residuo elemental:

$$\vec{r}_s^e = e^{-\gamma z} \begin{bmatrix} r_{sx}^e \\ r_{sy}^e \\ r_{sz}^e \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Y la integral del primer término de (5.7) se puede calcular como suma de las integrales en cada una de las componentes:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^e} (\vec{r}_s^{e*} \cdot \vec{r}_s^e) d\Omega &= \iint_{\Omega^e} (r_{sx}^{e*} \cdot r_{sx}^e + r_{sy}^{e*} \cdot r_{sy}^e + r_{sz}^{e*} \cdot r_{sz}^e) d\Omega = \\ &= \iint_{\Omega^e} r_{sx}^{e*} \cdot r_{sx}^e d\Omega + \iint_{\Omega^e} r_{sy}^{e*} \cdot r_{sy}^e d\Omega + \iint_{\Omega^e} r_{sz}^{e*} \cdot r_{sz}^e d\Omega \end{aligned} \quad (5.17)$$

La componente x viene dada por:

$$r_{sx}^e = C_x u_{0x}^e + C_y u_{0y}^e + C_z u_{0z}^e + C_c \quad (5.18)$$

donde

$$C_x = -\gamma^2 v_{yy}^{-1} - \omega^2 \vartheta_{xx} \quad (5.19)$$

$$C_y = \gamma^2 v_{yx}^{-1} - \omega^2 \vartheta_{xy} \quad (5.20)$$

$$C_z = -\omega^2 \vartheta_{xz} \quad (5.21)$$

$$C_c = -\gamma(v_{yz}^{-1} + v_{zy}^{-1}) \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} + \gamma v_{yz}^{-1} \frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} + \gamma v_{yx}^{-1} \frac{\partial u_{0z}^e}{\partial y} - \gamma v_{yy}^{-1} \frac{\partial u_{0z}^e}{\partial x} \quad (5.22)$$

La integración del residuo se simplifica notablemente si se realiza en el elemento canónico asociado al elemento real y que se describe en el apéndice 4. En este dominio canónico las componentes de la solución del problema y de las derivadas que aparecen en (5.22) se pueden expresar como:

$$u_{0x}^\zeta = K_{x\zeta_1} \zeta_1 + K_{x\zeta_2} \zeta_2 + K_{x\zeta_3} \zeta_3 \quad (5.23)$$

$$u_{0y}^\zeta = K_{y\zeta_1} \zeta_1 + K_{y\zeta_2} \zeta_2 + K_{y\zeta_3} \zeta_3 \quad (5.24)$$

$$u_{0z}^\zeta = K_{z\zeta_1} \zeta_1 + K_{z\zeta_2} \zeta_2 + K_{z\zeta_3} \zeta_3 \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial u_{0x}^\zeta}{\partial y} = \frac{1}{\Delta_\zeta} \sum_{i=1}^3 K_{x\zeta_i} b_i \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial u_{0y}^\zeta}{\partial x} = \frac{1}{\Delta_\zeta} \sum_{i=1}^3 K_{y\zeta_i} a_i \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial u_{0z}^\zeta}{\partial x} = \frac{1}{\Delta_\zeta} \sum_{i=1}^3 a_i \dot{u}_i \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial u_{0z}^\zeta}{\partial y} = \frac{1}{\Delta_\zeta} \sum_{i=1}^3 b_i \dot{u}_i \quad (5.29)$$

donde

$$K_{x\zeta_i} = \frac{l_i \bar{u}_i a_{i+} - l_{i-} \bar{u}_{i-} a_{i-}}{\Delta_\zeta} \quad (5.30)$$

$$K_{y\zeta_i} = \frac{l_i \bar{u}_i b_{i+} - l_{i-} \bar{u}_{i-} b_{i-}}{\Delta_\zeta} \quad (5.31)$$

$$K_{z\zeta_i} = \dot{u}_i \quad (5.32)$$

y ζ_i , con $i=1,2,3$, son las coordenadas simplex definidas en el apéndice 4. Los signos $-$ y $+$ en los subíndices indican $i-1$ e $i+1$, respectivamente, teniendo en cuenta que se produce una rotación circular de índices.

Por tanto, la expresión de la componente x del residuo interior en el elemento canónico resulta ser:

$$r_{sx}^\zeta = K_{\zeta_1} \zeta_1 + K_{\zeta_2} \zeta_2 + K_{\zeta_3} \zeta_3 + C_c \quad (5.33)$$

con

$$K_{\zeta_i} = C_x K_{x\zeta_i} + C_y K_{y\zeta_i} + C_z K_{z\zeta_i} \quad (5.34)$$

Las integrales de (5.17) se calculan en el elemento canónico y, por lo tanto, se debe aplicar la fórmula de cambio de variable en la integración:

$$\iint_{\Omega^e} f^e(x, y) dx dy = \iint_{\Omega^\zeta} f^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) \|J\| d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (5.35)$$

donde $\|J\|$ es el valor absoluto del determinante jacobiano de la transformación $T:(x, y) \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2)$. En este caso $\|J\| = |\Delta_\zeta|$ es constante en Ω^ζ y puede salir fuera de la integral, quedando finalmente:

$$\iint_{\Omega^e} r_{sx}^{e*} \cdot r_{sx}^e d\Omega = |\Delta_\zeta| \iint_{\Omega^\zeta} r_{sx}^{\zeta*} \cdot r_{sx}^\zeta d\Omega = |\Delta_\zeta| \iint_{\Omega^\zeta} |r_{sx}^\zeta|^2 d\Omega \quad (5.36)$$

donde:

$$\begin{aligned} |r_{sx}^\zeta| &= |K_{\zeta_1} \zeta_1 + K_{\zeta_2} \zeta_2 + K_{\zeta_3} \zeta_3 + C_c| \quad (5.37) \\ |r_{sx}^\zeta|^2 &= |K_{\zeta_1}|^2 \zeta_1^2 + |K_{\zeta_2}|^2 \zeta_2^2 + |K_{\zeta_3}|^2 \zeta_3^2 + |C_c|^2 + \\ &\quad + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_2}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_2}))\zeta_1\zeta_2 + \\ &\quad + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_3}))\zeta_1\zeta_3 + \\ &\quad + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_2})\operatorname{Re}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_2})\operatorname{Im}(K_{\zeta_3}))\zeta_2\zeta_3 + \\ &\quad + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(C_c) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(C_c))\zeta_1 + \\ &\quad + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_2})\operatorname{Re}(C_c) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_2})\operatorname{Im}(C_c))\zeta_2 + \\ &\quad + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_3})\operatorname{Re}(C_c) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_3})\operatorname{Im}(C_c))\zeta_3 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Aplicando la fórmula de integración sobre triángulos canónicos [Bal96]:

$$\int_{\zeta_1=0}^1 \int_{\zeta_2=0}^{1-\zeta_1} \zeta_1^i \zeta_2^j \zeta_3^k d\zeta_2 d\zeta_1 = \frac{i! j! k!}{(i+j+k+2)!} \quad (5.39)$$

se obtiene finalmente:

$$\iint_{\Omega^e} r_{sx}^{e*} \cdot r_{sx}^e = |\Delta_\zeta| \left(\frac{K_1}{12} + \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{2} \right) \quad (5.40)$$

donde

$$K_1 = |K_{\zeta_1}|^2 + |K_{\zeta_2}|^2 + |K_{\zeta_3}|^2 + \operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_2}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_2}) + \operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Re}(K_{\zeta_2})\operatorname{Re}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_2})\operatorname{Im}(K_{\zeta_3}) \quad (5.41)$$

$$K_2 = \operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(C_c) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(C_c) + \operatorname{Re}(K_{\zeta_2})\operatorname{Re}(C_c) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_2})\operatorname{Im}(C_c) + \operatorname{Re}(K_{\zeta_3})\operatorname{Re}(C_c) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_3})\operatorname{Im}(C_c) \quad (5.42)$$

$$K_3 = |C_c|^2 \quad (5.43)$$

Análogamente se pueden obtener las componentes y y z del residuo en el elemento. Para la componente y :

$$C_x = \gamma^2 v_{xy}^{-1} - \omega^2 \vartheta_{yx} \quad (5.44)$$

$$C_y = -\gamma^2 v_{xx}^{-1} - \omega^2 \vartheta_{yy} \quad (5.45)$$

$$C_z = -\omega^2 \vartheta_{yz} \quad (5.46)$$

$$C_c = -\gamma(v_{xz}^{-1} + v_{zx}^{-1}) \frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} + \gamma v_{xz}^{-1} \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} - \gamma v_{xx}^{-1} \frac{\partial u_{0z}^e}{\partial y} + \gamma v_{xy}^{-1} \frac{\partial u_{0z}^e}{\partial x} \quad (5.47)$$

Y para la componente z :

$$C_x = -\omega^2 \vartheta_{zx} \quad (5.48)$$

$$C_y = -\omega^2 \vartheta_{zy} \quad (5.49)$$

$$C_z = -\omega^2 \vartheta_{zz} \quad (5.50)$$

$$C_c = \gamma v_{xy}^{-1} \frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} + \gamma v_{yx}^{-1} \frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} \quad (5.51)$$

Elementos Cuadriláteros Lineales con Interpolación Mixta Vectorial Conforme en Rotacional / Nodal Lagrange

El cálculo del residuo en elementos lineales cuadriláteros como los descritos en el apéndice 4 presenta una mayor complejidad que el de elementos triangulares. En este caso, dada la naturaleza bilineal de las funciones de interpolación utilizadas, en (5.13) no se anulan las segundas derivadas de la función solución. Por otra parte, la integral (5.17) presenta integrandos, en general, racionales, por lo que el valor de ésta se obtiene mediante integración numérica.

Las expresiones de las tres componentes interpoladas de la solución del problema en el dominio canónico son:

$$u_{\delta_x}^{\zeta} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e U_i^{\zeta}(\zeta_1, \zeta_2) \quad (5.52)$$

$$u_{0y}^{\zeta} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e V_i^{\zeta}(\zeta_1, \zeta_2) \quad (5.53)$$

$$u_{0z}^{\zeta} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \psi_i^{\zeta}(\zeta_1, \zeta_2) \quad (5.54)$$

con:

$$\begin{aligned}
 U_1^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_2) \frac{J_{22}(\zeta_1)}{|J|} \\
 U_2^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= -\zeta_1 \frac{J_{12}(\zeta_2)}{|J|} \\
 U_3^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_2 \frac{J_{22}(\zeta_1)}{|J|} \\
 U_4^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= -(1 - \zeta_1) \frac{J_{12}(\zeta_2)}{|J|}
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}
 V_1^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= -(1 - \zeta_2) \frac{J_{21}(\zeta_1)}{|J|} \\
 V_2^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_1 \frac{J_{11}(\zeta_2)}{|J|} \\
 V_3^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= -\zeta_2 \frac{J_{21}(\zeta_1)}{|J|} \\
 V_4^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_1) \frac{J_{11}(\zeta_2)}{|J|}
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_1^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2) \\
 \psi_2^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_1(1 - \zeta_2) \\
 \psi_3^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_1\zeta_2 \\
 \psi_4^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_1)\zeta_2
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

donde J_{ij} , con $i, j \in \{1, 2\}$, son los elementos de la matriz jacobiana de transformación J elemento real al canónico, y $|J|$ su determinante. Para facilitar el desarrollo que se realiza a continuación, los elementos de J (A4.54) se reescriben como:

$$\begin{aligned}
 J_{11}(\zeta_2) &= P_{11} + \zeta_2 Q_{11} \\
 J_{12}(\zeta_2) &= P_{12} + \zeta_2 Q_{12} \\
 J_{21}(\zeta_1) &= P_{21} + \zeta_1 Q_{11} \\
 J_{22}(\zeta_1) &= P_{22} + \zeta_1 Q_{12}
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

y su determinante es:

$$|J| = (P_{11} + \zeta_2 Q_{11})(P_{22} + \zeta_1 Q_{12}) - (P_{12} + \zeta_2 Q_{12})(P_{21} + \zeta_1 Q_{11}) \tag{5.59}$$

Las primeras derivadas de las componentes interpoladas son:

$$\frac{\partial u_{0x}^e}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial U_i^e}{\partial x} \tag{5.60}$$

$$\frac{\partial u_{0x}^e}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial U_i^e}{\partial y} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial u_{0y}^e}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial V_i^e}{\partial x} \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial u_{0y}^e}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial V_i^e}{\partial y} \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial u_{0z}^e}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \quad (5.65)$$

Y, teniendo en cuenta la matriz de transformación J , se tiene:

$$\frac{\partial U_i^e}{\partial x} = \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_1} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_2} \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial U_i^e}{\partial y} = -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_1} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_2} \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial V_i^e}{\partial x} = \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_1} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_2} \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial V_i^e}{\partial y} = -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_1} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_2} \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} = \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_2} \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} = -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_2} \quad (5.71)$$

con:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1^\zeta}{\partial \zeta_1} &= (1 - \zeta_2) \frac{Q_{12}|J| - J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \\ \frac{\partial U_2^\zeta}{\partial \zeta_1} &= -J_{12} \frac{|J| - \zeta_1 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \\ \frac{\partial U_3^\zeta}{\partial \zeta_1} &= \zeta_2 \frac{Q_{12}|J| - J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \\ \frac{\partial U_4^\zeta}{\partial \zeta_1} &= J_{12} \frac{|J| + (1 - \zeta_1) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial U_1^\zeta}{\partial \zeta_2} = -J_{22} \frac{|J| + (1 - \zeta_2) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2}$$

$$\frac{\partial U_2^\zeta}{\partial \zeta_2} = -\zeta_1 \frac{Q_{12}|J| - J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2}$$
(5.73)

$$\frac{\partial U_3^\zeta}{\partial \zeta_2} = J_{22} \frac{|J| - \zeta_2 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2}$$

$$\frac{\partial U_4^\zeta}{\partial \zeta_2} = -(1 - \zeta_1) \frac{Q_{12}|J| - J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2}$$

$$\frac{\partial V_1^\zeta}{\partial \zeta_1} = -(1 - \zeta_2) \frac{Q_{11}|J| - J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2}$$

$$\frac{\partial V_2^\zeta}{\partial \zeta_1} = J_{11} \frac{|J| - \zeta_1 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2}$$
(5.74)

$$\frac{\partial V_3^\zeta}{\partial \zeta_1} = -\zeta_2 \frac{Q_{11}|J| - J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2}$$

$$\frac{\partial V_4^\zeta}{\partial \zeta_1} = -J_{11} \frac{|J| + (1 - \zeta_1) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2}$$

$$\frac{\partial V_1^\zeta}{\partial \zeta_2} = J_{21} \frac{|J| + (1 - \zeta_2) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2}$$

$$\frac{\partial V_2^\zeta}{\partial \zeta_2} = \zeta_1 \frac{Q_{11}|J| - J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2}$$
(5.75)

$$\frac{\partial V_3^\zeta}{\partial \zeta_2} = -J_{21} \frac{|J| - \zeta_2 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2}$$

$$\frac{\partial V_4^\zeta}{\partial \zeta_2} = (1 - \zeta_1) \frac{Q_{11}|J| - J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_1^e}{\partial \zeta_1} &= \zeta_2 - 1 \\
\frac{\partial \psi_2^e}{\partial \zeta_1} &= 1 - \zeta_2 \\
\frac{\partial \psi_3^e}{\partial \zeta_1} &= \zeta_2 \\
\frac{\partial \psi_4^e}{\partial \zeta_1} &= -\zeta_2
\end{aligned} \tag{5.76}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_1^e}{\partial \zeta_2} &= \zeta_1 - 1 \\
\frac{\partial \psi_2^e}{\partial \zeta_2} &= -\zeta_1 \\
\frac{\partial \psi_3^e}{\partial \zeta_2} &= \zeta_1 \\
\frac{\partial \psi_4^e}{\partial \zeta_2} &= 1 - \zeta_1
\end{aligned} \tag{5.77}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} &= J_{11} Q_{12} - J_{12} Q_{11} \\
\frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2} &= J_{22} Q_{11} - J_{21} Q_{12}
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Las segundas derivadas de las componentes interpoladas son:

$$\frac{\partial^2 u_{0x}^e}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial^2 U_i^e}{\partial x^2} \tag{5.79}$$

$$\frac{\partial^2 u_{0x}^e}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial^2 U_i^e}{\partial y^2} \tag{5.80}$$

$$\frac{\partial^2 u_{0x}^e}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial^2 U_i^e}{\partial x \partial y} \tag{5.81}$$

$$\frac{\partial^2 u_{0y}^e}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial^2 V_i^e}{\partial x^2} \tag{5.82}$$

$$\frac{\partial^2 u_{0y}^e}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial^2 V_i^e}{\partial y^2} \tag{5.83}$$

$$\frac{\partial^2 u_{0y}^e}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial^2 V_i^e}{\partial x \partial y} \tag{5.84}$$

$$\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial x^2} \tag{5.85}$$

$$\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^4 \dot{u}_i^e \frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial y^2} \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial^2 u_{0z}^e}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^4 \dot{u}_i^e \frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial x \partial y} \quad (5.87)$$

donde:

$$\frac{\partial^2 U_i^e}{\partial x^2} = \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial x} \right) - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial x} \right) \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial^2 U_i^e}{\partial y^2} = -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial y} \right) + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial y} \right) \quad (5.89)$$

$$\frac{\partial^2 U_i^e}{\partial x \partial y} = -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial x} \right) + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial x} \right) \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial^2 V_i^e}{\partial x^2} = \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial x} \right) - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial x} \right) \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial^2 V_i^e}{\partial y^2} = -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial y} \right) + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial y} \right) \quad (5.92)$$

$$\frac{\partial^2 V_i^e}{\partial x \partial y} = -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial x} \right) + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial x} \right) \quad (5.93)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial x^2} = \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \right) - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \right) \quad (5.94)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial y^2} = -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \right) + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \right) \quad (5.95)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial x \partial y} = -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \right) + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \right) \quad (5.96)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial x} \right) = \frac{Q_{12}|J| - J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_1} + \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial^2 U_i^\zeta}{\partial \zeta_1^2} + \frac{J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_2} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial^2 U_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \quad (5.97)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial x} \right) = -\frac{J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_1} + \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial^2 U_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} - \frac{Q_{12}|J| - J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_2} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial^2 U_i^\zeta}{\partial \zeta_2^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial y} \right) = -\frac{Q_{11}|J| - J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_1} - \frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial^2 U_i^\zeta}{\partial \zeta_1^2} - \frac{J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_2} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial^2 U_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \quad (5.98)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial U_i^e}{\partial y} \right) = \frac{J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_1} - \frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial^2 U_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} + \frac{Q_{11}|J| - J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial U_i^\zeta}{\partial \zeta_2} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial^2 U_i^\zeta}{\partial \zeta_2^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial x} \right) = \frac{Q_{12}|J| - J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_1} + \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial^2 V_i^\zeta}{\partial \zeta_1^2} + \frac{J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_2} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial^2 V_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \quad (5.99)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial x} \right) = -\frac{J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_1} + \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial^2 V_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} - \frac{Q_{12}|J| - J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_2} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial^2 V_i^\zeta}{\partial \zeta_2^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial y} \right) = -\frac{Q_{11}|J| - J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_1} - \frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial^2 V_i^\zeta}{\partial \zeta_1^2} - \frac{J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_2} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial^2 V_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \quad (5.100)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial V_i^e}{\partial y} \right) = \frac{J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_1} - \frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial^2 V_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} + \frac{Q_{11}|J| - J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial V_i^\zeta}{\partial \zeta_2} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial^2 V_i^\zeta}{\partial \zeta_2^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \right) = \frac{Q_{12}|J| - J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1} + \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1^2} + \frac{J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_2} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \quad (5.101)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \right) = -\frac{J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1} + \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} - \frac{Q_{12}|J| - J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_2} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_2^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \right) = -\frac{Q_{11}|J| - J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1} - \frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1^2} - \frac{J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_2} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \quad (5.102)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \right) = \frac{J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1} - \frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} + \frac{Q_{11}|J| - J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^2} \frac{\partial \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_2} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_1^\zeta}{\partial \zeta_1^2} = -(1 - \zeta_2) \frac{\left(Q_{12}|J| - J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^4}$$

$$\frac{\partial^2 U_2^\zeta}{\partial \zeta_1^2} = J_{12} \frac{\left(|J| - \zeta_1 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^4}$$

$$\frac{\partial^2 U_3^\zeta}{\partial \zeta_1^2} = -\zeta_2 \frac{\left(Q_{12}|J| - J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^4}$$

$$\frac{\partial^2 U_4^\zeta}{\partial \zeta_1^2} = -J_{12} \frac{\left(|J| + (1 - \zeta_1) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^4}$$

(5.103)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_1^\zeta}{\partial \zeta_2^2} &= J_{22} \frac{\left(|J| + (1 - \zeta_2) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 U_2^\zeta}{\partial \zeta_2^2} &= \zeta_1 \frac{\left(Q_{12}|J| - J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 U_3^\zeta}{\partial \zeta_2^2} &= -J_{22} \frac{\left(|J| - \zeta_2 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 U_4^\zeta}{\partial \zeta_2^2} &= (1 - \zeta_1) \frac{\left(Q_{12}|J| - J_{12} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4}
\end{aligned} \tag{5.104}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_1^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} &= -\frac{Q_{12}|J| - J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} + (1 - \zeta_2) \frac{\left(-Q_{12}|J| + 2J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) |J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 U_2^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} &= -Q_{12} \frac{|J| - \zeta_1 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} - J_{12} \frac{\left(-|J| + 2\zeta_1 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) |J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 U_3^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} &= \frac{Q_{12}|J| - J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} + \zeta_2 \frac{\left(-Q_{12}|J| + 2J_{22} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) |J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 U_4^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} &= Q_{12} \frac{|J| + (1 - \zeta_1) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} - J_{12} \frac{\left(|J| + 2(1 - \zeta_1) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) |J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4}
\end{aligned} \tag{5.105}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_1^\zeta}{\partial \zeta_1^2} &= (1 - \zeta_2) \frac{\left(Q_{11}|J| - J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 V_2^\zeta}{\partial \zeta_1^2} &= -J_{11} \frac{\left(|J| - \zeta_1 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 V_3^\zeta}{\partial \zeta_1^2} &= \zeta_2 \frac{\left(Q_{11}|J| - J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 V_4^\zeta}{\partial \zeta_1^2} &= J_{11} \frac{\left(|J| + (1 - \zeta_1) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^4}
\end{aligned} \tag{5.106}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_1^\zeta}{\partial \zeta_2^2} &= -J_{21} \frac{\left(|J| + (1 - \zeta_2) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 V_2^\zeta}{\partial \zeta_2^2} &= -\zeta_1 \frac{\left(Q_{11}|J| - J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 V_3^\zeta}{\partial \zeta_2^2} &= J_{21} \frac{\left(|J| - \zeta_2 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 V_4^\zeta}{\partial \zeta_2^2} &= -(1 - \zeta_1) \frac{\left(Q_{11}|J| - J_{11} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2} \right) 2|J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4}
\end{aligned} \tag{5.107}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_1^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} &= \frac{Q_{11}|J| - J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} - (1 - \zeta_2) \frac{\left(-Q_{11}|J| + 2J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) |J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 V_2^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} &= Q_{11} \frac{|J| - \zeta_1 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} + J_{11} \frac{\left(-|J| + 2\zeta_1 \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) |J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 V_3^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} &= -\frac{Q_{11}|J| - J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} - \zeta_2 \frac{\left(-Q_{11}|J| + 2J_{21} \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) |J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4} \\
\frac{\partial^2 V_4^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} &= -Q_{11} \frac{|J| + (1 - \zeta_1) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1}}{|J|^2} + J_{11} \frac{\left(|J| + 2(1 - \zeta_1) \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_1} \right) |J| \frac{\partial |J|}{\partial \zeta_2}}{|J|^4}
\end{aligned} \tag{5.108}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_j^2} = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, 4 \text{ y } j = 1, 2 \tag{5.109}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i^\zeta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 1, 3 \\ -1 & \text{para } i = 2, 4 \end{cases} \tag{5.110}$$

Las expresiones (5.52)-(5.110) permiten obtener el integrando de (5.17) en función de ζ_1 y ζ_2 , y la integral se puede calcular mediante alguna técnica de integración numérica. El método elegido ha sido la cuadratura de Gauss con 5 puntos por cada dimensión, lo que supone 25 puntos para el cálculo de cada residuo elemental. Este valor se ha elegido como un compromiso entre coste computacional y precisión en el cálculo de la integral. También aquí se debe tener en cuenta que el cálculo de la integral se realiza sobre el dominio canónico y, por tanto, se debe aplicar (5.35). En este caso $\|J\|$ es el valor absoluto de la expresión (5.59), que resulta ser un polinomio bilineal en ζ_1 y ζ_2 y, por lo tanto, debe permanecer dentro de la integral. De este modo, la integral del residuo para cada componente es:

$$\iint_{\Omega^e} r_{sp}^{e*} \cdot r_{sp}^e d\Omega = \iint_{\Omega^e} \|J\| (r_{sp}^{\zeta_1^*} \cdot r_{sp}^{\zeta_2}) d\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j \|J\| (r_{sp}^{\zeta_1^*} \cdot r_{sp}^{\zeta_2}) \Big|_{\substack{\zeta_1=\zeta_i \\ \zeta_2=\zeta_j}} \quad (5.111)$$

donde $p = x, y, z$

5.1.1.2. Residuo en las Aristas

La interpolación mixta vectorial conforme en rotacional / nodal Lagrange descrita en el apéndice 4 garantiza la continuidad de la componente tangencial a la arista de la solución \vec{u} en las aristas interiores del dominio del problema. Sin embargo, la continuidad de la componente tangencial de la variable dual, es decir, el campo magnético si se emplea la formulación en campo eléctrico, o el eléctrico si se emplea la formulación en campo magnético, no está garantizada, pues ésta se obtiene a partir del rotacional de la variable primaria \vec{u} , cuya componente normal a la arista es, en general, discontinua. La segunda componente del error en (5.7) cuantifica en qué medida la componente tangencial a la arista de la variable dual no es continua en las aristas del elemento e (5.9).

Aquellas aristas que presenten una condición tipo Dirichlet, es decir, condición de pared eléctrica para la formulación en campo eléctrico, o condición de pared magnética para la formulación en campo magnético, presentan una variable primaria \vec{u} con componente tangencial a la arista nula debido a la imposición de la condición de contorno. Por tanto, la variable dual obtenida a partir de ella sólo tendrá componente tangencial y su residuo sobre la arista no se considera. En el caso de aristas con condición de contorno Neumann, es decir, condición de pared eléctrica para la formulación en campo magnético, o condición de pared magnética para la formulación en campo eléctrico, el MEF no impone ninguna condición sobre ellas, por lo que el residuo se puede calcular como la desviación de la componente tangencial a la arista de la variable dual respecto al valor nulo, como indica (5.10).

Como se puede comprobar a partir de (5.12) y (5.23)-(5.29), la expresión $v^{-1} \nabla \times \vec{u}$ en un elemento triangular como el descrito en el apéndice 4 es un polinomio de primer grado en ζ_1 , ζ_2 y ζ_3 y, por tanto, su integral puede ser obtenida analíticamente. Sin embargo, dado que el sistema coordenado (ζ_1, ζ_2) no tiene por qué ser el mismo en los dos elementos que comparten una arista interior, resulta más sencillo calcular la integral del segundo término de (5.7), para las aristas interiores, mediante alguna técnica numérica. Por supuesto, cuando alguno de los dos elementos o los dos son cuadriláteros, la integración numérica es imprescindible, pues las componentes de la función \vec{u} (5.52)-(5.59) y sus derivadas (5.60)-(5.78) son funciones racionales de ζ_1 y ζ_2 , lo que dificulta enormemente la integración analítica.

Por tanto, para cada una de las aristas interiores de la malla, se calcula en los n puntos dados por la cuadratura de Gauss situados sobre esa arista el valor de $v^{-1} \nabla \times \vec{u}$ en cada uno de los elementos que la comparten, se calcula el producto vectorial del vector normal a la arista por la resta de estos valores en cada punto, y se realiza el producto escalar $\vec{r}_l^* \cdot \vec{r}_l$. En estas operaciones el signo del vector \hat{n} o el orden en la resta $v_1^{-1} \nabla \times \vec{u}_1 - v_2^{-1} \nabla \times \vec{u}_2$ son irrelevantes debido al posterior cálculo del producto escalar. Finalmente, la integral del residuo en la arista interior k es:

$$\int_{\Gamma_k} \vec{r}_l^{k*} \cdot \vec{r}_l^k dl = \int_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}^{x=x_1 \\ y=y_1} \vec{r}_l^{k*} \cdot \vec{r}_l^k dl \quad (5.112)$$

donde (x_0, y_0) y (x_1, y_1) son las coordenadas de los nodos inicial y final, respectivamente, de la arista. El cambio de variable para obtener un intervalo de integración $[0,1]$ viene dado por:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)t \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} dx &= (x_1 - x_0)dt \\ dy &= (y_1 - y_0)dt \end{aligned} \quad (5.114)$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} dt = l_k dt$$

y, por lo tanto:

$$\int_{\Gamma_k} \vec{r}_l^{k*} \cdot \vec{r}_l^k dl = l_k \int_0^1 \vec{r}_l^{k*} \cdot \vec{r}_l^k dt = l_k \sum_{j=1}^n w_j \left(\vec{r}_l^{k*} \cdot \vec{r}_l^k \right) \Big|_{t=t_j} \quad (5.115)$$

En las aristas con condición de contorno Neumann el cálculo es similar al descrito para las aristas interiores, aunque en este caso la arista sólo presenta un valor de $\nu^{-1} \nabla \times \vec{u}$, con lo que el procedimiento se simplifica. En este caso, si el elemento es triangular, sí se puede implementar de un modo sencillo la integración analítica. No obstante, en la implementación realizada se ha optado por la integración numérica tanto para cuadriláteros como para triángulos.

En elementos triangulares se ha tomado 1 punto para el cálculo de la integral, pues los polinomios sobre las aristas son lineales. En los elementos cuadriláteros se ha elegido $n=5$, pues, en este caso, las funciones que se deben interpolar no son polinomios sino cocientes de polinomios.

5.1.2. Indicador Zienkiewicz-Zhu (ZZ) basado en el Rotacional de la Solución

En los indicadores de error del tipo Zienkiewicz-Zhu, la solución exacta del problema en (5.2) se sustituye por una solución *recuperada* o *suavizada* obtenida a partir de la propia solución del MEF, y se asume que esta nueva solución es más exacta que la obtenida inicialmente. Existen diversas maneras de obtener una nueva solución a partir de la inicial. En este punto se presenta un nuevo indicador de error basado en la técnica de *recuperación por parches*, entendiendo por *parche* el conjunto de elementos que comparten un nodo. Esta técnica se puede aplicar sobre la misma función solución o sobre otras relacionadas con ella. En el indicador desarrollado aquí se ha elegido trabajar sobre el campo vectorial

$$\vec{\sigma} = \nabla \times \vec{u}_0 = \sigma_x \hat{x} + \sigma_y \hat{y} + \sigma_z \hat{z} \quad (5.116)$$

donde \vec{u}_0 es la solución sin tener en cuenta su dependencia con z (e^{-z}). El valor de $\vec{\sigma}$ en elementos triangulares lineales con interpolación mixta conforme en rotacional / nodal Lagrange es constante en todo el elemento, mientras que \vec{u}_0 presenta un comportamiento lineal en x e y . De esta forma, el ajuste por mínimos cuadrados que se describe más adelante se realiza de un modo más exacto y sencillo.

5.1.2.1. Mallas Triangulares

Sea

$$\bar{e}^e = \bar{\sigma}_r^e - \bar{\sigma}_h^e \quad (5.117)$$

una medida del error elemental, donde $\bar{\sigma}_r^e$ es el rotacional recuperado, que se obtiene mediante una interpolación lineal a partir de los valores del rotacional $\bar{\sigma}_h^e$ en los baricentros de los elementos que comparten un nodo, como indica la figura 5.2. Intuitivamente se puede asumir que el rotacional recuperado $\bar{\sigma}_r^e$ es más exacto que el obtenido mediante el MEF, pues la interpolación realizada sobre los valores recuperados es lineal en cada elemento y continua en todo el dominio del problema. Para comprobar esta asunción se calculó, para distintas densidades de malla uniforme, el rotacional del campo eléctrico del primer modo de una guía rectangular homogénea (TE_{10}) en un punto arbitrario de ella y, a partir de él, se obtuvo, como se verá más adelante, el valor recuperado. El error relativo cometido en cada malla en función de su densidad se muestra en la figura 5.3. Se puede apreciar que, como cabía esperar, $\bar{\sigma}_r^e$ es más exacto que $\bar{\sigma}_h^e$, y que la diferencia del error cometido en ambos valores aumenta, en el rango estudiado, al incrementar la densidad de la malla. La guía rectangular presenta una solución “suave” a lo largo del dominio, sin variaciones abruptas ni singularidades. Por tanto, es de esperar que en problemas donde la solución presente una variación mayor, como es el caso de guías con reentrantes o con zonas conductoras cercanas, la diferencia entre la precisión de $\bar{\sigma}_r^e$ y $\bar{\sigma}_h^e$ en las zonas con variaciones abruptas sea mayor.

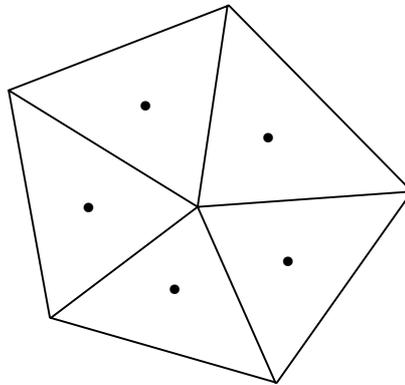


Figura 5.2. Parche asociado a un nodo y centroides elementales

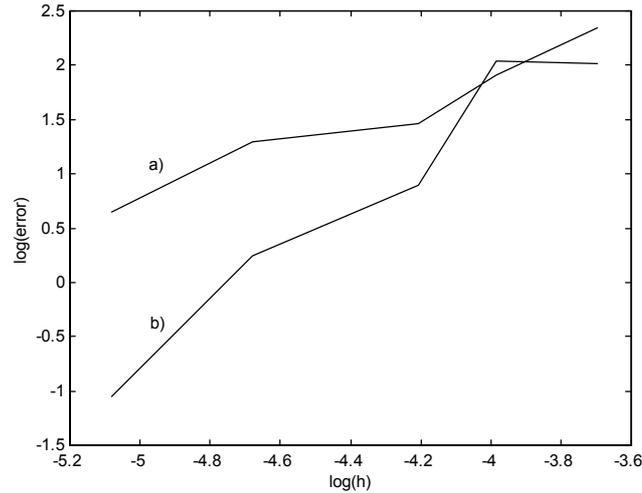


Figura 5.3. Exactitud de $\bar{\sigma}_h^e$ (a) y $\bar{\sigma}_r^e$ (b) en un punto arbitrario de una guía rectangular homogénea

Sea i un nodo de la discretización del problema e I_i el parche asociado a éste con n_i elementos. En la figura 5.4a se observa que un mismo nodo puede presentar tantos valores en cada una de las tres componentes de $\bar{\sigma}_h$ como elementos a los que pertenezca, lo que implica una discontinuidad a la largo del dominio del problema. Aunque en elementos triangulares lineales con interpolación mixta vectorial / nodal, el rotacional de la solución \bar{u}_0 es constante:

$$\sigma_{hx}^e = \frac{\sum_{i=1}^3 b_i^e \dot{u}_{hi}^e}{\Delta_\zeta} \quad (5.118)$$

$$\sigma_{hy}^e = -\frac{\sum_{i=1}^3 a_i^e \dot{u}_{hi}^e}{\Delta_\zeta} \quad (5.119)$$

$$\sigma_{hz}^e = \frac{2}{(\Delta_\zeta)^2} \sum_{i=1}^3 l_i^e (b_{i+}^e a_i^e - b_i^e a_{i+}^e) \bar{u}_{hi}^e \quad (5.120)$$

el punto del elemento donde se calcule su valor no es irrelevante, pues en la fase de recuperación de la solución (figura 5.4b) intervienen las coordenadas de éste. Por ello, el valor de $\bar{\sigma}_h^e$ se debe calcular en un punto que presente propiedades de superconvergencia, entendiéndose por tal término la propiedad por la que la norma del error de la solución disminuye,

en elementos lineales, como $\mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{2}(1+\delta)}\right)$ [Dur91], donde N es el número de grados de libertad

en el problema y $\delta > 0$; es decir, una convergencia, como mínimo, igual a la obtenida con mallas uniformes en problemas con soluciones suaves. En el caso del triángulo, el punto de superconvergencia se encuentra en el baricentro.

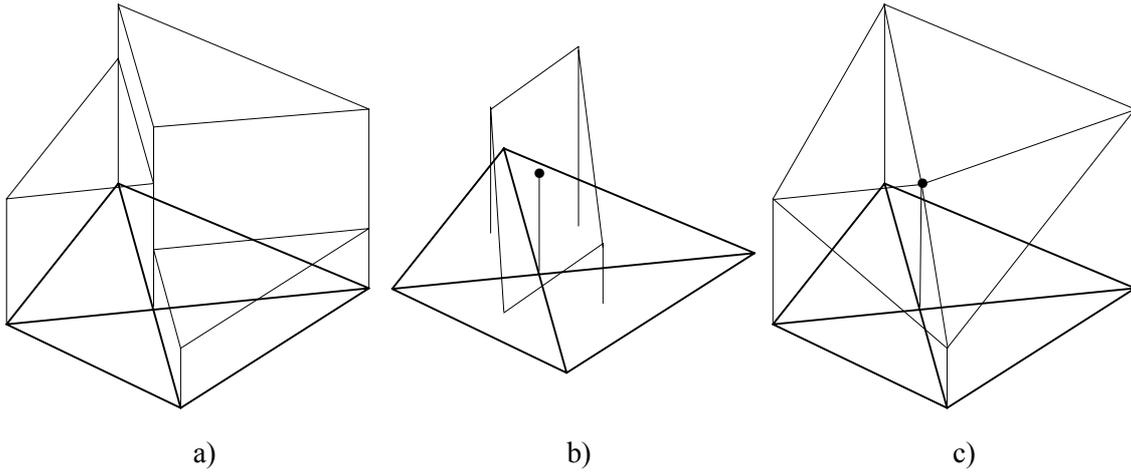


Figura 5.4. Obtención del valor recuperado del rotacional: a) σ_h^e , b) valor recuperado de σ_{pi} en el nodo común, c) σ_r^e en cada elemento

A partir de los n_i valores de $\bar{\sigma}_h^e$, se puede obtener el valor recuperado en el parche para cada una de las componentes, que será una función lineal bidimensional:

$$\sigma_p = c_0^p + c_1^p x + c_2^p y = \bar{P} \cdot \bar{c}^{pT} \quad (5.121)$$

con

$$\bar{P}^T = (1 \quad x \quad y) \quad (5.122)$$

$$\bar{c}^{pT} = (c_0^p \quad c_1^p \quad c_2^p) \quad (5.123)$$

El vector \bar{c}^p se obtiene mediante el ajuste por mínimos cuadrados de los valores en los puntos de muestreo (baricentros) de cada una de las componentes del rotacional al plano σ_p . Es decir, la función

$$F^p(\bar{c}^p) = \sum_{i=1}^{n_j} (\sigma_{hi}(x_i, y_i) - \sigma_{pi}(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^{n_j} (\sigma_{hi}(x_i, y_i) - \bar{P}(x_i, y_i) \bar{c}^{pT})^2 \quad (5.124)$$

debe ser mínima, lo que implica, derivando F^p respecto a \bar{c}^p e igualando a cero, que

$$\sum_{i=1}^{n_j} \bar{P}(x_i, y_i) \bar{P}^T(x_i, y_i) \bar{c}^p = \sum_{i=1}^{n_j} \bar{P}(x_i, y_i) \sigma_{hi}(x_i, y_i) \quad (5.125)$$

La solución de este sistema es

$$\bar{c}^p = A^{-1} \vec{b} \quad (5.126)$$

donde

$$A = \sum_{i=1}^{n_j} \bar{P}(x_i, y_i) \bar{P}^T(x_i, y_i) \quad (5.127)$$

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{n_j} \bar{P}(x_i, y_i) \sigma_{hi}(x_i, y_i) \quad (5.128)$$

Se pueden implementar otros métodos de *recuperación* de la solución distintos al del ajuste por mínimos cuadrados presentado aquí, como, por ejemplo, la obtención del nuevo valor nodal como media de los valores en los baricentros de los triángulos que lo comparten, ponderándolos por la distancia del nodo a ellos.

Cabe destacar que la matriz A es común a las tres componentes del rotacional y, por tanto, sólo es necesario invertirla, si se quiere realizar esta operación directamente, una vez por nodo o parche. La resolución del sistema (5.125) requiere que el parche contenga, al menos, 3 elementos, pues son necesarios 3 valores de σ_h para obtener el plano σ_p . Sin embargo, en la malla, concretamente en su contorno, pueden existir nodos que pertenezcan únicamente a 1 ó 2 elementos, como muestra la figura 5.5 (la existencia de, al menos, 3 elementos en los parches de los nodos interiores está garantizada por la propia conectividad de la malla). En tales casos se ha optado por asignar a estos nodos el valor extrapolado a partir de la función σ_p de un parche correspondiente a un nodo vecino. En una malla triangular se puede garantizar que un nodo perteneciente a sólo 1 ó 2 elementos tendrá siempre un nodo vecino que pertenezca a más de 2 elementos, exceptuando, naturalmente, el caso trivial de una malla con dos elementos.

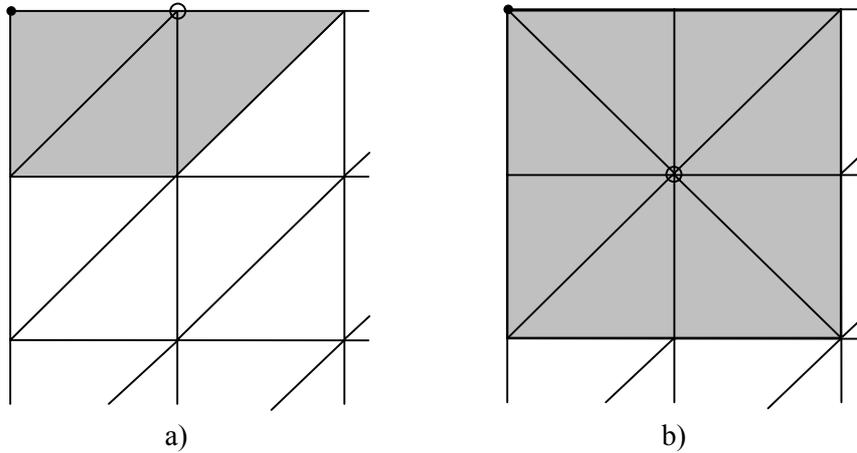


Figura 5.5. Tratamiento de nodos pertenecientes a menos de 3 elementos: a) 1 elemento, b) 2 elementos

Una vez conocida la expresión de σ_p en el parche, se puede obtener su valor en el nodo central del parche. Repitiendo esta operación con cada nodo, se obtiene el valor *suavizado* del rotacional de la solución en todos los nodos de la malla. El valor *recuperado* σ_r^e , que se utiliza como solución más exacta en cada elemento, se obtiene mediante una interpolación nodal de Lagrange del valor de σ_p en cada nodo del triángulo (figura 5.4c). Es decir, para una componente dada:

$$\sigma_r^e = \sum_{i=1}^3 \sigma_{pi}^e \zeta_i^e \quad (5.129)$$

Dado que los valores σ_{pi} son únicos en cada nodo i , el rotacional recuperado es continuo a lo largo de todo el dominio del problema, mientras que el rotacional original es discontinuo, como muestra la figura 5.4.

Una vez obtenido $\vec{\sigma}_r^e$, el indicador de error se calcula como la norma L_2 de \vec{e} :

$$\|\vec{e}^e\|^2 = \iint_{\Omega^e} \vec{e}^{e*} \cdot \vec{e}^e d\Omega = \iint_{\Omega^e} |\sigma_{rx}^e - \sigma_{hx}^e|^2 d\Omega + \iint_{\Omega^e} |\sigma_{ry}^e - \sigma_{hy}^e|^2 d\Omega + \iint_{\Omega^e} |\sigma_{rz}^e - \sigma_{hz}^e|^2 d\Omega \quad (5.130)$$

Las integrales de (5.130) presentan integrandos polinómicos de segundo grado en ζ_1 , ζ_2 y ζ_3 , lo que permite una integración analítica que, para cada una de las componentes será:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^e} e^{e*}(x,y) \cdot e^e(x,y) d\Omega &= \iint_{\Omega^\zeta} e^{e*}(\zeta_1, \zeta_2) \cdot e^e(\zeta_1, \zeta_2) \|J\| d\zeta_1 d\zeta_2 = \\ &= \left| \Delta_\zeta \right| \iint_{\Omega^\zeta} |e^e(\zeta_1, \zeta_2)|^2 d\zeta_1 d\zeta_2 = \left| \Delta_\zeta \right| \left(\frac{K_1}{12} - \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.131)$$

con

$$\begin{aligned} K_1 &= \sum_{i=1}^3 |\sigma_{pi}^e|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \text{Re}(\sigma_{pi}^e) \text{Re}(\sigma_{pj}^e) + \text{Im}(\sigma_{pi}^e) \text{Im}(\sigma_{pj}^e) \\ K_2 &= \sum_{i=1}^3 \text{Re}(\sigma_{pi}^e) \text{Re}(\sigma_h^e) + \text{Im}(\sigma_{pi}^e) \text{Im}(\sigma_h^e) \\ K_3 &= |\sigma_h^e|^2 \end{aligned} \quad (5.132)$$

A partir del error en cada elemento se puede calcular un indicador del error total en el problema como:

$$\|e_T\| = \sqrt{\sum_{e=1}^{n_e} \|\vec{e}^e\|^2} \quad (5.133)$$

5.1.2.2. Mallas Mixtas o Cuadriláteras

Cuando la discretización del dominio del problema emplea únicamente elementos cuadriláteros o cuadriláteros y triangulares, el proceso de cálculo del indicador de error es similar al descrito para mallas triangulares. Conceptualmente, es posible desarrollar un indicador de error, de este o de otro tipo, para mallas mixtas. En este caso, los parches asociados a cada nodo pueden contener elementos triangulares y cuadriláteros, como muestra la figura 5.6, y la *recuperación* del valor del rotacional se efectúa tal como se describe en el punto 5.1.2.1, teniendo en cuenta la función de interpolación utilizada en los cuadriláteros. Sin embargo, debido a dificultades que surgen en la etapa de refinamiento de la malla y que se explican más adelante (punto 5.2.2.2), este tipo de mallas no se utiliza en esquemas de mallado adaptativo. Por esta razón, en la descripción del indicador (5.130) para elementos cuadriláteros se asume que la malla es cuadrilátera.

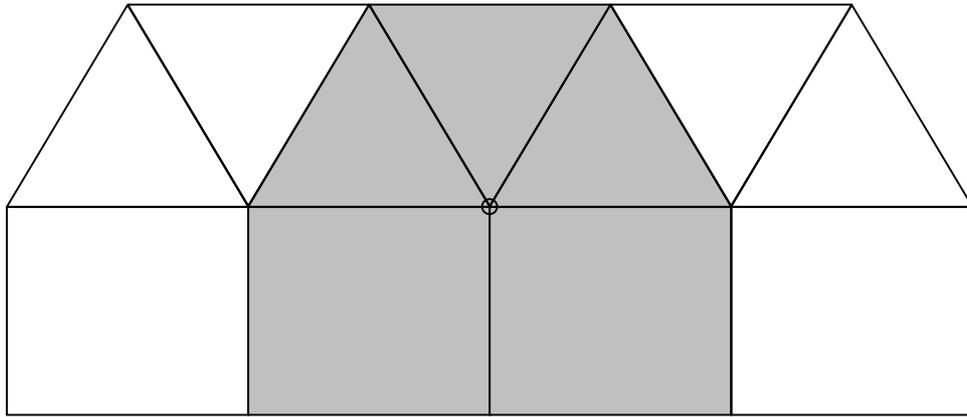


Figura 5.6. Parche con elementos triangulares y cuadriláteros en una malla mixta

En los elementos cuadriláteros, la función \bar{u}_0 se interpola mediante funciones bilineales (como se describe en el apéndice 4) y, por tanto, su rotacional no es, en general, constante. En este caso se consigue una aceleración de la convergencia del método si el muestreo de $\bar{\sigma}_h^e$ se realiza en los puntos superconvergentes de los cuadriláteros que, para una interpolación lineal, coinciden con los centroides de los elementos. Haciendo uso de (5.60)-(5.78) se pueden obtener estos valores en cada elemento del parche. En la recuperación del rotacional se puede emplear una función lineal (5.121) o bien una bilineal, como la utilizada en la interpolación de la solución:

$$\sigma_p = c_0^p + c_1^p x + c_2^p y + c_3^p xy = \bar{P}^T \cdot \bar{c}^p \quad (5.134)$$

Con (5.134) se puede obtener una ligera mejora en la convergencia del método, pero requiere, al menos, 4 elementos en cada parche para que el rango de la matriz A del sistema de ajuste (5.125) sea 4 y el sistema no quede indeterminado. En las mallas cuadriláteras estructuradas cada nodo interior pertenece a 4 y sólo 4 elementos. Sin embargo, si el cálculo del error se realiza sobre una malla cuadrilátera no estructurada, ésta puede presentar parches interiores con 3 elementos, como muestra la figura 5.7. En cualquier caso, tanto con mallas estructuradas como con no estructuradas, los nodos del contorno del dominio pueden pertenecer a 1, 2 ó 3 elementos, y en estos casos es necesario proceder de un modo similar al descrito para mallas triangulares.

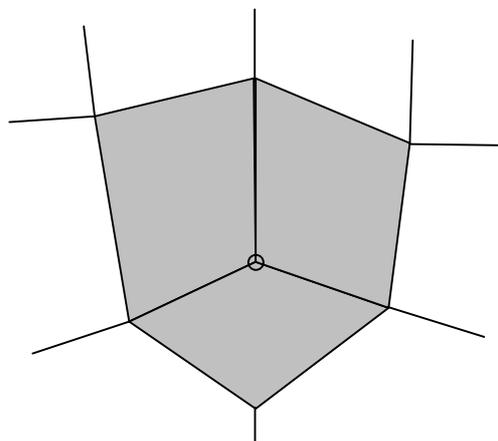


Figura 5.7. Parche con 3 elementos cuadriláteros

Una vez determinados los valores nodales recuperados σ_p del rotacional, se obtiene el rotacional σ_r^e en cada elemento mediante una interpolación nodal bilineal como la descrita en A4.2. En el cálculo del indicador de error elemental definido según (5.117) se puede sustituir la función σ_h^e por el valor en el punto de muestreo con el fin de obtener en (5.130) integrandos polinómicos y resolver analíticamente las integrales. Sin embargo, como la integración se realiza sobre el elemento canónico, es necesario introducir en el integrando el módulo del determinante jacobiano de la transformación $(x, y) \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2)$, y la presencia de la función módulo dificulta la integración analítica, por lo que se opta por el método de la cuadratura de Gauss.

En caso de no sustituir σ_h^e por el valor en los puntos superconvergentes, las integrales (5.130) presentan integrandos racionales en ζ_1 y ζ_2 , además de la función módulo, y se resuelven también numéricamente.

5.1.3. Indicador ZZ Dependiente de la Coordenada Axial

En el anterior apartado se ha presentado un indicador de error ZZ basado en el rotacional de la solución en $z=0$ $\bar{u}_0(x, y)$ obtenida mediante el MEF. Se puede desarrollar una versión de este indicador en la que el error se calcule sobre el rotacional de la solución real $\bar{u}(x, y, z) = \bar{u}_0(x, y)e^{-\gamma z}$. En tal caso, el procedimiento de cálculo es idéntico, tanto para triángulos como para cuadriláteros, al establecido en 5.1.2, salvo el cálculo de σ_h^e en cada elemento. Las componentes de $\nabla \times \bar{u}$ en elementos triangulares son ahora:

$$\sigma_{hx}^e = \frac{\sum_{i=1}^3 b_i^e \dot{u}_{hi}^e}{\Delta_\zeta} + \gamma \sum_{i=1}^3 V_i^e \bar{u}_{hi}^e = \frac{1}{\Delta_\zeta} \left(\sum_{i=1}^3 b_i^e \dot{u}_{hi}^e + \gamma \sum_{i=1}^3 l_i (b_{i+\zeta_i}^e - b_i^e \zeta_i^e) \bar{u}_{hi}^e \right) \quad (5.135)$$

$$\sigma_{hy}^e = -\frac{\sum_{i=1}^3 a_i^e \dot{u}_{hi}^e}{\Delta_\zeta} - \gamma \sum_{i=1}^3 U_i^e \bar{u}_{hi}^e = \frac{1}{\Delta_\zeta} \left(\sum_{i=1}^3 a_i^e \dot{u}_{hi}^e - \gamma \sum_{i=1}^3 l_i (a_{i+\zeta_i}^e - a_i^e \zeta_i^e) \bar{u}_{hi}^e \right) \quad (5.136)$$

$$\sigma_{hz}^e = \frac{2}{(\Delta_\zeta)^2} \sum_{i=1}^3 l_i^e (b_{i+\zeta_i}^e a_i^e - b_i^e a_{i+\zeta_i}^e) \bar{u}_{hi}^e \quad (5.137)$$

En elementos cuadriláteros el desarrollo de (5.12) se lleva a cabo con (5.52)-(5.78).

Antes de finalizar con los estimadores ZZ, es interesante resaltar un inconveniente que presenta este tipo de método cuando en el interior del problema existen filamentos, que se corresponden con láminas en la estructura tridimensional, con condición de contorno Dirichlet (figura 5.8). Esta situación tiene lugar cuando, por ejemplo, se quieren estudiar estructuras de guiado con conductor o conductores internos de espesor nulo.

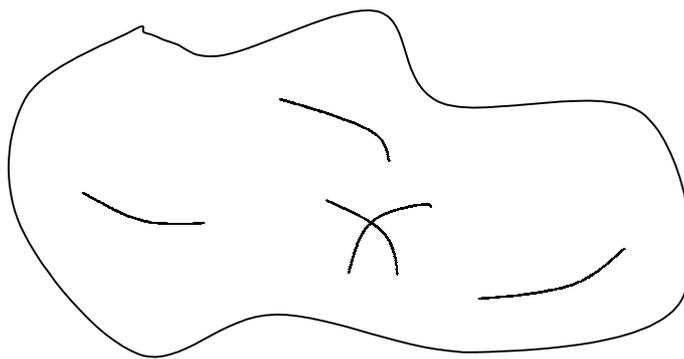


Figura 5.8. Dominio con estructuras de espesor nulo y condición de contorno Dirichlet

En tal caso, algunos de los parches asociados a los nodos de la malla presentan aristas radiales con condición de contorno. Esta condición de contorno puede provocar una discontinuidad en el comportamiento del campo a uno y otro lado de la arista, con lo que la suposición de que una solución *recuperada* o *suavizada* es más precisa que la obtenida mediante el MEF puede resultar errónea.

Para evitar este problema se deben construir parches sin aristas problemáticas y esto se puede conseguir descomponiendo los parches que tengan este tipo de aristas en otros que las tengan en su contorno. En tal caso, el valor recuperado en el nodo central se puede obtener como la media de los valores en los distintos parches. La implementación de algoritmos de descomposición de este tipo no es sencilla, pues la casuística es muy variada. Además, al restringir las posibilidades de generación del parche, es posible que no se cuente con el número necesario de elementos para resolver el sistema (5.125) y sea necesaria la extrapolación a partir de un parche vecino comentada en 5.1.2.1. En la figura 5.9 se muestran algunas de las situaciones que pueden aparecer y cómo pueden ser descompuestos los parches.

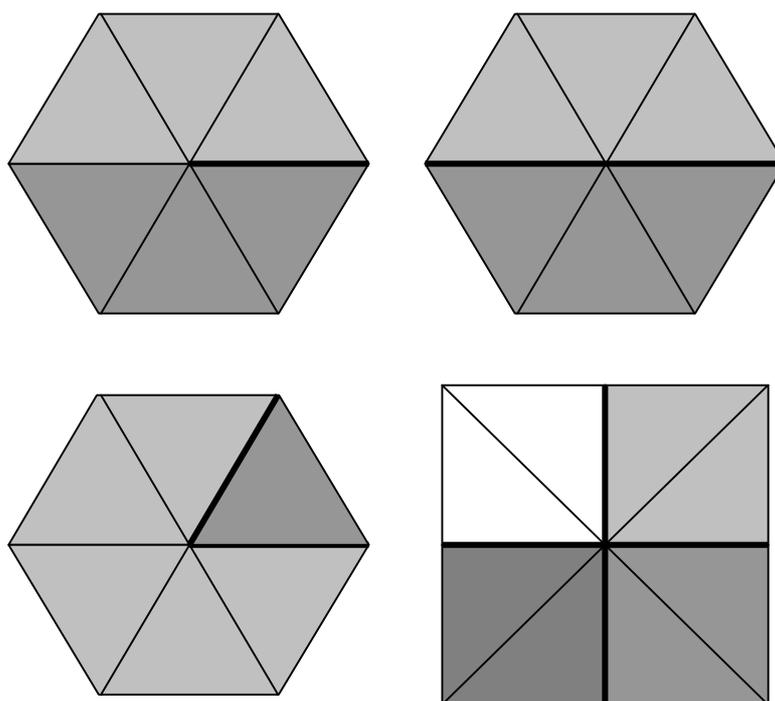


Figura 5.9. Descomposición de parches conflictivos

En el apartado de resultados 5.4.4 se puede comprobar cómo este procedimiento mejora la generación de la malla adaptativa.

5.1.4. Indicador de Error en Arista por Continuidad de Flujo

Hasta ahora se han descrito indicadores de error elementales, donde el error medido se asocia a un elemento y el indicador de error total se obtiene como la suma de las contribuciones de los errores en todos los elementos de la malla. En este apartado se presenta un nuevo indicador basado en la violación de continuidad de las densidades de flujo (eléctrico o magnético) en las aristas de la malla. Se trata, por tanto, de un indicador de error asociado a la arista.

Un modo de estimar cualitativamente el error cometido en la solución es cuantificar en qué medida no se cumplen las ecuaciones de Maxwell de divergencia en ausencia de cargas:

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0 \quad (5.138)$$

donde \vec{w} es la densidad de flujo eléctrico (\vec{D}) o de flujo magnético (\vec{B}). Esta condición se traduce en la continuidad de la componente normal de \vec{w} en las aristas interiores de la malla. Por tanto, se puede definir un error en cada arista interior como:

$$e = \|\hat{n} \cdot (\vec{w}_1 - \vec{w}_2)\| = \|\hat{n} \cdot (\vartheta_1 \vec{u}_1 - \vartheta_2 \vec{u}_2)\| \quad (5.139)$$

donde \hat{n} es el vector normal a la arista y los subíndices hacen referencia a los dos elementos que comparten la arista, tal como muestra la figura 5.10.

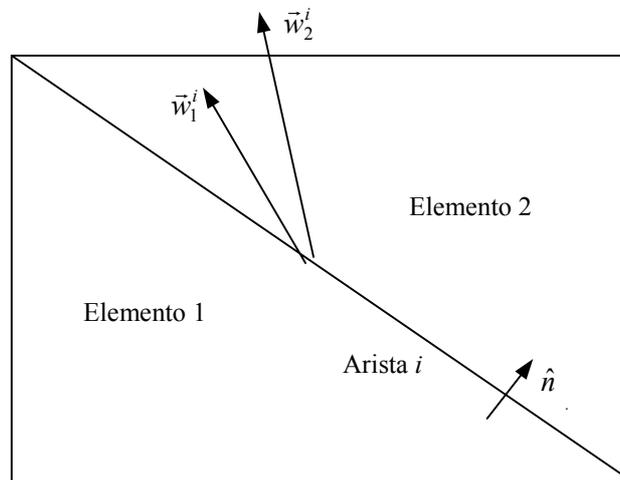


Figura 5.10. Discontinuidad de flujos en una arista interior

Las funciones de interpolación utilizadas garantizan la continuidad de la componente tangencial de la solución \vec{u} , pero la continuidad de la componente normal de ésta en la interfaz de dos elementos con el mismo material no está garantizada. Por tanto, en general, tampoco existirá continuidad en las densidades de flujo de la solución.

Pueden plantearse distintas formas de medir ese error. Aquí se presentan tres procedimientos que serán analizados en el apartado de resultados.

El primero de ellos consiste en identificar el error cometido con el que existe en el

punto medio de la arista. En este caso se asume que éste será prácticamente el mismo en toda la arista y el indicador se puede identificar con una densidad de error:

$$\|e^i\|^2 = \|e_{\text{pto. medio}}^i\|^2 \quad (5.140)$$

Otra posibilidad consiste en la integración a lo largo de la arista del error cometido, es decir, la norma del error en la arista:

$$\|e^i\|^2 = \int_{\Gamma^i} \|e^i(x, y, z)\|^2 d\Gamma \quad (5.141)$$

Por último, se puede identificar el error cometido con (5.141), pero ponderado por la longitud de la arista, tal como se hace en el cálculo del error debido al residuo en aristas descrito en el punto 5.1.1. Como se verá en el análisis de resultados, este procedimiento es el que produce una mayor convergencia en el proceso adaptativo.

$$\|e^i\|^2 = l_i \int_{\Gamma^i} \|e^i(x, y, z)\|^2 d\Gamma \quad (5.142)$$

Las expresiones utilizadas para el cálculo de (5.139), tanto para elementos triangulares como cuadriláteros, se encuentran en el apéndice 4. El cálculo de la integral en las dos últimas versiones del indicador de error se realiza numéricamente por las razones aducidas en 5.1.1.2.

El flujo sobre el que se calcula el error puede ser indistintamente el eléctrico o el magnético, independientemente de la formulación utilizada, aunque lo más cómodo es realizar este cálculo sobre el flujo correspondiente al campo obtenido, es decir, \vec{D} para una formulación en campo eléctrico y \vec{B} si la formulación es en campo magnético. Cualquiera que sea la versión utilizada, el indicador de error global en el problema se obtiene como suma de los errores en cada arista:

$$\|e_T\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_i} \|e^i\|^2} \quad (5.143)$$

donde N_i es el número de aristas interiores del problema.

Este indicador de error, en cualquiera de sus versiones, es muy sencillo de implementar, pues en él sólo se trabaja con la solución interpolada, no siendo necesario ningún tipo de operación con sus derivadas.

5.1.5. Obtención de una Estimación del Error del Problema

Los indicadores descritos en los apartados anteriores dan una medida cualitativa del error en cada elemento, pero no lo cuantifican. Por tanto, el error total del problema, obtenido como suma de las contribuciones de los errores elementales, no es una estimación del error real del problema.

Si se analiza la evolución del autovalor obtenido en el proceso de adaptación, se observa que éste describe, en la mayoría de los problemas, una curva monótona que tiende asintóticamente a su valor real. Si se utiliza una formulación en campo eléctrico, esta curva es decreciente, es decir, el autovalor obtenido es mayor que el real y es, por tanto, una cota

superior de éste. Si se utiliza una formulación en campo magnético, la aproximación al valor real se realiza desde valores más pequeños que éste. La figura 5.11 muestra este comportamiento en los resultados obtenidos en el cálculo del autovalor del primer modo en una guía en L, cuya estructura y resultados se presentan en el punto 5.4.2. En este caso se utilizó un indicador basado en la continuidad de flujo \vec{D} en las aristas interiores, y un refinamiento regular 1:4, descrito en el punto 5.2.2.1, pero este comportamiento es independiente del indicador y refinamiento utilizados.

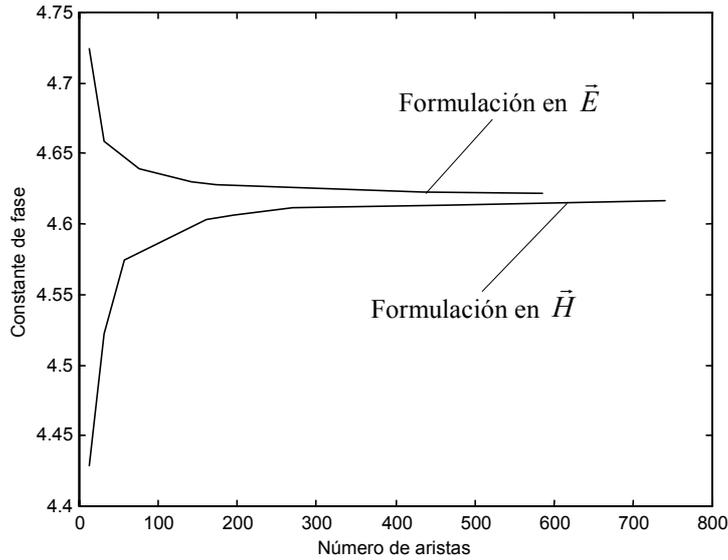


Figura 5.11. Evolución del autovalor obtenido en el proceso adaptativo

Por tanto, si se realiza una doble simulación, en campo eléctrico y en campo magnético, se dispone de una cota superior y una cota inferior del autovalor y, por lo tanto, se puede calcular una cota superior del error cometido. Por otra parte, al disponer de dos soluciones, se puede mejorar la precisión del resultado tomando como autovalor la media de los autovalores obtenidos en cada formulación, es decir:

$$\gamma_h = \frac{\gamma_h^{\vec{E}} + \gamma_h^{\vec{H}}}{2} \quad (5.144)$$

Y el error relativo de este valor será:

$$e < \left| \frac{\gamma_h - \gamma_h^{\vec{H}}}{\gamma_h^{\vec{H}}} \right| = \left| \frac{\gamma_h^{\vec{E}} - \gamma_h^{\vec{H}}}{2\gamma_h^{\vec{H}}} \right| \quad (5.145)$$

El conocimiento de esta cota de error está limitado a problemas que presenten este comportamiento monótono y tiene un coste, pues es necesario resolver dos veces el problema. Sin embargo, no es necesaria la resolución en la variable dual en todas las etapas del proceso adaptativo, sino únicamente cuando se quiera conocer la precisión de la solución. Por supuesto, si la condición de finalización del proceso adaptativo viene determinada por la precisión de éste, la resolución adicional es necesaria en todas las etapas, con lo que el coste computacional se ve multiplicado por dos.

5.2. Estrategia de Refinamiento

El refinamiento de una malla en un procedimiento de mallado adaptativo consiste en la adición de grados de libertad al problema en aquellas zonas donde éste presenta una discretización más pobre, es decir, donde el error cometido es mayor, con el fin de obtener en la últimas etapas del algoritmo adaptativo una distribución prácticamente homogénea del error en la malla. En los apartados anteriores se han desarrollado métodos de estimación cualitativa de este error a partir de la solución obtenida en cada paso del algoritmo adaptativo. En un método de refinamiento debe quedar definido el criterio de selección de las zonas que se deben refinar y la forma de realizar ese enriquecimiento.

En el primer punto de este apartado se analizan los posibles criterios de decisión en la elección de las zonas de refinamiento. En los siguientes puntos se presentan los métodos de refinamiento más utilizados en la bibliografía, y se describen los desarrollados en la presente tesis.

5.2.1. Elección de las Zonas de Refinamiento

En la mayoría de los métodos de estimación del error, éste se encuentra asociado al elemento. Por tanto, el criterio más evidente de selección será elegir aquellos elementos que presenten una estima del error mayor que un determinado valor.

Este valor puede ser el error cuadrático medio por elemento estimado en el problema:

$$\|e\|_m = \frac{\|e\|_T}{\sqrt{n_e}} \quad (5.146)$$

De esta forma, los elementos con $\|e_e\| > \|e\|_m$ son refinados y el error en la malla tiende a igualarse.

Si se dispone de un auténtico estimador, esto es, que proporcione una cota superior del error elemental y, por tanto, del error total del problema, se puede especificar la exactitud deseada en él, definida como:

$$\eta = \frac{\|\epsilon\|_T}{\|u\|_T} \quad (5.147)$$

donde $\|\epsilon\|_T^2$ es la energía del error real cometido y $\|u\|_T^2$ es la energía de la solución. Dado que ni ésta ni aquella son conocidas, esta tolerancia será aproximadamente el cociente de la raíz cuadrada de la energía de error global estimado y de la raíz cuadrada de la energía de la solución obtenida:

$$\eta \approx \frac{\|e\|_T}{\sqrt{\|u_h\|_T^2 + \|e\|_T^2}} \quad (5.148)$$

A partir de (5.148) y haciendo uso de (5.146) se puede obtener el valor del error cuadrático medio requerido para obtener la exactitud deseada:

$$\|e\|_{med} \approx \eta \sqrt{\frac{\|u_h\|_T^2 + \|e\|_T^2}{n_e}} = \frac{\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)n_e}} \|u_h\|_T \quad (5.149)$$

Otra posibilidad es comparar el error en cada elemento con una fracción del error máximo cometido en la malla. En este caso se refinarán aquellos elementos con:

$$\|e_e\| > \kappa \|e\|_{max} \quad (5.150)$$

donde κ ($0 < \kappa < 1$) es un parámetro que controla la cantidad de elementos que se refinan y, por tanto, la cantidad de nuevos elementos que se generan en cada paso del proceso adaptativo. Para valores altos de este parámetro, el refinamiento sólo se produce en los elementos con un error cercano al máximo, siendo necesarios muchos pasos de adaptación para conseguir buenas precisiones. En el otro extremo, valores cercanos a 0 generan una excesiva cantidad de nuevos elementos, muchos de los cuales no aportan una mejora en la exactitud de la solución y sí un aumento innecesario del coste computacional en la etapa de resolución del problema. Los resultados presentados en el punto 5.4 se obtuvieron con un valor de 0.5, con el que se pretende llegar a un compromiso entre número de elementos refinados y número de pasos del proceso adaptativo. Este valor es el utilizado en [Sal98]. A este criterio se pueden añadir otros, como la imposición de un número máximo y mínimo de elementos refinados en cada etapa del proceso de adaptación, de tal forma que siempre se garantice el refinamiento y que éste no sea excesivo [Jän96].

Si el error estimado está asociado a una arista, en lugar de un elemento, como sucede con el indicador de error descrito en 5.1.4, se puede definir una estrategia de refinamiento en arista, es decir, que seleccione qué aristas se deben refinar y, en un segundo paso, se descompongan los elementos según lo determine la división de sus aristas. La figura 5.12 muestra estos dos pasos.

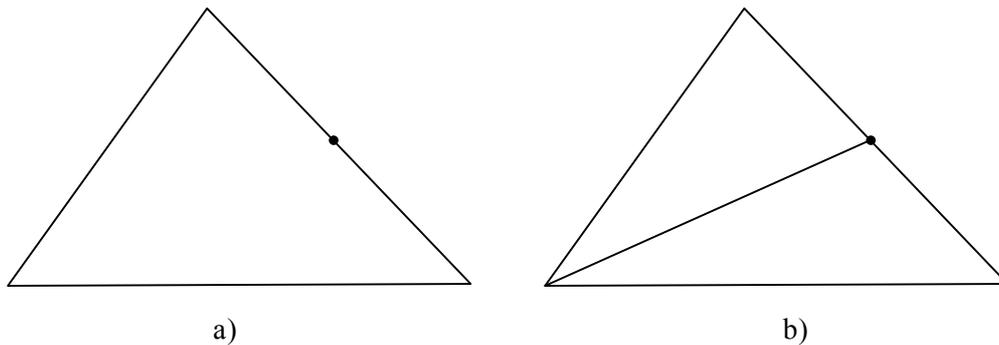


Figura 5.12. Refinamiento en arista: a) división de la arista, b) descomposición del elemento

Esta técnica de refinamiento se conoce como de *arista marcada* [Ver96] y no es recomendable porque a lo largo del proceso adaptativo puede generar mallas con elementos muy irregulares, ya que la arista que se divide viene determinada por el indicador de error, y no por criterios de regularidad de los nuevos elementos. Es importante mantener la regularidad de los elementos en el proceso de adaptación porque el error cometido en cada elemento es proporcional a su relación de aspecto, como indica (A4.14).

Por tanto, aunque el error se estime en las aristas, es recomendable realizar el refinamiento en los elementos. Para ello, en la implementación del método adaptativo

basado en el indicador descrito en 5.1.4 se ha optado por refinar aquellos elementos que presenten en alguna de sus aristas un error mayor que la mitad del máximo.

Tanto si el refinamiento se realiza directamente sobre elementos como si se hace sobre aristas, se pueden definir distintas estrategias. La más utilizada y la que se ha desarrollado en esta tesis es la que podríamos denominar *refinamiento simple*. En ella el criterio de refinamiento es el comentado anteriormente y sólo cabe distinguir entre elementos refinables y elementos no refinables. La figura 5.13 muestra un ejemplo de refinamiento de este tipo.

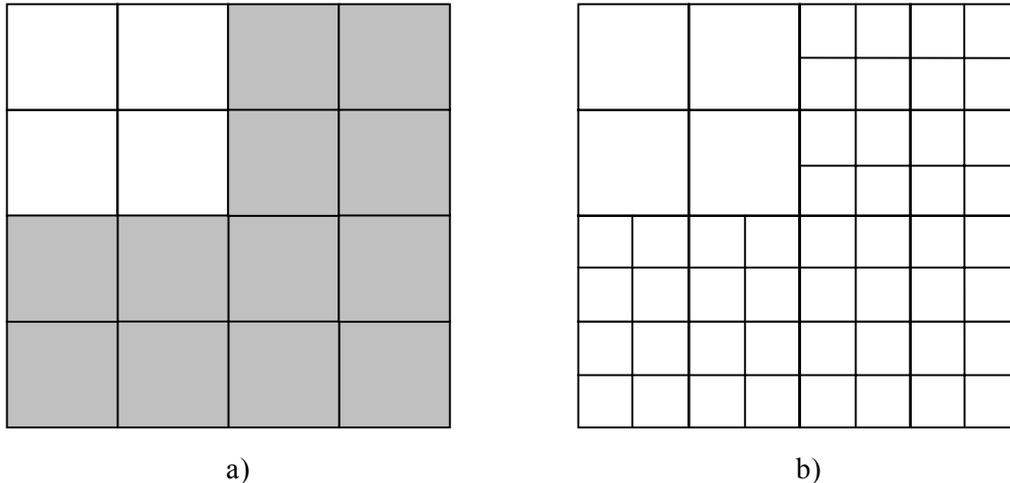


Figura 5.13. Refinamiento simple: a) elementos para refinar, b) malla refinada

Esta misma filosofía se puede aplicar con varios niveles de refinamiento en lo que podemos denominar como *refinamiento múltiple*. En él, el criterio de refinamiento especifica más de un umbral y, dependiendo del tramo en que se encuentre un elemento, éste es sometido a un refinamiento más o menos intenso [Cen85], [Bae89], [Fer92]. Un ejemplo de este tipo de refinamiento puede definirse de la siguiente forma:

Sea $\|e\|_{max}$ el error máximo de la discretización y κ_i N números reales con $\kappa_i \in]0,1[$ y $\kappa_i < \kappa_{i+1}$. Entonces, dependiendo del error en el elemento, el refinamiento presenta una intensidad determinada:

- Si $\|e_e\| \leq \kappa_1 \|e\|_{max} \Rightarrow$ No se refina
- Si $\kappa_i \|e\|_{max} < \|e_e\| \leq \kappa_{i+1} \|e\|_{max} \Rightarrow$ Se realiza el refinamiento tipo i
- Si $\kappa_n \|e\|_{max} < \|e_e\| \Rightarrow$ Se realiza el refinamiento máximo

En la figura 5.14 se presenta un ejemplo con dos niveles de refinamiento. Se puede observar que los elementos con mayor error son refinados más intensamente. El propósito de este tipo de métodos es reducir el número de pasos del algoritmo adaptativo con el fin de resolver el problema, la parte más costosa del método, un menor número de veces.

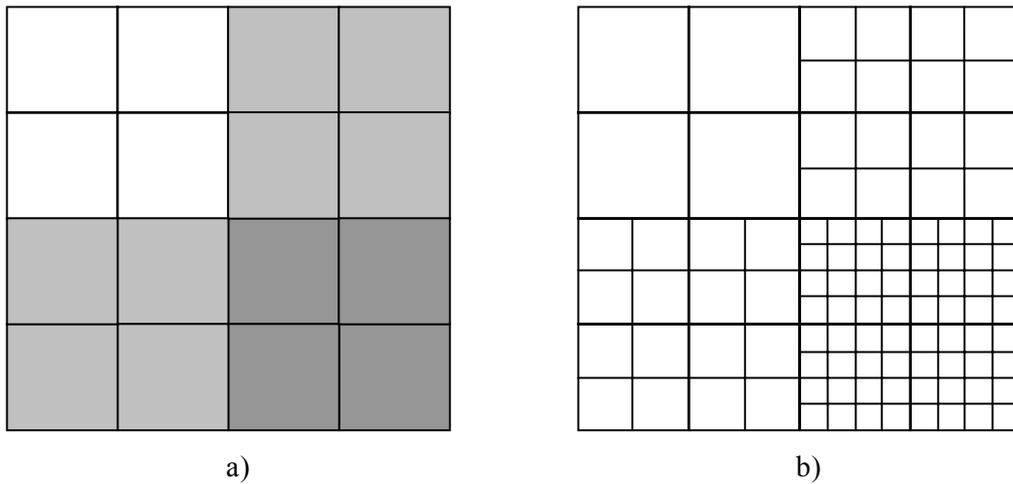


Figura 5.14. Refinamiento múltiple (2 niveles): a) elementos para refinar, b) malla refinada

Las dos estrategias comentadas se inician con una malla de muy baja densidad a la que se van añadiendo grados de libertad. Se pueden desarrollar otras estrategias que partan de una malla de densidad media y en cada paso del algoritmo adaptativo añadan incógnitas en zonas con alto error y las eliminen allí donde el error es pequeño. Esta estrategia se puede denominar *refinamiento adelante-atrás* y se puede encontrar en [Riv91], [Bel93]. En la figura 5.15 se muestra cómo actúa este refinamiento. El propósito de esta estrategia es, también, reducir el número de ciclos del proceso de adaptación partiendo de una malla con una densidad más cercana a la densidad media de la malla final. El principal inconveniente de esta técnica es el uso de incógnitas que pueden ser eliminadas y que, por tanto, no contribuyen a la exactitud de la solución final, pero sí añaden un coste computacional al proceso. Además, en este caso es necesario desarrollar tanto métodos de descomposición de elementos en otros más pequeños, como métodos de *unificación* o ensamblado.

Conceptualmente, este método sigue una estrategia de refinamiento múltiple donde existen refinamientos positivos y negativos, es decir, “desrefinamientos”. Por supuesto, es posible combinar estrategias múltiples y de tipo adelante-atrás para conseguir distintas intensidades de refinamientos positivos y negativos.

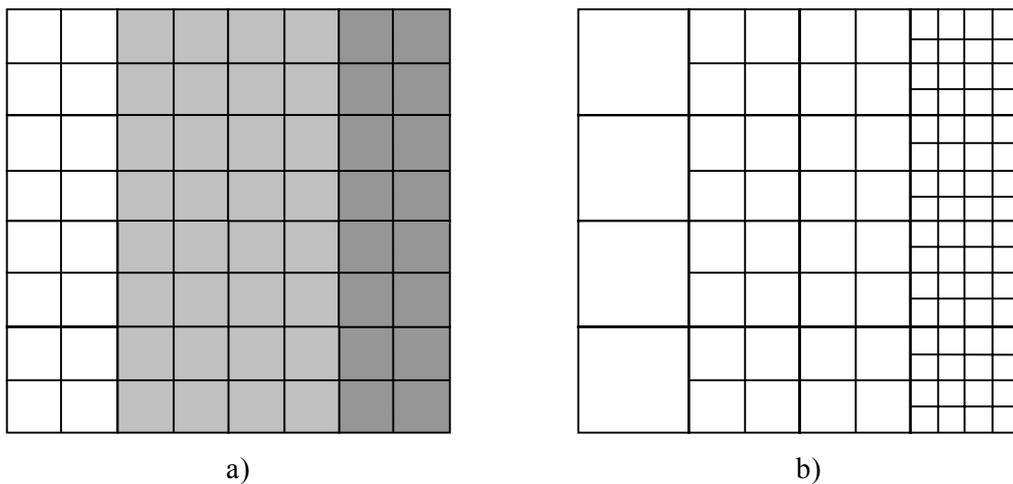


Figura 5.15. Refinamiento adelante-atrás: a) error en los elementos, b) malla refinada

5.2.2. Métodos de Refinamiento

Una vez conocidas las zonas (o elementos) que requieren un refinamiento, las posibilidades de realización de éste son muy variadas. Por refinamiento, en este contexto y desde un punto de vista conceptual, se entiende aumento del número de grados de libertad del problema. Por tanto, queda descartado como tal el denominado refinamiento *tipo r*, consistente en un reposicionamiento de los nodos de la malla en cada etapa del proceso de adaptación. Este tipo de refinamiento se aplica fundamentalmente en problemas de dinámica de fluidos [Ban97], [McR98], [Aga98], [Bal98], [Deg98], [Laf98], [Sem98], [Tin98] y consigue mejorar la exactitud de una solución determinada, pero no alcanzar una precisión previamente especificada [Zie91].

En el apartado anterior, los ejemplos que ilustran las distintas estrategias utilizan un refinamiento basado en la subdivisión de la malla. Se ha utilizado este tipo de refinamiento por ser más intuitivo y clarificador. Sin embargo, la discretización de un problema puede aumentar sus grados de libertad, tanto descomponiendo los elementos de la malla en otros más pequeños como aumentando el grado de las funciones de interpolación en cada uno de ellos. Los métodos que incrementan el número de elementos en la malla se denominan métodos de refinamiento *tipo h*, y el incremento del grado del polinomio utilizado en los elementos seleccionados es conocido como refinamiento *tipo p* [Gag83], [McF92]. Ambos tienen sus ventajas e inconvenientes, pero en esta tesis las técnicas de enriquecimiento de la discretización desarrolladas consisten en refinamientos *tipo h*. Se ha elegido este tipo de refinamiento por dos razones: en primer lugar, por coherencia con el tema de la tesis (la generación de mallas, fijas o adaptativas) y, en segundo lugar, porque la adaptación de malla, sobre todo en problemas bidimensionales, es más fácil de visualizar y comprender y, resulta, por lo tanto, más didáctica.

En el refinamiento *tipo p*, el tamaño de los elementos de la malla no varía en el proceso de adaptación. Al emplear distintos polinomios de interpolación según las necesidades del problema, muchos pares de elementos vecinos, es decir, que comparten una arista, presentan funciones de interpolación polinómicas de distinto grado y, por tanto, en la arista común se produce una discontinuidad en la función de interpolación. Para evitar este inconveniente, en el proceso de generación del autosistema algebraico, se deben imponer ciertas condiciones a los nodos interiores de las aristas conflictivas de modo que se ajusten al polinomio de grado menor [Aya99]. En la figura 5.16 se describe esta situación para un elemento nodal que utiliza una interpolación lineal y otro con interpolación cuadrática. En este caso, el valor del nodo intermedio de la arista común debe ser interpolado linealmente a partir de los valores de los nodos extremos. Esta imposición implica que el otro elemento pierde un grado de libertad.

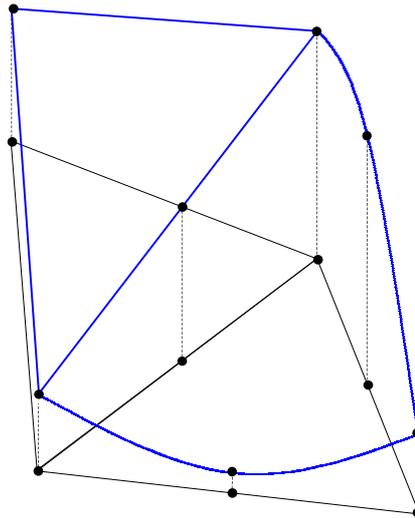


Figura 5.16. Adecuación de las funciones de interpolación en la arista común de dos elementos

Es posible desarrollar refinamientos que combinen los *tipo h* y *tipo p*. A éstos se les denomina refinamientos *hp* y se pueden encontrar ejemplos en [Zie89], [Dem89], [Ode89], [Rac89], [Ain92b], [Gia94], [Che94], [Aya99].

Dentro del refinamiento *tipo h* se puede distinguir entre descomposiciones que generan mallas conformes y aquéllas que producen mallas no conformes, es decir, donde quedan nodos parcialmente conectados a la malla [Gag83], [Dem89], [Ode89], [Rac89], [Bel93], [Che94], [Wan98]. Las mallas presentadas en las figuras 5.13-5.15 son un ejemplo de este último tipo de refinamiento. En la figura 5.17 se muestra un ejemplo de refinamiento *tipo h* no conforme en una malla triangular.

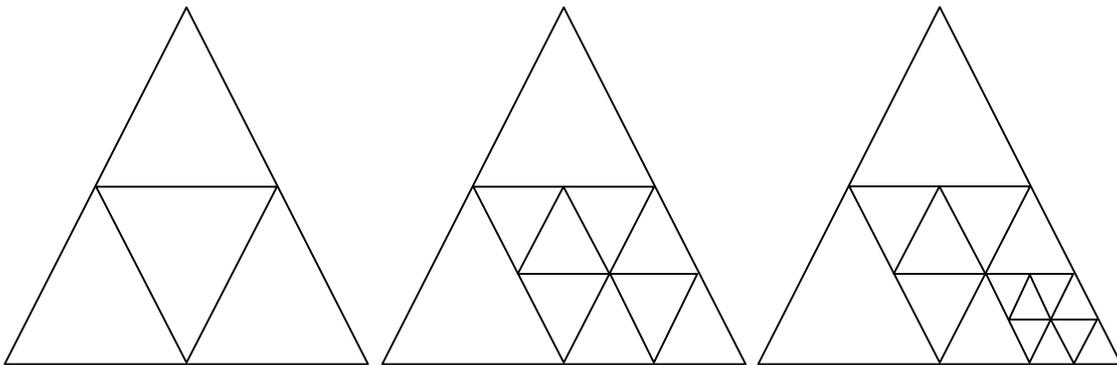


Figura 5.17. Refinamiento *h* no conforme en una discretización triangular

Suponiendo que se está realizando una interpolación nodal, al dejar nodos parcialmente conectados, existen aristas de elementos que, a su vez son dos aristas de elementos vecinos. Estas situaciones provocan la discontinuidad de las funciones de interpolación en las aristas comunes. Para impedir esto, se debe forzar en los nodos interiores conflictivos que el valor de la función sea interpolado a partir de los valores en los nodos extremos de la arista que contiene a las más pequeñas. Este procedimiento es similar al descrito para solucionar el problema de continuidad en el refinamiento *tipo p*. En la figura 5.18 se muestra esta situación. Se puede apreciar que al forzar la continuidad, se pierde un grado de libertad.

Este tipo de refinamiento es más sencillo de implementar, se generan menos elementos, ya que no son necesarios *elementos de transición*, como los utilizados en la figura 5.19c, que aseguren la conformidad de la malla, y conservan su relación de aspecto, como muestra la figura 5.19b. Por contra, el problema de la conectividad incompleta se traslada a la etapa de proceso del MEF y es allí donde se le debe dar solución. Esta solución provoca, como se ha visto anteriormente, una pérdida de un grado de libertad.

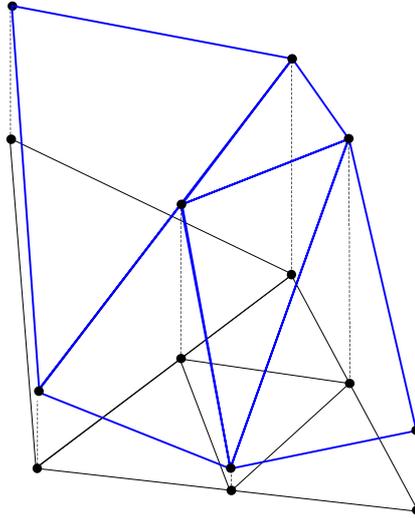


Figura 5.18. Adecuación de las funciones de interpolación en aristas comunes

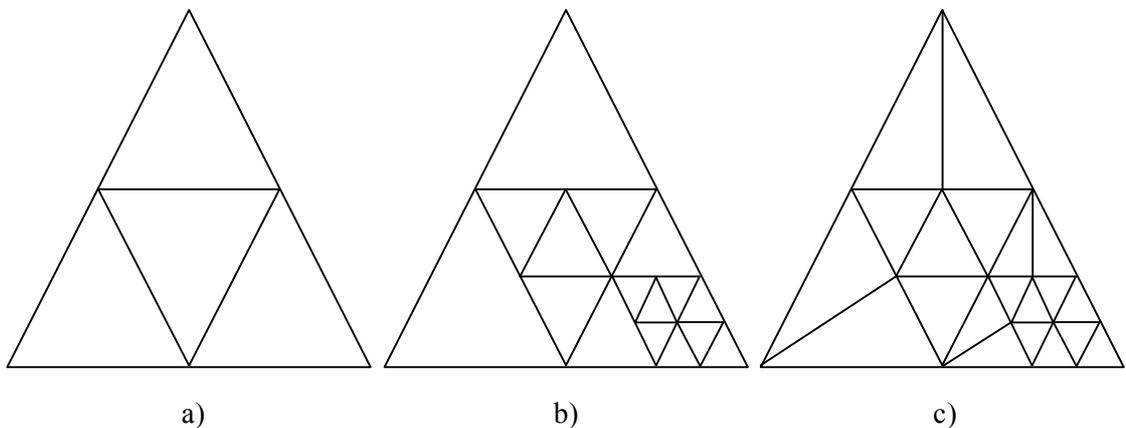


Figura 5.19. Generación de nuevos elementos: a) malla inicial, b) refinamiento no conforme, c) refinamiento conforme

En la presente tesis se han utilizado métodos de refinamiento conformes para mantener independiente el proceso de refinamiento de malla del proceso de resolución del problema. A continuación se describen los métodos desarrollados para mallas triangulares. El caso de elementos cuadriláteros es más problemático. En el apartado correspondiente se analizan las dificultades que se presentan y se describen algunas posibles soluciones. En cualquier caso, es evidente que debe existir un mecanismo de herencia por el cual los nuevos nodos, aristas y elementos presenten las propiedades (condiciones de contorno o propiedades dieléctricas y magnéticas) de los componentes de la malla de los que proceden.

5.2.2.1. Métodos de Refinamiento Conforme en Mallas Triangulares

La dificultad en el desarrollo de este tipo de métodos estriba fundamentalmente en la generación de los elementos de transición que aseguren la conformidad de la malla. Se pueden desarrollar técnicas que en un solo paso añadan más grados de libertad a la malla y conserven su conformidad, como el método de Delaunay [Cen85], [Fre87], [Alo96], [Siv97], [Tys98] o el de frente de avance [Zie91], [Hin91]. Generalmente, en este segundo caso se emplean mallas de referencia que controlan el tamaño de los elementos. En [Fre87], [Siv97] se estudian distintas posibilidades en la inserción de los nuevos nodos cuando se emplea la triangulación de Delaunay. Los métodos desarrollados en la tesis refinan la malla descomponiendo, en primer lugar, los elementos seleccionados en otros más pequeños, e introduciendo posteriormente los nodos, aristas y elementos necesarios para conservar la conectividad de la malla.

Refinamiento Regular 1:4

En este tipo de refinamiento cada elemento que debe ser refinado se descompone en otros cuatro de igual relación de aspecto que se generan al unir los puntos intermedios de las tres aristas, como indica la figura 5.20a. Se puede obtener una mejora adicional en la relación de aspecto de dos de los elementos generados si, en lugar de un refinamiento regular puro, se emplea uno modificado donde los elementos se generen siguiendo el criterio de máxima regularidad o de ángulo mayor descrito en el punto 2.1 (figura 5.20b).

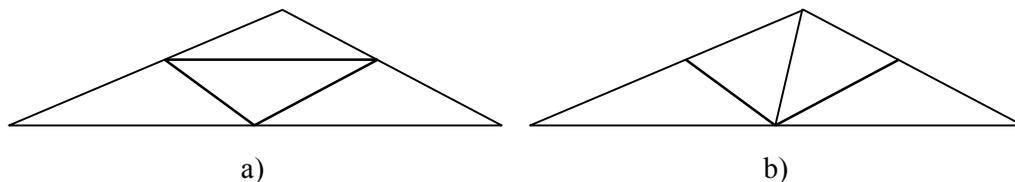


Figura 5.20. Descomposición 1:4 de un triángulo: a) regular, b) regular modificada

Refinamiento 1:2 por Bisección de la Arista Más Larga

Los elementos seleccionados se dividen en dos triángulos uniendo el punto medio de la arista más larga del elemento con el vértice opuesto, como muestra la figura 5.21 [Riv91], [Ver96], [Jon97], [Pla98]. Este método origina menos elementos que el anterior, es decir, el refinamiento es menos intenso.

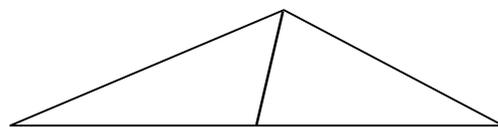


Figura 5.21. Descomposición 1:2 de un triángulo

Las situaciones de no conformidad que se pueden distinguir en ambos tipos de refinamiento son las siguientes:

1. Un elemento presenta nodos sin conexión o “suelos” en tres de sus aristas.
2. Un elemento presenta nodos suelos en las dos aristas menores.
3. Un elemento presenta un nodo suelo en la arista mayor.
4. Un elemento presenta un nodo suelo en una arista distinta de la mayor.

5. Un elemento presenta un nodo suelto en una arista distinta de la mayor y otro en la mayor.

y se resuelven de la siguiente manera, respectivamente (figura 5.22):

1. El elemento se descompone de modo regular o regular modificado.
2. Estrategia 1.
3. El elemento se descompone en dos elementos mediante la unión del nodo suelto y el vértice opuesto.
4. El elemento se descompone en tres triángulos, mediante la unión del nodo suelto y el punto medio de la arista mayor, y la unión de éste y el vértice opuesto.
5. Estrategia 4.

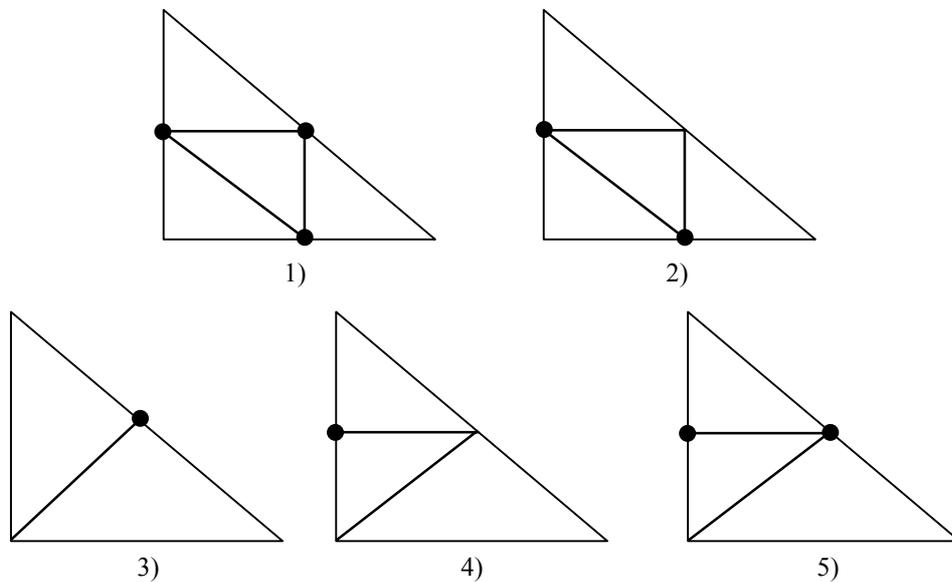


Figura 5.22. Resolución de no conformidades

Esta estrategia garantiza que en todas las mallas generadas en el procedimiento adaptativo el ángulo menor sea, como mínimo, la mitad del ángulo menor en la malla inicial [Ver96]. Es decir, la pérdida de regularidad de los elementos está acotada y la regularidad de los elementos en la malla final viene determinada por la regularidad en la malla inicial.

Otro tipo de estrategias de refinamiento, como la mostrada en la figura 5.23, evita el problema de la aparición de nodos sueltos, pues éstos se crean únicamente en el interior del elemento refinado; sin embargo, la regularidad de los triángulos refinados se ve paulatinamente degradada. No obstante, esta regularidad se puede mejorar si posteriormente se aplican técnicas de intercambio de aristas y reposicionamiento de nodos a estos elementos [Ahm98].

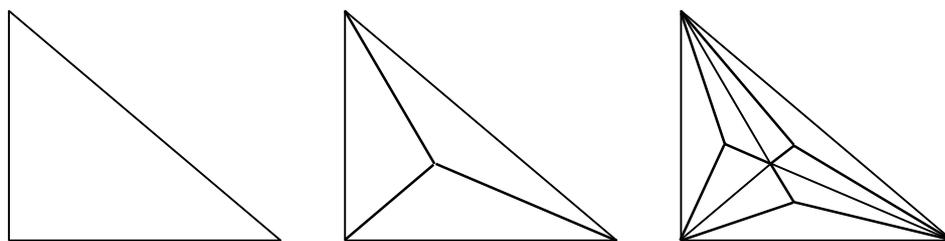


Figura 5.23. Sucesivos refinamientos 1:3 en triángulos con creación de nodo interno

Se puede observar en la figura 5.22 que, en ocasiones, será necesaria la descomposición regular 1:4 de elementos que no debían ser refinados, con el fin de mantener una aceptable regularidad de la malla. Por tanto, en el refinamiento 1:2 se puede dar el caso de que elementos que no requieren ser refinados en una etapa determinada del método adaptativo, lo sean más intensamente que aquéllos que sí deben ser refinados. Sin embargo, este hecho no afecta a la convergencia del método adaptativo, como se comprueba en el apartado de resultados, porque aquellos elementos refinados en exceso (1:4) en una etapa son vecinos de los refinados 1:2 y se encuentran cerca de la singularidad o zona de variación abrupta, por lo que sería muy probable que en el siguiente ciclo de adaptación superasen el error permitido y requirieran ser refinados si no lo hubieran sido en el ciclo previo.

Cualquiera que sea el método elegido, la creación de nodos en el punto intermedio de las aristas debe tener en cuenta la naturaleza de éstas. Las aristas del interior de la malla son todas rectas, pero las aristas del contorno pueden pertenecer a una línea curva. En tal caso se debe tener en cuenta la curvatura de la arista en la generación del nuevo nodo, de forma que el refinamiento se ajuste al contorno del problema, como indica la figura A1.3b.

Asimismo, es posible aplicar sobre la malla refinada técnicas de mejora como el reposicionamiento de nodos o el intercambio de aristas, que, en general, incrementarán la regularidad de los elementos.

5.2.2.2. Métodos de Refinamiento Conforme en Mallas Cuadriláteras

El refinamiento de elementos cuadriláteros presenta muchas más dificultades que el de triángulos. En un contexto adaptativo no se utilizan mallas mixtas, pues en ellas se pretende que el número de elementos triangulares sea mínimo y en el proceso de adaptación la relación de triángulos frente a cuadriláteros aumenta inexorablemente conforme el proceso avanza. Por tanto, al tratar el refinamiento de elementos cuadriláteros, suponemos que éstos se encuentran en una malla cuadrilátera.

El refinamiento de cuadriláteros con generación de nodos internos es directamente conforme, pues no se crean nodos en las aristas y, por tanto, no existen nodos sueltos. Sin embargo, adolece del mismo inconveniente que su método análogo en triángulos: la relación de aspecto se degrada rápidamente en el proceso de adaptación, como muestra la figura 5.24.

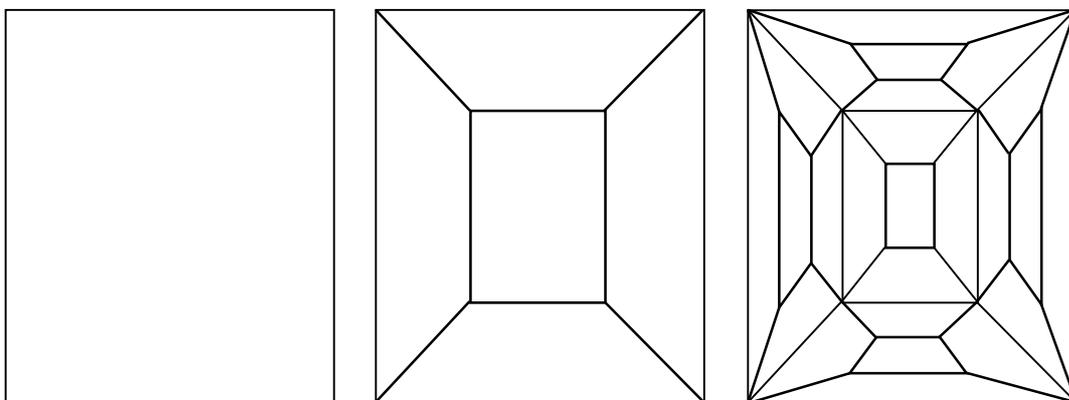


Figura 5.24. Refinamiento 1:5 en cuadriláteros con creación de nodos internos

El refinamiento regular 1:4 es la forma más intuitiva de descomponer el cuadrilátero, pero la aparición de nodos sueltos que esta descomposición provoca dificulta

la creación de una malla cuadrilátera conforme, pues si se quiere que la no conformidad se solucione localmente, es decir, en el entorno donde tiene lugar, es necesaria la generación de elementos triangulares. En la figura 5.25 se muestran los posibles casos de nodos sueltos en un cuadrilátero. Cuando el número es par, la no conformidad se supera generando únicamente cuadriláteros. Sin embargo, si el número de nodos sueltos es impar, es imprescindible la generación de un triángulo (figura 5.26) o bien la generación de un nuevo nodo (figura 5.27) que, en general, propagará el refinamiento indefinidamente hasta encontrar una arista del contorno (figura 5.28). Esta última opción produce, en general, mallas *graduales* más que adaptadas, con un exceso de elementos por la razón comentada arriba.

El desarrollo de un método adaptativo eficiente para mallas cuadriláteras presenta una restricción fundamental: que el número de divisiones en el contorno de la zona que se pretende refinar sea par. Una implementación de este método se puede encontrar en [Zhu91b].

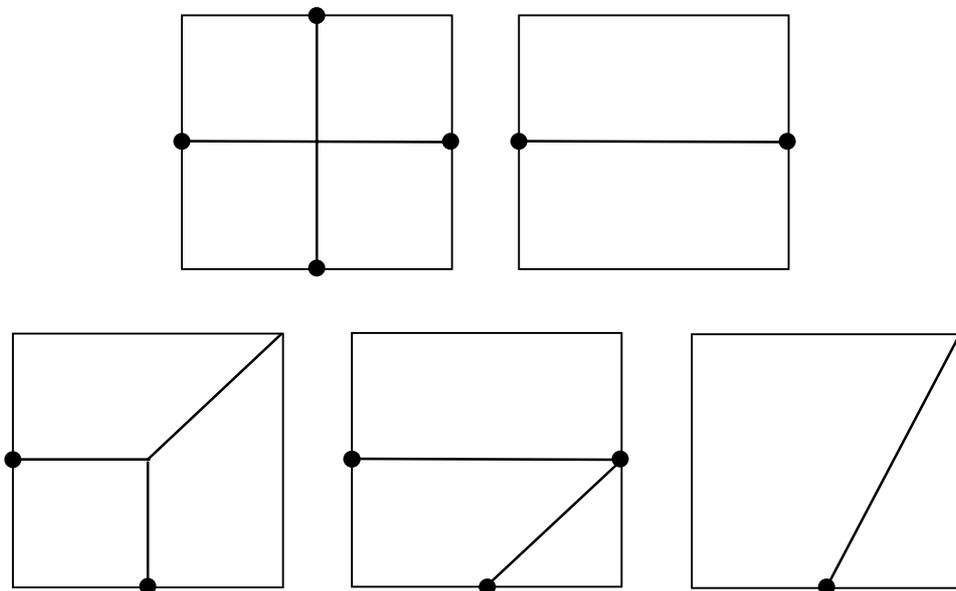


Figura 5.25. Resolución de no conformidades en cuadriláteros. Aparición de triángulos

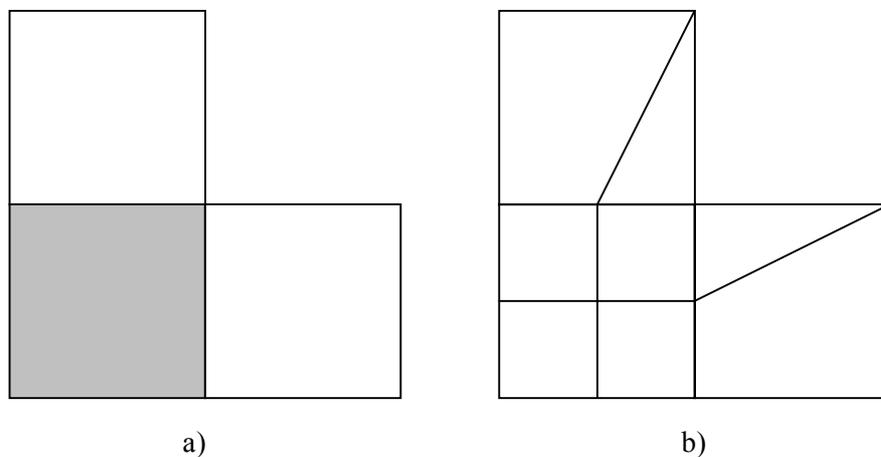


Figura 5.26. Refinamiento con inserción de triángulos: a) elemento para refinar, b) malla refinada

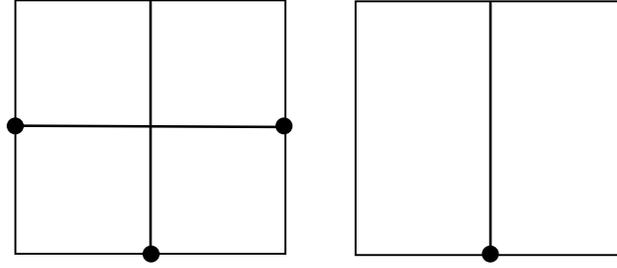


Figura 5.27. Generación de elementos cuando el número de nodos sueltos es impar.
Creación de nuevos nodos

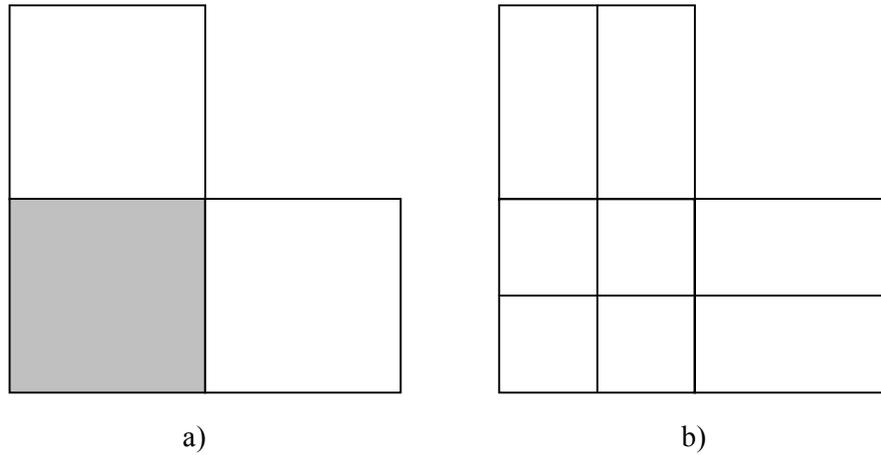


Figura 5.28. Refinamiento con inserción de nodos: a) elemento para refinar, b) malla refinada

5.3. Métodos de Mallado Adaptativo en Problemas Tridimensionales

En la presente tesis se han desarrollado y validado métodos adaptativos para problemas de guiado de ondas. En este punto se generalizan los indicadores descritos en 5.1 a problemas tridimensionales discretizados con mallas tetraédricas y se comentan algunas cuestiones relativas a las estrategias de refinamiento en mallas volumétricas.

5.3.1. Indicador de Error Residual

La medida del error elemental calculado a partir de los residuos en el tetraedro se puede obtener mediante una expresión similar a (5.7):

$$\|\bar{e}^e\|^2 = f_v \frac{h_e^2}{\lambda_{v_e^{-1}, \min}^p} \iiint_{\Omega^e} \bar{r}_v^{e*} \cdot \bar{r}_v^e d\Omega + f_s \frac{h_e}{\lambda_{v_e^{-1}, \min}^p} \sum_{\Gamma_k \in \Gamma_{\text{int, Neu}}^e} \iint_{\Gamma_k} \bar{r}_s^{k*} \cdot \bar{r}_s^k d\Gamma \quad (5.151)$$

donde, en este caso, el residuo interno se evalúa en el elemento volumétrico y los residuos singulares se calculan en las caras del elemento que no presentan condición de contorno Dirichlet, es decir, en las caras internas o de condición de contorno Neumann.

$$\bar{r}_v^e = \nabla \times v_e^{-1} \nabla \times \bar{u}^e - \omega^2 \vartheta_e \bar{u}^e \quad (5.152)$$

$$\vec{r}_s^k \Big|_{\text{int}} = \hat{n} \times (\mathbf{v}_1^{-1} \nabla \times \vec{u}_1 - \mathbf{v}_2^{-1} \nabla \times \vec{u}_2) \quad (5.153)$$

$$\vec{r}_s^k \Big|_{\text{Neumann}} = \hat{n} \times \mathbf{v}_e^{-1} \nabla \times \vec{u}^k \quad (5.154)$$

5.3.1.1. Residuo Interior

La interpolación utilizada en los elementos tetraédricos de arista, descrita en A4.6, implica que el rotacional de las funciones de forma y , por tanto, el de la solución en un elemento, sea constante. Por esta razón, el residuo interior en el elemento e se reduce a:

$$\vec{r}_v^e = -\omega^2 \vartheta_e \vec{u}^e = -\omega^2 \begin{bmatrix} \vartheta_{xx} u_x^e + \vartheta_{xy} u_y^e + \vartheta_{xz} u_z^e \\ \vartheta_{yx} u_x^e + \vartheta_{yy} u_y^e + \vartheta_{yz} u_z^e \\ \vartheta_{zx} u_x^e + \vartheta_{zy} u_y^e + \vartheta_{zz} u_z^e \end{bmatrix} \quad (5.155)$$

donde se ha elidido el subíndice e en los elementos de \mathbf{v}_e^{-1} y ϑ_e para simplificar la notación.

Por tanto, el residuo interior es directamente proporcional a la energía de la solución en el elemento. La integral del primer término de (5.151) se puede calcular como suma de las integrales en cada una de las componentes:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^e} \vec{r}_v^{e*} \cdot \vec{r}_v^e d\Omega &= \iiint_{\Omega^e} (r_{vx}^{e*} \cdot r_{vx}^e + r_{vy}^{e*} \cdot r_{vy}^e + r_{vz}^{e*} \cdot r_{vz}^e) d\Omega = \\ &= \iiint_{\Omega^e} r_{vx}^{e*} \cdot r_{vx}^e d\Omega + \iiint_{\Omega^e} r_{vy}^{e*} \cdot r_{vy}^e d\Omega + \iiint_{\Omega^e} r_{vz}^{e*} \cdot r_{vz}^e d\Omega \end{aligned} \quad (5.156)$$

donde:

$$\begin{aligned} r_{vx}^e &= -\omega^2 (\vartheta_{xx} u_x^e + \vartheta_{xy} u_y^e + \vartheta_{xz} u_z^e) \\ r_{vy}^e &= -\omega^2 (\vartheta_{yx} u_x^e + \vartheta_{yy} u_y^e + \vartheta_{yz} u_z^e) \\ r_{vz}^e &= -\omega^2 (\vartheta_{zx} u_x^e + \vartheta_{zy} u_y^e + \vartheta_{zz} u_z^e) \end{aligned} \quad (5.157)$$

La integración del residuo se simplifica notablemente si se realiza en el elemento canónico asociado al elemento real y descrito en A4.6. En este dominio canónico las componentes de la solución del problema se pueden expresar como:

$$u_x^\zeta = \sum_{i=1}^4 K_{x\zeta_i} \zeta_i \quad (5.158)$$

$$u_y^\zeta = \sum_{i=1}^4 K_{y\zeta_i} \zeta_i \quad (5.159)$$

$$u_z^\zeta = \sum_{i=1}^4 K_{z\zeta_i} \zeta_i \quad (5.160)$$

donde:

$$\begin{aligned}
K_{x\zeta_1} &= \frac{l_1 \bar{u}_1 a_2 - l_3 \bar{u}_3 a_3 + l_4 \bar{u}_4 a_4}{\Delta_\zeta} \\
K_{x\zeta_2} &= \frac{l_2 \bar{u}_2 a_3 - l_1 \bar{u}_1 a_1 + l_5 \bar{u}_5 a_4}{\Delta_\zeta} \\
K_{x\zeta_3} &= \frac{l_3 \bar{u}_3 a_1 - l_2 \bar{u}_2 a_2 + l_6 \bar{u}_6 a_4}{\Delta_\zeta} \\
K_{x\zeta_4} &= \frac{-l_4 \bar{u}_4 a_1 - l_5 \bar{u}_5 a_2 - l_6 \bar{u}_6 a_3}{\Delta_\zeta}
\end{aligned} \tag{5.161}$$

$$\begin{aligned}
K_{y\zeta_1} &= \frac{l_1 \bar{u}_1 b_2 - l_3 \bar{u}_3 b_3 + l_4 \bar{u}_4 b_4}{\Delta_\zeta} \\
K_{y\zeta_2} &= \frac{l_2 \bar{u}_2 b_3 - l_1 \bar{u}_1 b_1 + l_5 \bar{u}_5 b_4}{\Delta_\zeta} \\
K_{y\zeta_3} &= \frac{l_3 \bar{u}_3 b_1 - l_2 \bar{u}_2 b_2 + l_6 \bar{u}_6 b_4}{\Delta_\zeta} \\
K_{y\zeta_4} &= \frac{-l_4 \bar{u}_4 b_1 - l_5 \bar{u}_5 b_2 - l_6 \bar{u}_6 b_3}{\Delta_\zeta}
\end{aligned} \tag{5.162}$$

$$\begin{aligned}
K_{z\zeta_1} &= \frac{l_1 \bar{u}_1 c_2 - l_3 \bar{u}_3 c_3 + l_4 \bar{u}_4 c_4}{\Delta_\zeta} \\
K_{z\zeta_2} &= \frac{l_2 \bar{u}_2 c_3 - l_1 \bar{u}_1 c_1 + l_5 \bar{u}_5 c_4}{\Delta_\zeta} \\
K_{z\zeta_3} &= \frac{l_3 \bar{u}_3 c_1 - l_2 \bar{u}_2 c_2 + l_6 \bar{u}_6 c_4}{\Delta_\zeta} \\
K_{z\zeta_4} &= \frac{-l_4 \bar{u}_4 c_1 - l_5 \bar{u}_5 c_2 - l_6 \bar{u}_6 c_3}{\Delta_\zeta}
\end{aligned} \tag{5.163}$$

donde ζ_i , con $i=1,2,3,4$, son las coordenadas simplex definidas en (A4.30), l_i es la longitud de la arista i , \bar{u}_i es la componente de la función interpolada en la arista i , y a_i , b_i y c_i vienen determinadas por la transformación $T:(x, y, z) \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ del elemento real al canónico.

Por tanto, la expresión de la componente $m \in \{x, y, z\}$ del residuo interior en el elemento canónico es:

$$r_{vm}^\zeta = -\omega^2 \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=x,y,z} \vartheta_{mj} K_{j\zeta_i} \right) \zeta_i = \sum_{i=1}^4 K_{\zeta_i} \zeta_i \tag{5.164}$$

El cálculo de las integrales (5.156) en el elemento canónico requiere la aplicación de la fórmula de cambio de variable en la integración:

$$\iiint_{\Omega^e} f^e(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^\zeta} f^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \|J\| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \tag{5.165}$$

donde $\|J\|$ es el valor absoluto del determinante jacobiano de la transformación. En este caso, $\|J\| = |\Delta_\zeta|$ es constante en Ω^ζ y puede salir fuera de la integral, quedando finalmente:

$$\iiint_{\Omega^e} r_{vm}^{e*} \cdot r_{vm}^e d\Omega = |\Delta_\zeta| \iiint_{\Omega^\zeta} r_{vm}^{\zeta*} \cdot r_{vm}^\zeta d\Omega = |\Delta_\zeta| \iiint_{\Omega^\zeta} |r_{vm}^\zeta|^2 d\Omega \quad (5.166)$$

donde:

$$\begin{aligned} |r_{vm}^\zeta|^2 = & |K_{\zeta_1}|^2 \zeta_1^2 + |K_{\zeta_2}|^2 \zeta_2^2 + |K_{\zeta_3}|^2 \zeta_3^2 + |K_{\zeta_4}|^2 \zeta_4^2 + \\ & + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_2}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_2}))\zeta_1\zeta_2 + \\ & + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_3}))\zeta_1\zeta_3 + \\ & + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_4}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_4}))\zeta_1\zeta_4 + \\ & + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_2})\operatorname{Re}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_2})\operatorname{Im}(K_{\zeta_3}))\zeta_2\zeta_3 + \\ & + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_2})\operatorname{Re}(K_{\zeta_4}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_2})\operatorname{Im}(K_{\zeta_4}))\zeta_2\zeta_4 + \\ & + 2(\operatorname{Re}(K_{\zeta_3})\operatorname{Re}(K_{\zeta_4}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_3})\operatorname{Im}(K_{\zeta_4}))\zeta_3\zeta_4 \end{aligned} \quad (5.167)$$

Aplicando la fórmula de integración sobre tetraedros canónicos [Bal96]:

$$\int_{\zeta_1=0}^1 \int_{\zeta_2=0}^{1-\zeta_1} \int_{\zeta_3=0}^{1-\zeta_1-\zeta_2} \zeta_1^i \zeta_2^j \zeta_3^k \zeta_4^l d\zeta_3 d\zeta_2 d\zeta_1 = \frac{i!j!k!l!}{(i+j+k+l+3)!} \quad (5.168)$$

se obtiene finalmente:

$$\iint_{\Omega^e} r_{vx}^{e*} \cdot r_{vx}^e = |\Delta_\zeta| \frac{K_1}{60} \quad (5.169)$$

donde:

$$\begin{aligned} K_1 = & |K_{\zeta_1}|^2 + |K_{\zeta_2}|^2 + |K_{\zeta_3}|^2 + |K_{\zeta_4}|^2 + \operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_2}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_2}) + \\ & + \operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Re}(K_{\zeta_1})\operatorname{Re}(K_{\zeta_4}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_1})\operatorname{Im}(K_{\zeta_4}) + \\ & + \operatorname{Re}(K_{\zeta_2})\operatorname{Re}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_2})\operatorname{Im}(K_{\zeta_3}) + \operatorname{Re}(K_{\zeta_2})\operatorname{Re}(K_{\zeta_4}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_2})\operatorname{Im}(K_{\zeta_4}) + \\ & + \operatorname{Re}(K_{\zeta_3})\operatorname{Re}(K_{\zeta_4}) + \operatorname{Im}(K_{\zeta_3})\operatorname{Im}(K_{\zeta_4}) \end{aligned} \quad (5.170)$$

5.3.1.2. Residuo en las Caras

La interpolación vectorial conforme en rotacional para tetraedros descrita A4.6 garantiza la continuidad de la componente tangencial a la cara de la solución \vec{u} en las caras interiores del dominio del problema. Sin embargo, la continuidad de la componente tangencial de la variable dual no está garantizada, pues ésta se obtiene a partir del rotacional de la variable primaria \vec{u} , cuya componente normal a la cara es, en general, discontinua. La segunda componente del error en (5.151) cuantifica en qué medida la componente tangencial a la cara de la variable dual no es continua en las caras del elemento e (5.153).

Aquellas caras que presenten una condición tipo Dirichlet, es decir, condición de pared eléctrica para la formulación en campo eléctrico, o condición de pared magnética para la formulación en campo magnético, presentan una variable primaria con componente tangencial a

la cara nula debido a la imposición de la condición de contorno. Por tanto, la variable dual obtenida a partir de ella sólo tendrá componente tangencial y su residuo sobre la cara no se considera. En el caso de caras con condición de contorno Neumann, es decir, condición de pared eléctrica para la formulación en campo magnético, o condición de pared magnética para la formulación en campo eléctrico, el MEF no impone ninguna condición sobre ellas, por lo que el residuo se puede calcular como la desviación de la componente tangencial a la cara de la variable dual respecto al valor nulo, como indica (5.154).

El cálculo de este residuo se simplifica notablemente al ser el rotacional de la solución constante en cada elemento, lo que implica que el residuo también lo será en toda la cara.

$$\nabla \times \vec{u}^e = \frac{2}{\Delta_\zeta^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 l_i \bar{u}_i (c_{i+} b_{i-} - c_{i-} b_{i+}) \\ \sum_{i=1}^6 l_i \bar{u}_i (a_{i+} c_{i-} - a_{i-} c_{i+}) \\ \sum_{i=1}^6 l_i \bar{u}_i (b_{i+} a_{i-} - b_{i-} a_{i+}) \end{bmatrix} \quad (5.171)$$

$$\vec{r}_s^k \Big|_{\text{int}} = \hat{n} \times (\mathbf{v}_1^{-1} \nabla \times \vec{u}_1 - \mathbf{v}_2^{-1} \nabla \times \vec{u}_2) = \vec{C}_{k,1} \quad (5.172)$$

$$\vec{r}_s^k \Big|_{\text{Neumann}} = \hat{n} \times \mathbf{v}_e^{-1} \nabla \times \vec{u}^e = \vec{C}_{k,2} \quad (5.173)$$

donde el criterio de signos en los subíndices es el definido en A4.6.

La integral del segundo término de (5.151) es el producto del área de la cara por el módulo al cuadrado del residuo:

$$\sum_{\Gamma_k \in \Gamma_{\text{int,Neu}}^e} \iint_{\Gamma_k} \vec{r}_s^{k*} \cdot \vec{r}_s^k d\Gamma = \sum_{k \in \Gamma_{\text{int}}} |\vec{C}_{k,1}|^2 A_k + \sum_{k \in \Gamma_{\text{Neu}}} |\vec{C}_{k,2}|^2 A_k \quad (5.174)$$

5.3.2. Indicador Zienkiewicz-Zhu (ZZ) basado en el Rotacional de la Solución

La generalización volumétrica de este indicador es inmediata. En este caso, se han de tratar parches volumétricos, formados por aquellos elementos que comparten el nodo central del parche, como indica la figura 5.29. Como ya se ha comentado, la interpolación utilizada en los elementos tetraédricos de arista implica que el valor del rotacional de la solución sea constante en cada elemento. A partir de (A4.67-A4.73) se obtienen las siguientes expresiones para las tres componentes del rotacional:

$$\sigma_{hx}^e = \frac{2}{(\Delta_\zeta)^2} \sum_{i=1}^6 l_i^e (c_{i+}^e b_{i-}^e - c_{i-}^e b_{i+}^e) \bar{u}_{hi}^e \quad (5.175)$$

$$\sigma_{hz}^e = \frac{2}{(\Delta_\zeta)^2} \sum_{i=1}^6 l_i^e (a_{i+}^e c_{i-}^e - a_{i-}^e c_{i+}^e) \bar{u}_{hi}^e \quad (5.176)$$

$$\sigma_{hz}^e = \frac{2}{(\Delta_\zeta)^2} \sum_{i=1}^6 l_i^e (b_{i+}^e a_{i-}^e - b_{i-}^e a_{i+}^e) \bar{u}_{hi}^e \quad (5.177)$$

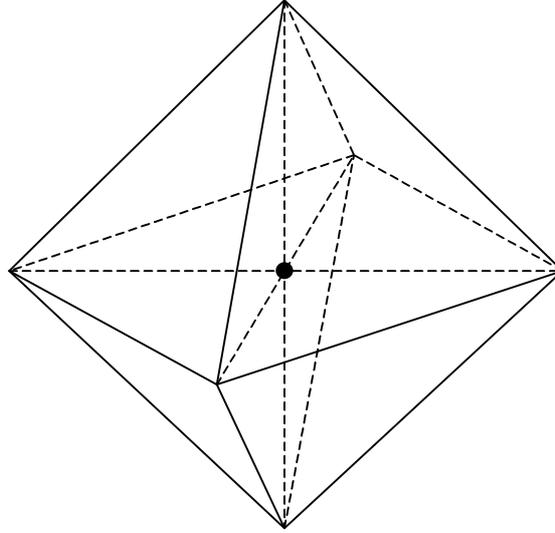


Figura 5.29. Parche volumétrico asociado a un nodo

Un mismo nodo de la malla del problema puede presentar tantos valores en cada una de las tres componentes de $\bar{\sigma}_h$ como elementos a los que pertenezca, lo que implica una discontinuidad a lo largo del dominio del problema.

A partir de los n_j valores de $\bar{\sigma}_h^e$, tantos como elementos compartan el nodo j , se puede obtener el valor recuperado en el parche para cada una de las componentes, que será una función lineal tridimensional:

$$\sigma_p = c_0^p + c_1^p x + c_2^p y + c_3^p z = \bar{P} \cdot \bar{c}^{pT} \quad (5.178)$$

con:

$$\bar{P}^T = (1 \quad x \quad y \quad z) \quad (5.179)$$

$$\bar{c}^{pT} = (c_0^p \quad c_1^p \quad c_2^p \quad c_3^p) \quad (5.180)$$

El vector \bar{c}^p se obtiene mediante el ajuste por mínimos cuadrados de los valores en los puntos de muestreo (media de las posiciones de los vértices de cada tetraedro) de cada una de las componentes del rotacional, a la función lineal σ_p . Es decir, la función

$$F^p(\bar{c}^p) = \sum_{i=1}^{n_j} (\sigma_{hi}(x_i, y_i) - \sigma_{pi}(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^{n_j} (\sigma_{hi}(x_i, y_i) - \bar{P}(x_i, y_i) \bar{c}^{pT})^2 \quad (5.181)$$

debe ser mínima, lo que implica, derivando F^p respecto a \bar{c}^p e igualando a cero, que

$$\sum_{i=1}^{n_j} \bar{P}(x_i, y_i) \bar{P}^T(x_i, y_i) \bar{c}^p = \sum_{i=1}^{n_j} \bar{P}(x_i, y_i) \sigma_{hi}(x_i, y_i) \quad (5.182)$$

La solución de este sistema es

$$\bar{c}^p = A^{-1} \bar{b} \quad (5.183)$$

donde:

$$A = \sum_{i=1}^{n_j} \bar{P}(x_i, y_i) \bar{P}^T(x_i, y_i) \quad (5.184)$$

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{n_j} \bar{P}(x_i, y_i) \sigma_{hi}(x_i, y_i) \quad (5.185)$$

Al igual que en el caso bidimensional, la matriz A es común a las tres componentes del rotacional y, por tanto, sólo es necesario invertirla, si se quiere realizar esta operación directamente, una vez por nodo o parche. La resolución del sistema (5.182) requiere que el parche contenga, al menos, 4 elementos, pues son necesarios 4 valores de σ_h para obtener σ_p . En los nodos interiores de la malla está garantizado este hecho. Sin embargo, en su contorno pueden existir nodos que pertenezcan únicamente a 1, 2 ó 3 elementos. En tales casos, como se hizo en el caso bidimensional, se asigna a tales nodos el valor extrapolado a partir de la función σ_p de un parche correspondiente a un nodo vecino.

Una vez conocida la expresión de σ_p en el parche, se puede obtener su valor en el nodo central del parche. Repitiendo esta operación con cada nodo, se obtiene el valor *suavizado* del rotacional de la solución en todos los nodos de la malla. El valor *recuperado* σ_r^e , que se utiliza como solución más exacta en cada elemento, se obtiene mediante la interpolación lineal del valor de σ_p en cada nodo del tetraedro. Es decir, para una componente dada:

$$\sigma_r^e = \sum_{i=1}^4 \sigma_{pi}^e \zeta_i^e \quad (5.186)$$

Dado que los valores σ_{pi} son únicos en cada nodo i , el rotacional recuperado es continuo a lo largo de todo el dominio del problema, mientras que el rotacional original es discontinuo.

Una vez obtenido $\bar{\sigma}_r^e$, el indicador de error se calcula como la norma L_2 de \bar{e} :

$$\begin{aligned} \|\bar{e}^e\|^2 &= \iiint_{\Omega^e} \bar{e}^{e*} \cdot \bar{e}^e d\Omega = \\ &= \iiint_{\Omega^e} |\sigma_{rx}^e - \sigma_{hx}^e|^2 d\Omega + \iiint_{\Omega^e} |\sigma_{ry}^e - \sigma_{hy}^e|^2 d\Omega + \iiint_{\Omega^e} |\sigma_{rz}^e - \sigma_{hz}^e|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (5.187)$$

Las integrales de (5.187) presentan integrandos polinómicos de segundo grado en ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 y ζ_4 , lo que permite una integración analítica que, para cada una de las componentes será:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^e} e^{e*}(x, y, z) \cdot e^e(x, y, z) d\Omega &= \iiint_{\Omega^e} e^{e*}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \cdot e^e(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) |J| d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = \\ &= |\Delta_\zeta| \iiint_{\Omega^e} |e^e(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)|^2 d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = |\Delta_\zeta| \left(\frac{K_1}{60} - \frac{K_2}{12} + \frac{K_3}{6} \right) \end{aligned} \quad (5.188)$$

con:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \sum_{i=1}^4 |\sigma_{pi}^e|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \operatorname{Re}(\sigma_{pi}^e) \operatorname{Re}(\sigma_{pj}^e) + \operatorname{Im}(\sigma_{pi}^e) \operatorname{Im}(\sigma_{pj}^e) \\
K_2 &= \sum_{i=1}^4 \operatorname{Re}(\sigma_{pi}^e) \operatorname{Re}(\sigma_h^e) + \operatorname{Im}(\sigma_{pi}^e) \operatorname{Im}(\sigma_h^e) \\
K_3 &= |\sigma_h^e|^2
\end{aligned} \tag{5.189}$$

En este caso se puede presentar el mismo problema comentado en el caso bidimensional cuando en el interior de la malla existen aristas o caras con condición de contorno Dirichlet que pueden aparecer como aristas o caras radiales en los parches de recuperación del rotacional. Estas situaciones se resuelven de forma análoga a la descrita en el punto 5.1.3.

5.3.3. Indicador de Error en Cara por Continuidad de Flujo

La versión volumétrica de este indicador mide la violación de la continuidad de las densidades de flujo (eléctrico o magnético) (ecuaciones de Maxwell de divergencia en ausencia de cargas) en las caras de la malla:

$$e = \|\hat{n} \cdot (\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\| = \|\hat{n} \cdot (\vartheta_1 \bar{u}_1 - \vartheta_2 \bar{u}_2)\| \tag{5.190}$$

donde \hat{n} es el vector normal a la cara y los subíndices hacen referencia a los dos elementos que comparten la cara, tal como muestra la figura 5.30.

Las funciones de interpolación utilizadas garantizan la continuidad de la componente tangencial de la solución \bar{u} , pero la continuidad de la componente normal de ésta en la interfaz de dos elementos con el mismo material no está garantizada. Por tanto, en general, tampoco existirá continuidad en las densidades de flujo de la solución.

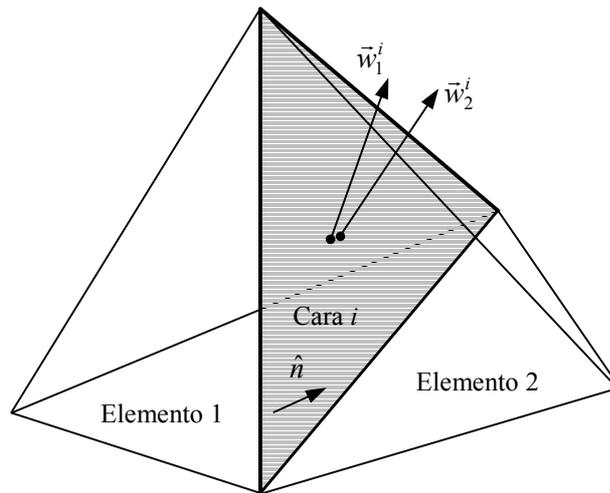


Figura 5.30. Discontinuidad de flujos en una cara interior del dominio

De la experiencia obtenida con el indicador bidimensional cabe esperar que los mejores resultados se obtengan si se define el indicador mediante la integración en la cara y la ponderación por el área de ésta:

$$\|e^i\|^2 = A_i \iint_{\Gamma_i} |e^i(x, y, z)|^2 d\Gamma \quad (5.191)$$

Las expresiones utilizadas para el cálculo de (5.190) se encuentran en A4.6. El cálculo de la integral (5.191) se realiza numéricamente.

El flujo sobre el que se calcula el error puede ser indistintamente el eléctrico o el magnético, independientemente de la formulación utilizada, aunque lo más cómodo es realizar este cálculo sobre el flujo correspondiente al campo obtenido, es decir, \vec{D} para una formulación en campo eléctrico y \vec{B} si la formulación es en campo magnético. Cualquiera que sea la versión utilizada, el indicador de error global en el problema se obtiene como suma de los errores en cada cara:

$$\|e_T\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_i} \|e^i\|^2} \quad (5.192)$$

donde N_i es el número de caras interiores del problema.

5.3.4. Estrategia de Refinamiento

En el apartado 5.2 se ha presentado una visión general de las distintas técnicas de detección de zonas de error y refinamiento en problemas bidimensionales. Todas ellas son extrapolables al caso volumétrico.

Como en el caso que nos ocupa se dispone de indicadores de error, y no de estimadores, la técnica más idónea para la detección de zonas que deben ser enriquecidas es la comparación del error elemental (o de cara, en el caso del estimador de continuidad de flujo) con un valor umbral, que puede ser, por ejemplo, una fracción del error máximo en la malla.

Tanto si el refinamiento se realiza directamente sobre elementos como si se hace sobre caras, se pueden definir las distintas estrategias descritas en 5.2:

- Refinamiento simple.
- Refinamiento múltiple.
- Refinamiento adelante-atrás.

Respecto al tipo de refinamiento utilizado (h , p o hp) y las características de conformidad de las mallas refinadas, en el caso volumétrico caben las mismas consideraciones comentadas en 5.2.

Dentro del refinamiento tipo h conforme, se pueden desarrollar técnicas de inserción de nodos internos que, como se puede apreciar en la figura 5.31, producen elementos muy irregulares, lo que se traduce en un aumento del error asociado al elemento. Es también posible implementar técnicas similares a las descritas en el caso bidimensional, como la división por la arista más larga [Jon97], [Mer98] o la regular, que garanticen unas cotas mínimas de regularidad, como muestran las figuras 5.32. Sin embargo, el mantenimiento de estas premisas en el caso volumétrico presenta una enorme casuística que hace muy complejo este tipo de refinamiento y aconseja la utilización de métodos generales de inserción de nodos y reestructuración de la malla como el método de Delaunay-Voronoi [Gol92], [Rai94].

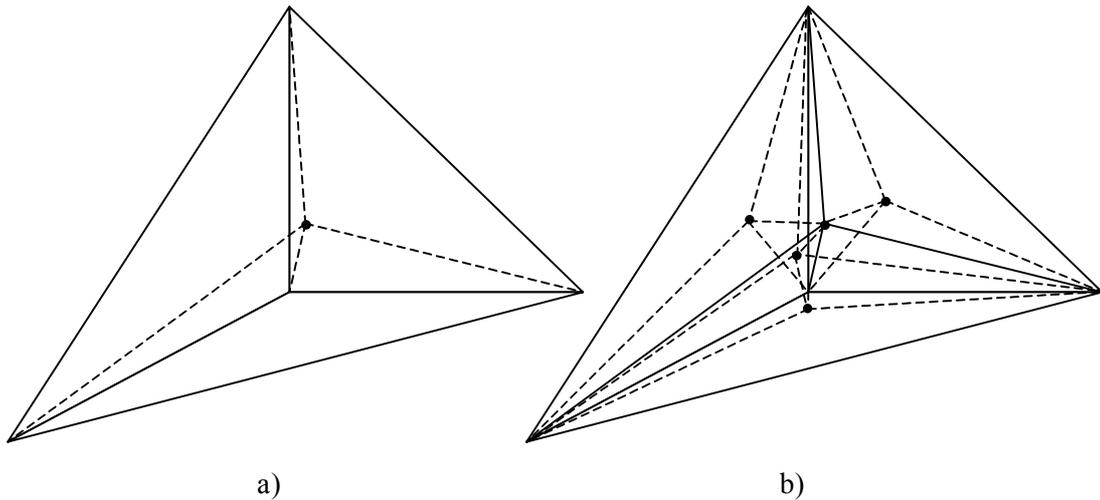


Figura 5.31. Refinamiento por descomposición del elemento en 4 tetraedros: a) primer refinamiento, b) segundo refinamiento

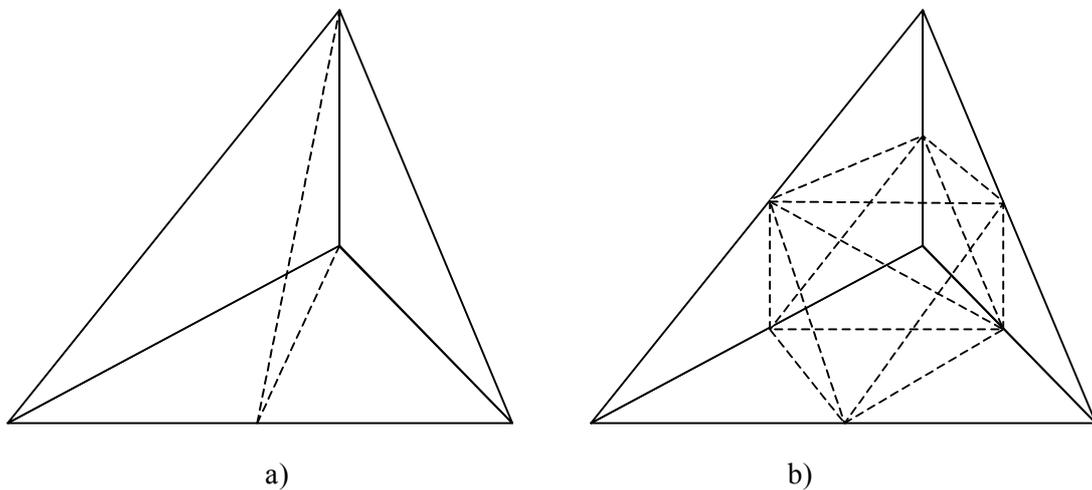


Figura 5.32 Descomposición del elemento en 2 tetraedros (a) y en 8 tetraedros (b)

5.4. Resultados

En este apartado se representan los resultados obtenidos con los indicadores de error y técnicas de refinamiento descritos en los apartados 5.1 y 5.2. Recapitulando, se han desarrollado 3 indicadores de error que, a su vez, pueden presentar distintas versiones:

- Indicador residual: su comportamiento depende de los valores escogidos para los factores de ponderación en (5.7).
- Indicador ZZ basado en el rotacional de la solución: como solución se puede tomar la solución en $z=0$ \bar{u}_0 o la real \bar{u} dependiente de z .
- Indicador basado en la continuidad de flujo en las aristas: la medida del error en las aristas puede ser el error en el punto medio, la integral del error en toda la arista, o ésta ponderada por el tamaño de la arista.

Asimismo, se han desarrollado dos técnicas de refinamiento en triángulos (1:2 y 1:4).

Se analizan las siguientes estructuras de guiado de ondas:

- Guía homogénea en forma de L.
- Línea microstrip encapsulada.
- Línea finline unilateral encapsulada.
- Línea coplanar encapsulada con sustrato anisótropo y pérdidas.

El estudio más completo se presenta en la guía homogénea en forma de L. Allí se comparan las distintas versiones de los tres indicadores y las dos estrategias de refinamiento triangular. Las conclusiones extraídas en este ejemplo son extrapolables a los demás. Por esta razón, en los siguientes se restringen los resultados presentados a los indicadores que mejores resultados proporcionan y al refinamiento 1:4.

5.4.1. Metodología

La figura 5.33 muestra el procedimiento con el que se han obtenido los resultados que en este capítulo se presentan.

La definición de la geometría y propiedades de la estructura analizada se introducen al programa generador de mallas, desarrollado en paralelo a esta tesis y basado en los métodos de generación de malla descritos en los capítulos 2, 3 y 4, a través de su interfaz gráfica, y éste genera la malla inicial. En el apéndice 5 se describe brevemente este programa.

El algoritmo adaptativo requiere esta malla inicial, la especificación del modo que se quiere calcular, el tipo de resolución (en campo eléctrico o en campo magnético) y el número de onda o frecuencia de trabajo. A partir de la malla inicial, el proceso adaptativo resuelve (como se describe en A3.1), estima el error y refina iterativamente hasta que se agotan los recursos del sistema. Estos recursos vienen limitados por la memoria de almacenamiento (256 Mb) y la utilización del software disponible, basado en métodos poco eficientes de resolución de autosistemas generalizados, que no aprovechan la dispersión que presentan las matrices del autosistema. Este límite se alcanza entre las 1000 y las 1500 incógnitas del problema (aproximadamente entre 500 y 800 aristas). Esta ineficiencia también se constata en los tiempos de resolución del problema, pues, mientras la fase adaptativa, esto es, estimación del error y refinamiento, en todos los ejemplos mostrados en los siguientes apartados, es prácticamente instantánea (fracciones de segundo) y crece linealmente con el número de aristas, el tiempo de planteamiento del problema y resolución del autosistema es mucho más elevado y presenta un crecimiento casi cúbico (se ha calculado un exponente de 2.8) con el número de aristas, como se comprueba en la figura 5.34, donde se representan los tiempos de resolución sucesivos en un proceso adaptativo obtenidos en una estación de trabajo HP9000 C-160 de la serie 700.

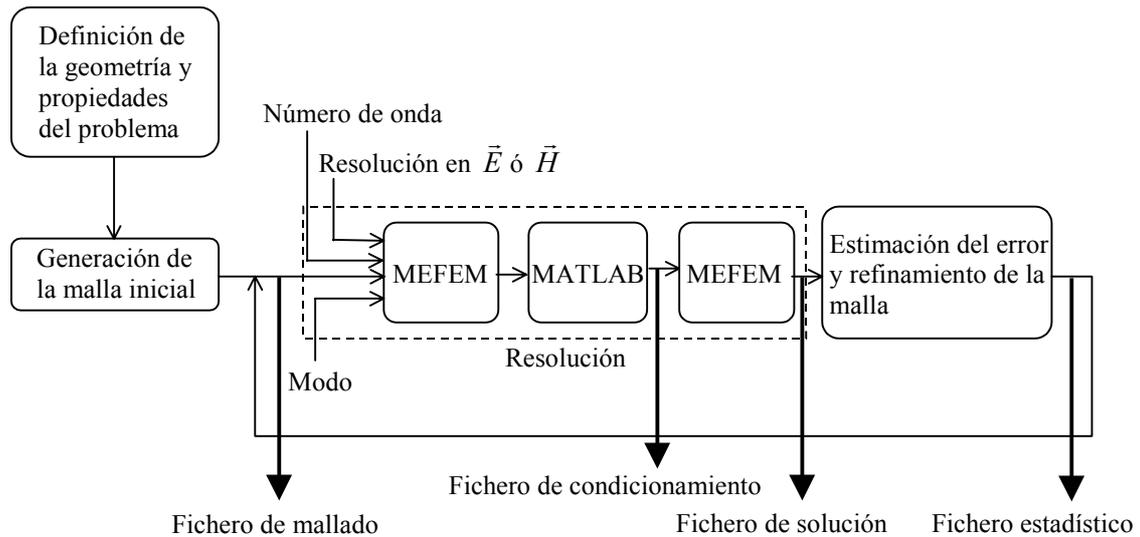


Figura 5.33. Procedimiento de obtención de resultados

Como resultado final de la aplicación del procedimiento de adaptación, se obtienen n ficheros de mallado que describen los n refinamientos realizados, a partir de los cuales se pueden visualizar, con el programa de generación de mallas, las distintas mallas generadas; n ficheros de resolución con el valor de los distintos autovalores y autovectores, n ficheros estadísticos, donde se almacenan los errores elementales (o de arista), el error total, el error máximo y el error medio, y un fichero donde se guarda el número de condición de la matriz B del autosistema $(A + \lambda B)x = 0$ en cada discretización. El número de condición de una matriz se define como el cociente entre el mayor elemento y el menor de la matriz diagonal que se obtiene mediante la *descomposición de valores singulares* [Pre96].

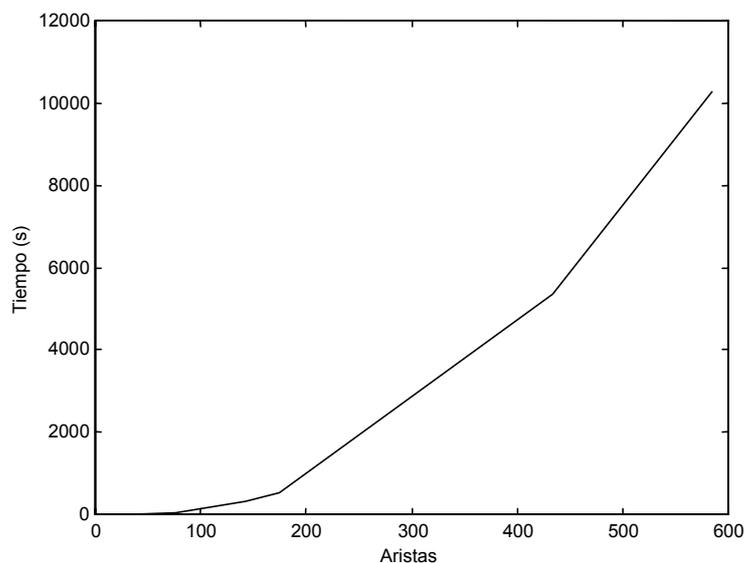


Figura 5.34. Tiempo de resolución del MEF en función del número de aristas

5.4.2. Guía Homogénea en Forma de L

Esta es una estructura sencilla y muy utilizada en la validación de métodos adaptativos, dado que presenta una singularidad de campo en el ángulo interior de la L. En la figura 5.35 se muestra esta estructura y la distribución del campo eléctrico transversal para su primer modo (TE), obtenida con una formulación en campo eléctrico. En éste y en todos los posteriores diagramas de flechas, el valor máximo del campo está normalizado a 1. La 5.36 muestra la distribución de las componentes transversal y axial del campo magnético para ese mismo modo, en este caso obtenida a partir de una formulación en campo magnético. Todos los resultados presentados a continuación han sido obtenidos para $k_0 = 7.87a$, con una formulación en campo eléctrico.

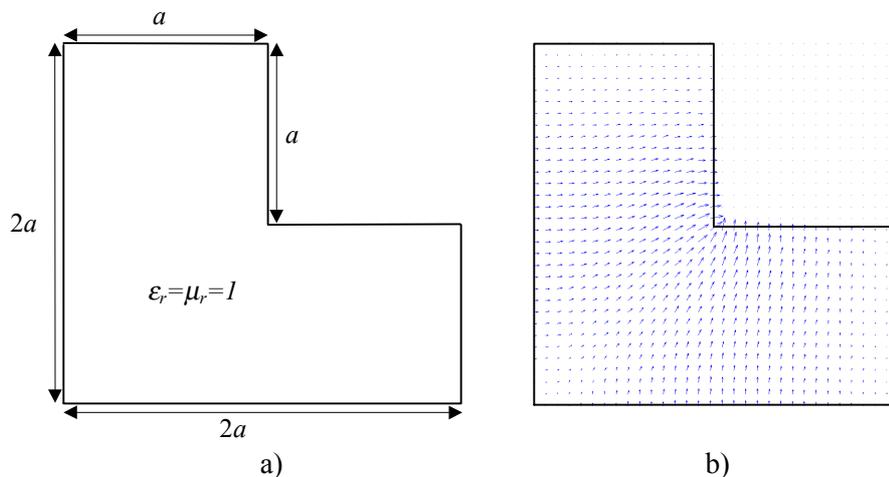


Figura 5.35. Guía homogénea en L: a) estructura, b) distribución de la componente transversal del campo eléctrico en el primer modo

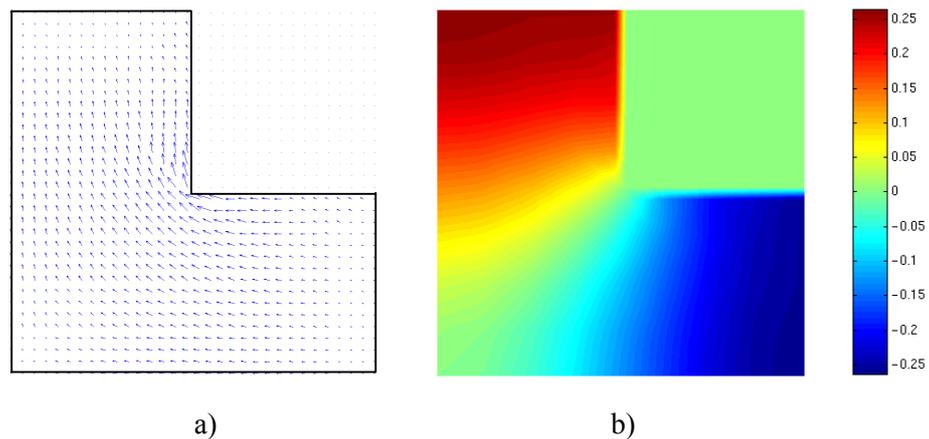


Figura 5.36. Distribución del campo magnético en el primer modo: a) componente transversal, b) componente axial

La bondad del procedimiento adaptativo se puede establecer comparando la convergencia obtenida en el autovalor al aumentar el número de incógnitas, con la que se consigue mediante el MEF clásico. Para obtener la convergencia de este último se resolvió el mismo problema con distintas densidades de malla. Las mallas utilizadas se muestran en la figura 5.37. La primera de ellas fue utilizada también como malla inicial del proceso adaptativo.

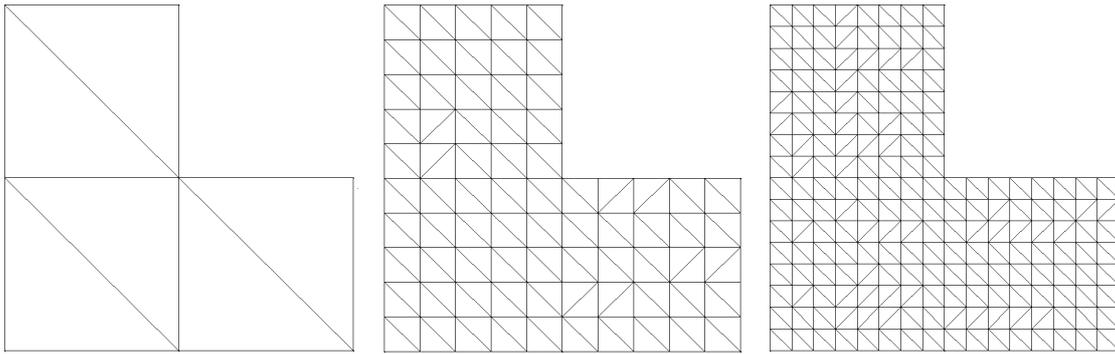


Figura 5.37. Mallas uniformes en la guía homogénea en L

5.4.2.1. Indicador Residual

En el análisis de este indicador se estudia el efecto de los coeficientes f_s y f_l , que ponderan el residuo interior y el del contorno del elemento. Al tratarse de un indicador de error y no un estimador, su magnitud no es significativa y, por lo tanto, tampoco lo es la de estos coeficientes. Sí lo es la relación entre ellos, que es la que marca el peso de cada residuo en el indicador de error; por esta razón se puede tomar sin pérdida de generalidad $f_s + f_l = 1$. Se puede estudiar el efecto de estos coeficientes sobre un indicador analizando los resultados obtenidos en estas tres situaciones:

- $f_s = 1, f_l = 0$
- $f_s = 0, f_l = 1$
- $f_s = f_l = 0.5$

Las secuencias de mallas obtenidas, tanto con refinamiento 1:2 como con refinamiento 1:4, se presentan en las figuras 5.38-5.39, 5.40-5.41 y 5.42-5.43, para $f_s = 1, f_l = 0$, $f_s = 0, f_l = 1$ y $f_s = f_l = 0.5$, respectivamente. La evolución de estas mallas proporciona una primera información sobre la “habilidad” del indicador en la detección de las zonas de mayor error. Se puede apreciar en estas figuras que el residuo interior, al menos en el elemento lineal que nos ocupa, ofrece menos información sobre el error cometido que el residuo de contorno. Se puede decir que en el residuo interior prima más la magnitud de la solución, mientras que el residuo de contorno detecta mejor las variaciones abruptas del campo.

En la figura 5.44 se muestra la evolución de la estimación de error local a lo largo del proceso adaptativo para una igual ponderación de los dos residuos y un refinamiento 1:4. Esta información se resume en la tabla de parámetros estadísticos 5.1. Como cabía esperar, el error total, el error medio y el error máximo, así como la desviación típica del error elemental decaen rápidamente a lo largo del proceso de adaptación.

Para conocer la disminución del error real, se debe comparar el autovalor obtenido en cada iteración con uno que se supondrá exacto. En este caso se obtuvo este autovalor de referencia mediante el programa comercial MAFIA, con una discretización gradual del dominio de 100000 nodos, con una mayor densidad en la zona de singularidad de campo. La evolución del error relativo cometido respecto a este valor con el indicador residual (con los tres tipos de ponderaciones anteriores) y los dos tipos de refinamiento, en comparación con la obtenida con el MEF clásico o uniforme (mallas de la figura 5.37), se presenta en las figuras 5.45-5.49. En las figuras 5.45-5.47 se compara la convergencia obtenida con los dos tipos de refinamiento, y en las 5.48-5.49 esta comparación se hace entre las distintas situaciones de ponderación de los residuos. Respecto al tipo de refinamiento, los resultados indican que la convergencia en ambos es muy similar; sin embargo, hay que tener presente que el refinamiento 1:2 requiere 12

resoluciones del problema para obtener un error similar al que se consigue con 6 al utilizar el refinamiento 1:4.

La comparativa entre las distintas situaciones de ponderación de residuos indica que, por sí solo, el residuo interior no detecta correctamente la singularidad, lo que se traduce en una convergencia pobre. La convergencia obtenida con el residuo de contorno y con una ponderación alícuota es mucho mejor y casi idéntica en ambos casos.

Por último, se ha considerado interesante analizar el condicionamiento de la matriz B del autosistema, $(A + \lambda B)x = 0$, pues conforme el proceso de adaptación avanza, la diferencia de tamaño de los elementos de la malla aumenta, lo que puede repercutir en un error en la solución que, en este caso, no cabe achacar a la discretización. La figura 5.50 evidencia que la evolución del condicionamiento es similar para los dos tipos de refinamiento.

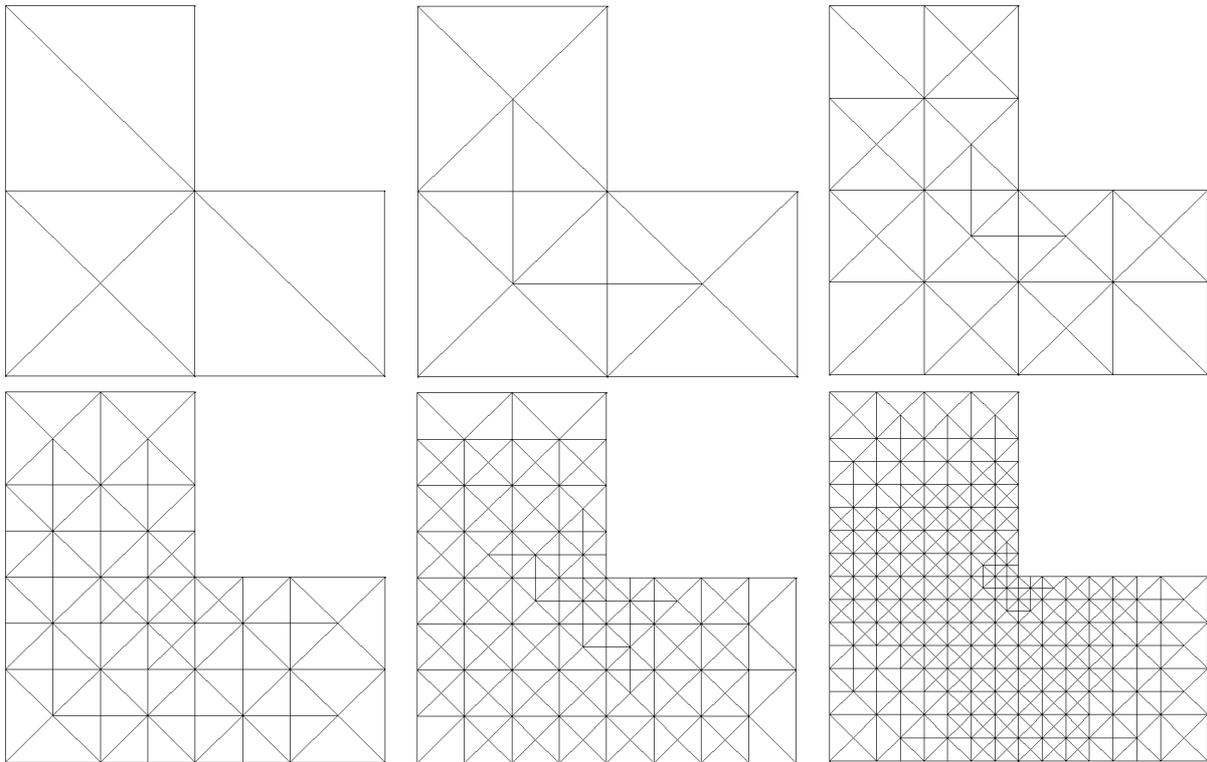


Figura 5.38. Mallas adaptadas (1^a , 3^a , 5^a , 7^a , 9^a y 12^a) con el indicador residual ($f_s=1, f_i=0$) y refinamiento 1:2

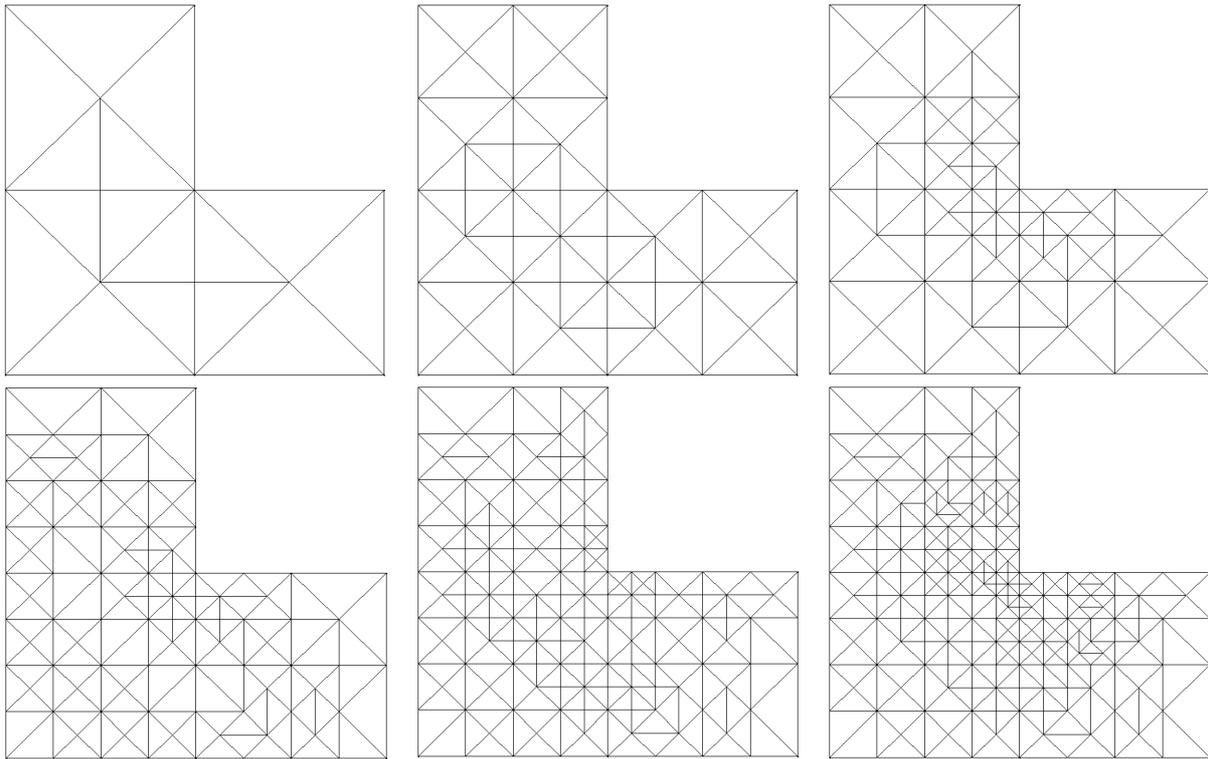


Figura 5.39. Mallas adaptadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 5^a y 6^a) con el indicador residual ($f_s=1, f_i=0$) y refinamiento 1:4

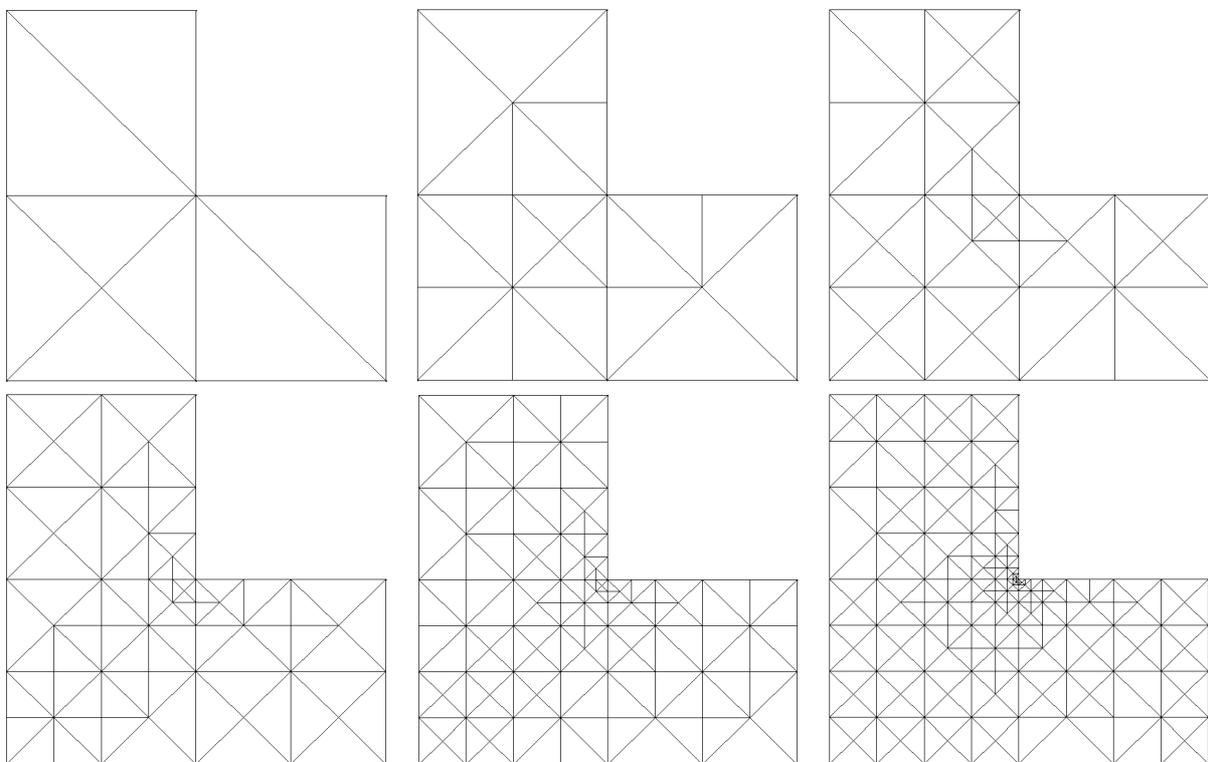


Figura 5.40. Mallas adaptadas (1^a , 3^a , 5^a , 7^a , 9^a y 12^a) con el indicador residual ($f_s=0, f_i=1$) y refinamiento 1:2

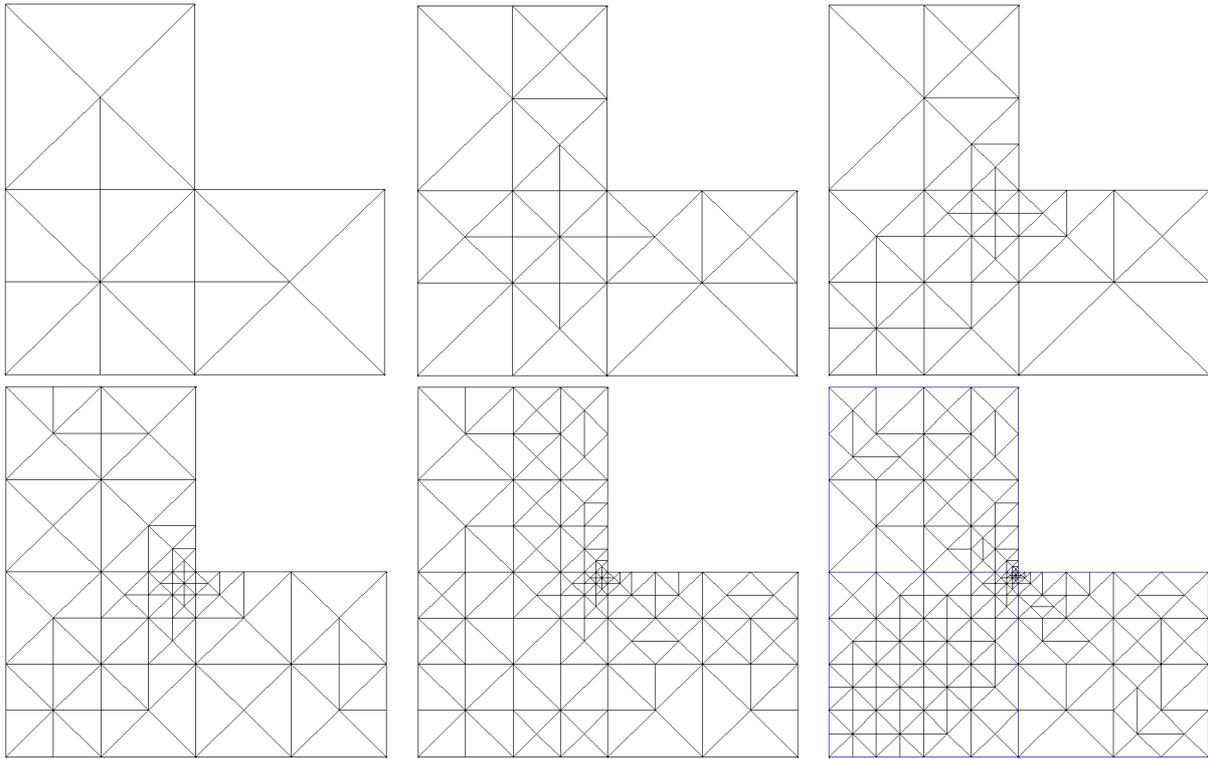


Figura 5.41. Mallas adaptadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 5^a y 6^a) con el indicador residual ($f_s=0, f_f=1$) y refinamiento 1:4

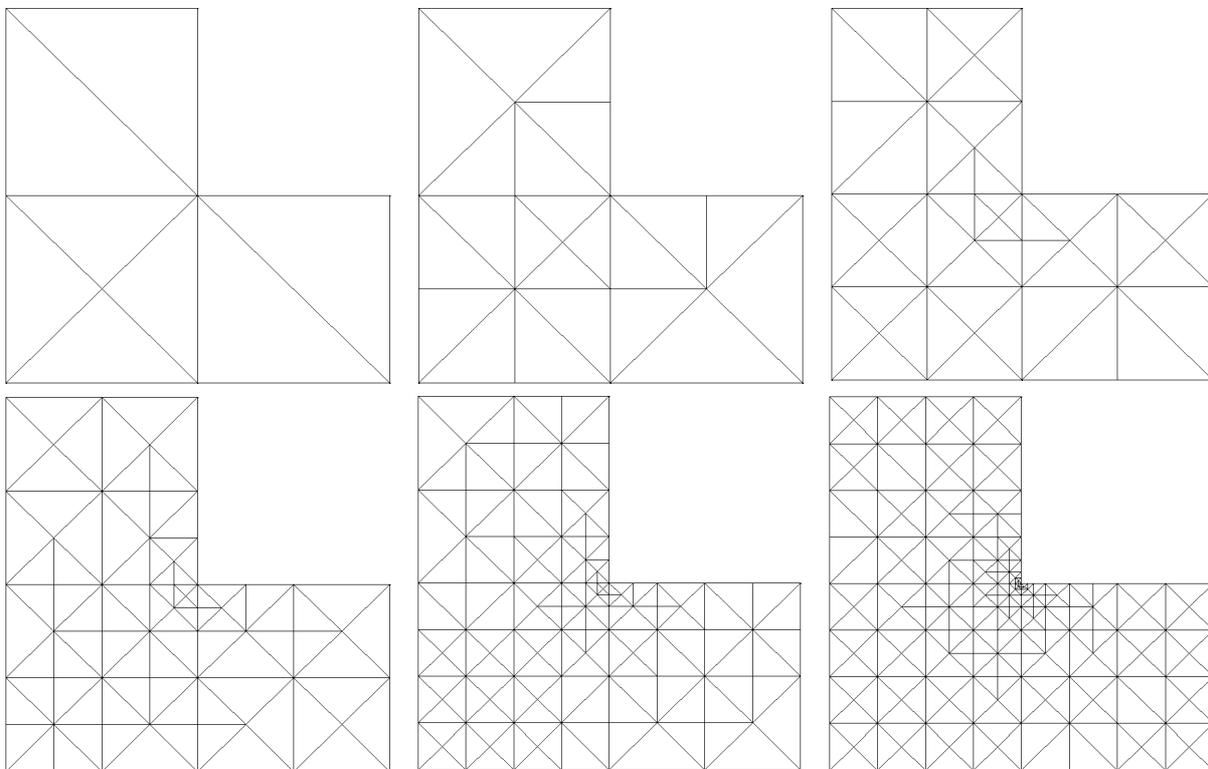


Figura 5.42. Mallas adaptadas (1^a , 3^a , 5^a , 7^a , 9^a y 12^a) con el indicador residual ($f_s=f_f=0.5$) y refinamiento 1:2

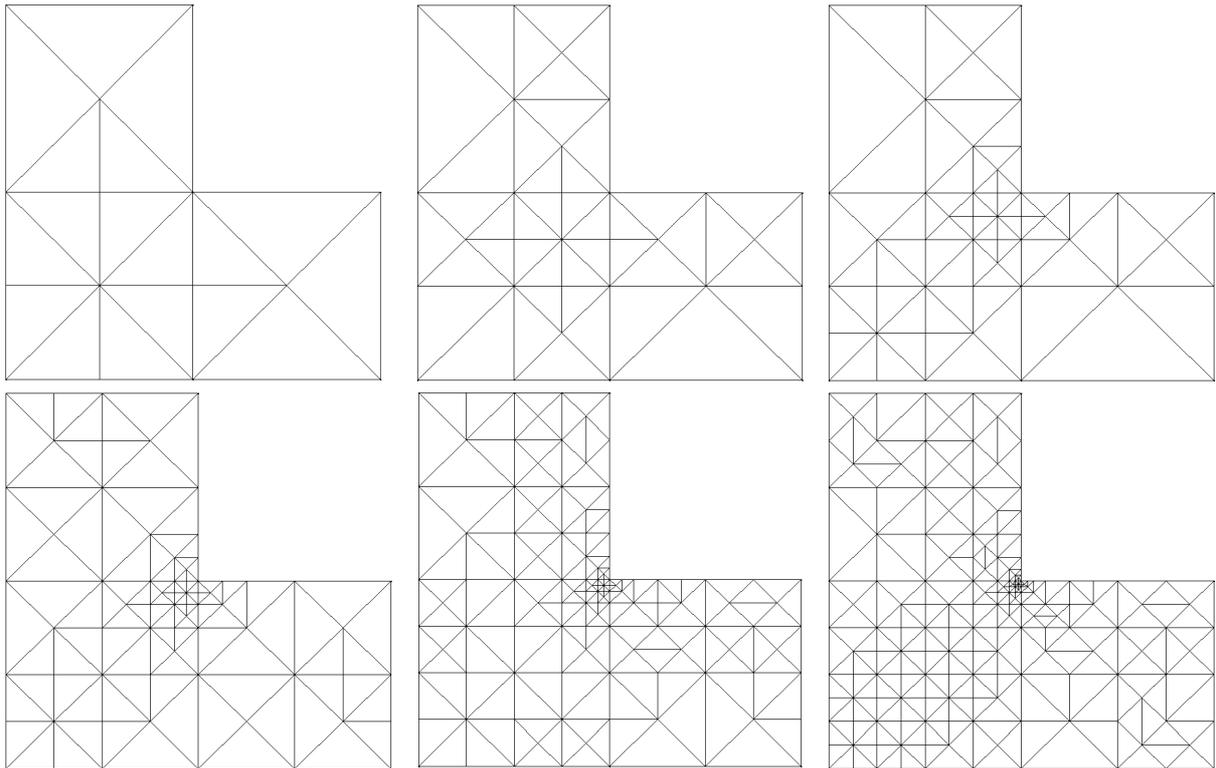


Figura 5.43. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a y 6^a) con el indicador residual ($f_s=f_{\bar{r}}=0.5$) y refinamiento 1:4

Tabla 5.1. Parámetros estadísticos del error en las mallas de la figura 5.43

Malla	$\ e\ _{total}^2$	$\ e\ _{medio}^2$	$\ e\ _{m\acute{a}x}^2$	Desviación típica
1	74.4	12.4	28.2	9.14
2	14	0.78	1.69	0.403
3	4.25	0.0965	0.402	0.09
4	1.81	0.0252	0.109	0.0217
5	0.856	7.93e-3	0.0321	6.86e-3
6	0.324	1.72e-3	7.59e-3	1.65e-3
7	0.128	4.31e-4	1.92e-3	3.3e-4
8	0.0541	1.23e-4	4.52e-4	8.98e-5

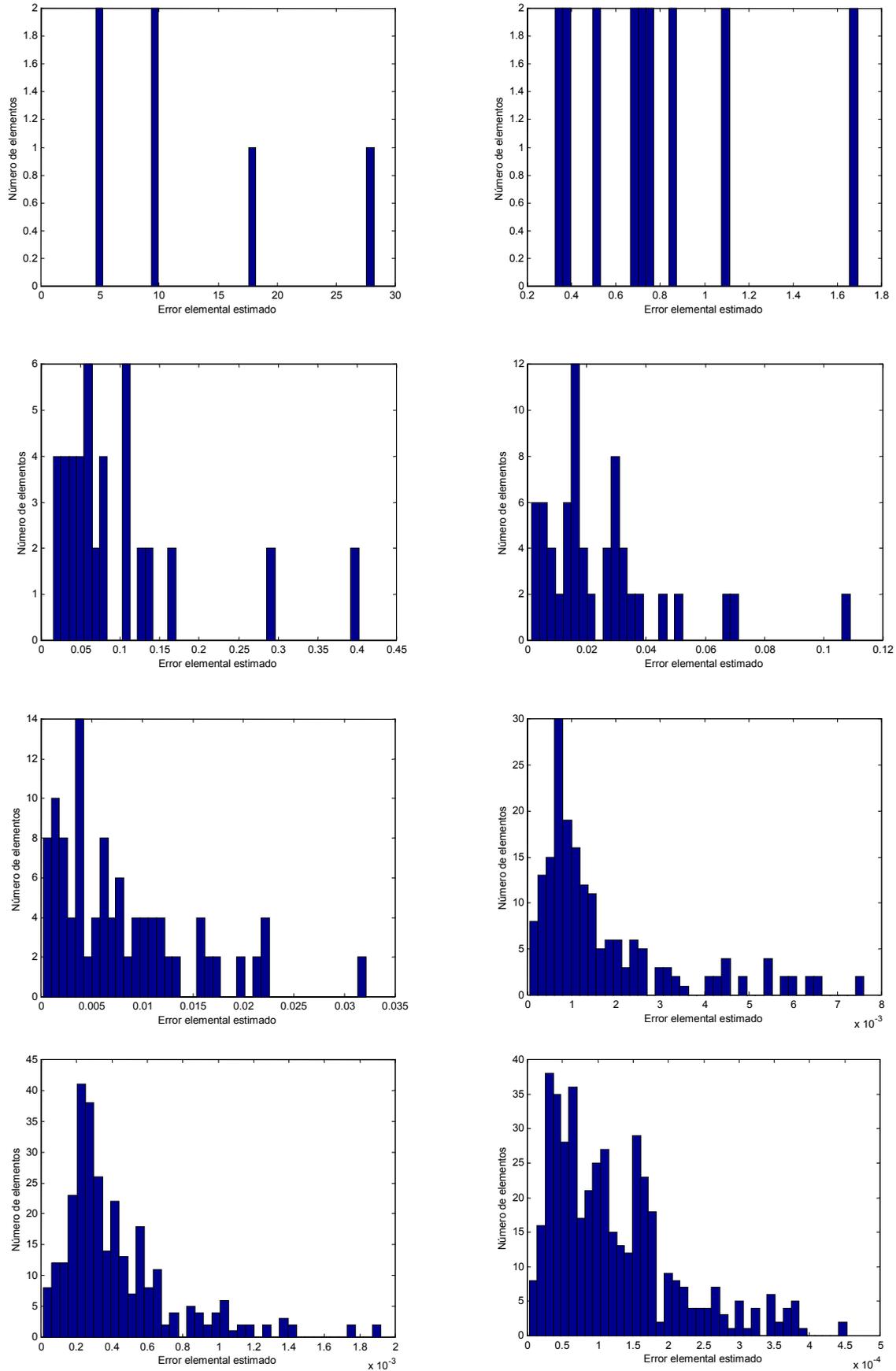


Figura 5.44. Evolución del histograma del indicador de error residual ($f_s=f_l=0.5$) y refinamiento 1:4

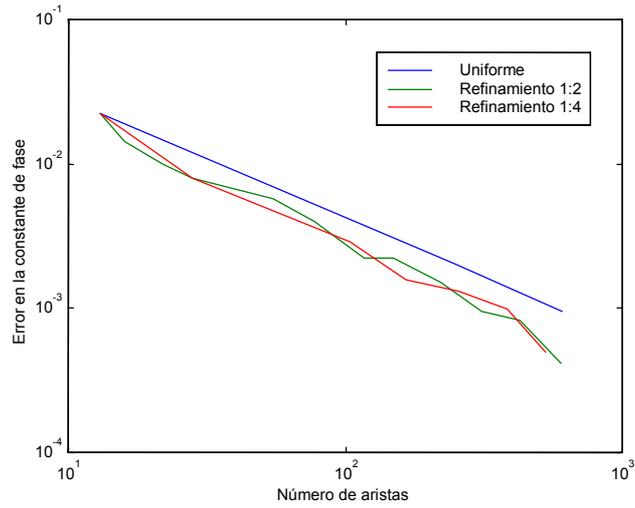


Figura 5.45. Convergencia del indicador residual ($f_s=1, f_t=0$)

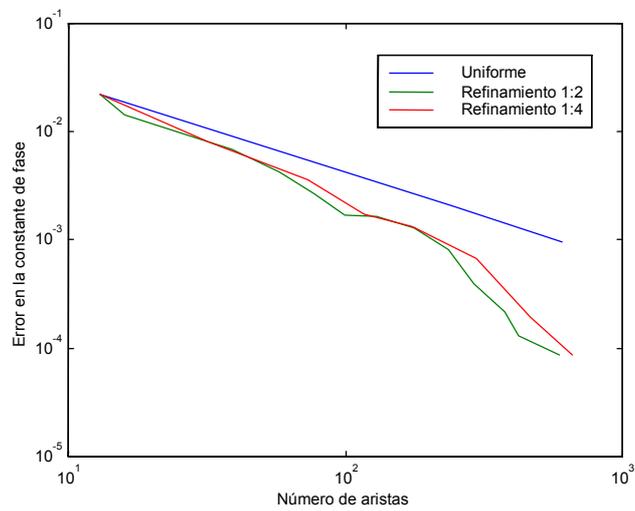


Figura 5.46. Convergencia del indicador residual ($f_s=0, f_t=1$)

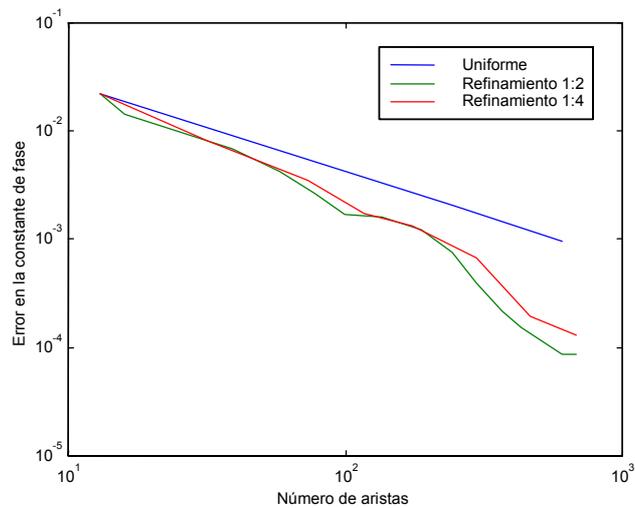


Figura 5.47. Convergencia del indicador residual ($f_s=f_t=0.5$)

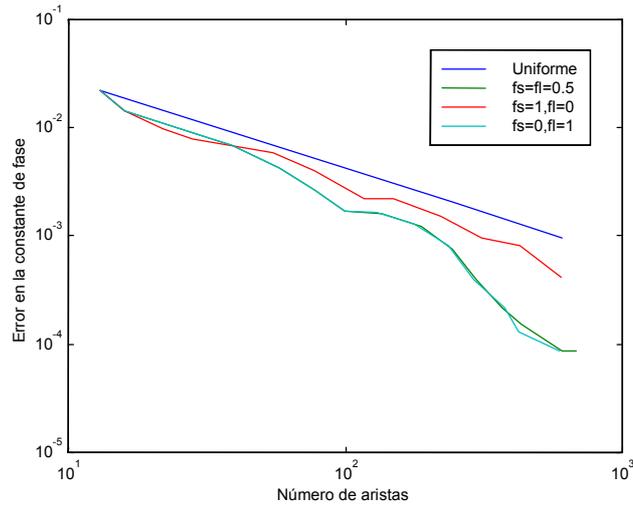


Figura 5.48. Convergencia del indicador residual con refinamiento 1:2

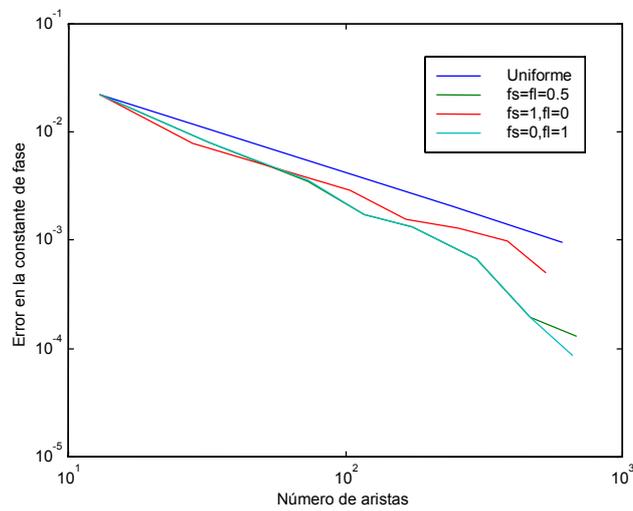
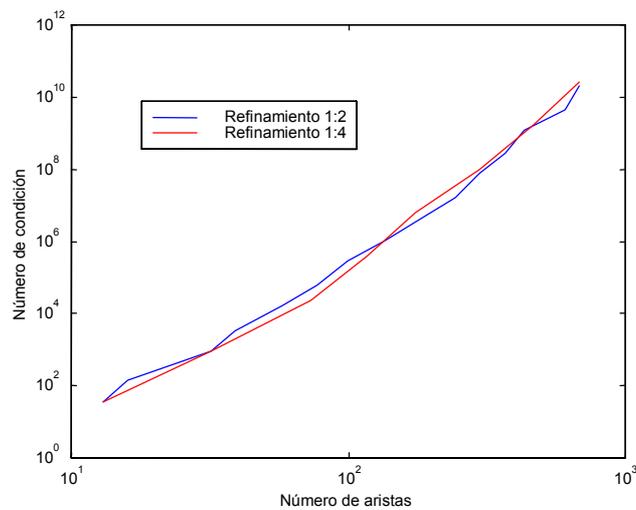


Figura 5.49. Convergencia del indicador residual con refinamiento 1:4

Figura 5.50. Evolución del condicionamiento de la matriz B del autosistema $(A + \lambda B)x = 0$

5.4.2.2. Indicador ZZ

Un estudio similar al realizado con el indicador residual se puede llevar a cabo con las dos versiones del indicador ZZ presentadas en los puntos 5.1.2 y 5.1.3: la basada en la solución en $z = 0$ del MEF (\vec{u}_0), y la basada en la solución completa con variación en z (\vec{u}). Las figuras 5.51-5.54 muestran las mallas generadas con estas dos versiones del indicador con los dos tipos de refinamiento. En ellas se constata que cuando no se tiene en cuenta la dependencia con la coordenada axial, el indicador no detecta correctamente las zonas de variación abrupta, como sucedía con el residuo interior. De hecho, en ambos casos las mallas finales del proceso presentan una distribución de las incógnitas similar.

La estimación del error a partir del rotacional de la solución completa se realiza correctamente. El hecho de que en algunos nodos del contorno pertenecientes a menos de tres elementos se obtenga el valor recuperado a partir de la extrapolación del valor en un nodo vecino, provoca que en esas zonas el error se estime con una menor exactitud que en el resto de parches, lo que se traduce en un refinamiento en zonas del contorno innecesario. No obstante, este refinamiento no es intenso y prácticamente no influye en la convergencia del proceso.

La tabla 5.2 muestra la disminución paulatina de los errores total, medio y máximo, así como la dispersión de los errores elementales, conseguida con el indicador ZZ ($\nabla \times \vec{u}$) y un refinamiento 1:4.

Las figuras 5.55-5.58 presentan la convergencia para ambas versiones del indicador y ambos refinamientos. De nuevo en estas gráficas se constata la baja calidad del indicador basado en \vec{u}_0 y la similitud de comportamiento de los dos métodos de refinamiento.

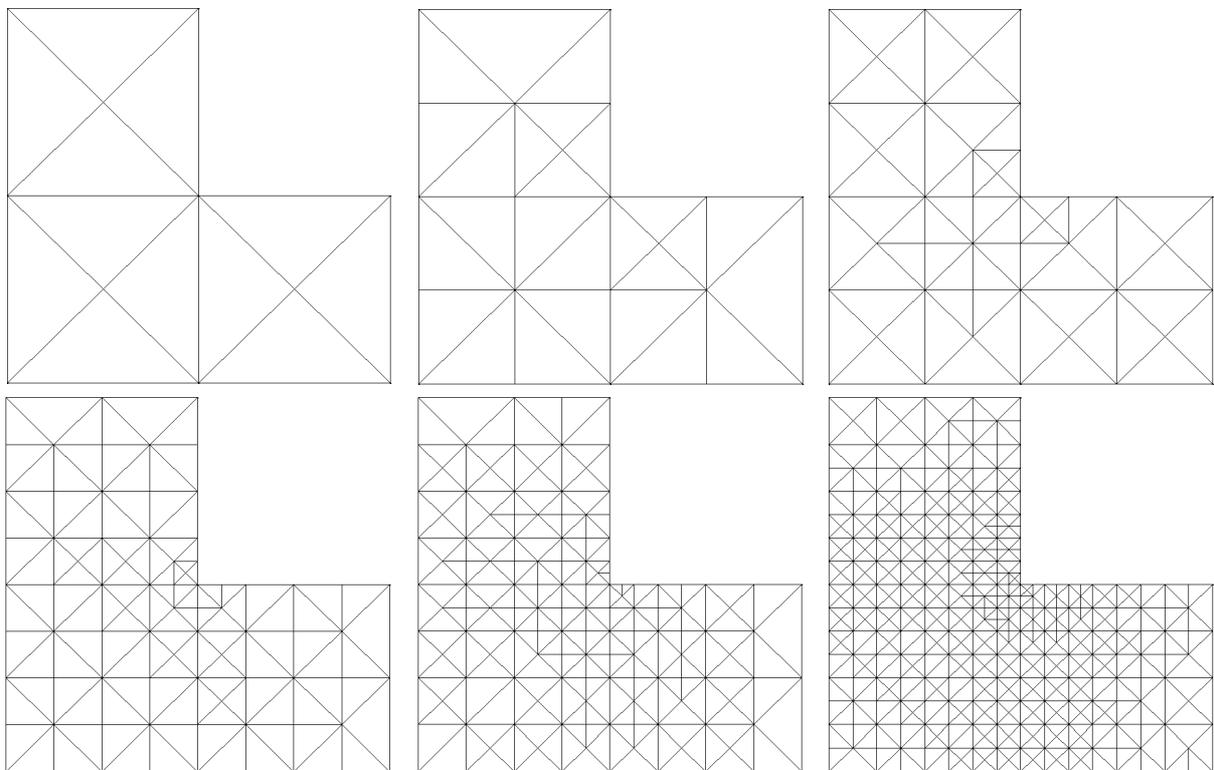


Figura 5.51. Mallas adaptadas (1ª, 3ª, 5ª, 7ª, 9ª y 12ª) con el indicador ZZ ($\nabla \times \vec{u}_0$) y refinamiento 1:2

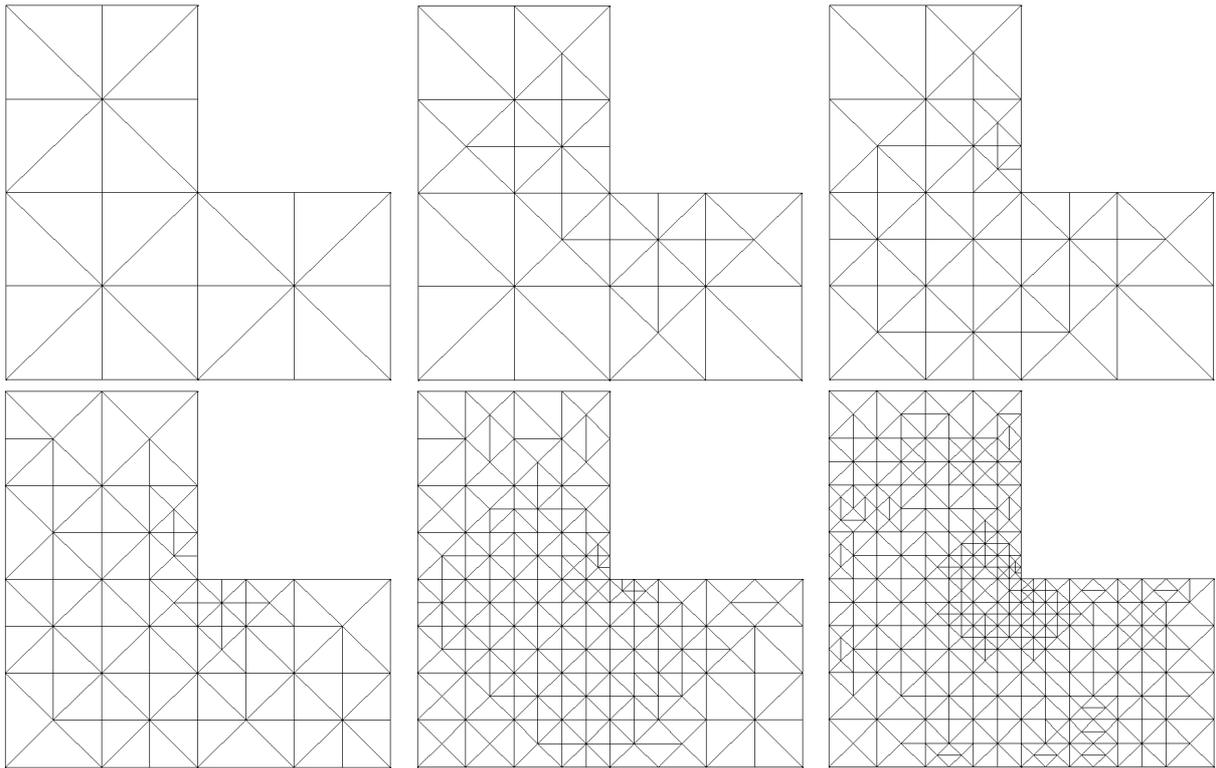


Figura 5.52. Mallas adaptadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 6^a y 8^a) con el indicador $ZZ(\nabla \times \vec{u}_0)$ y refinamiento 1:4

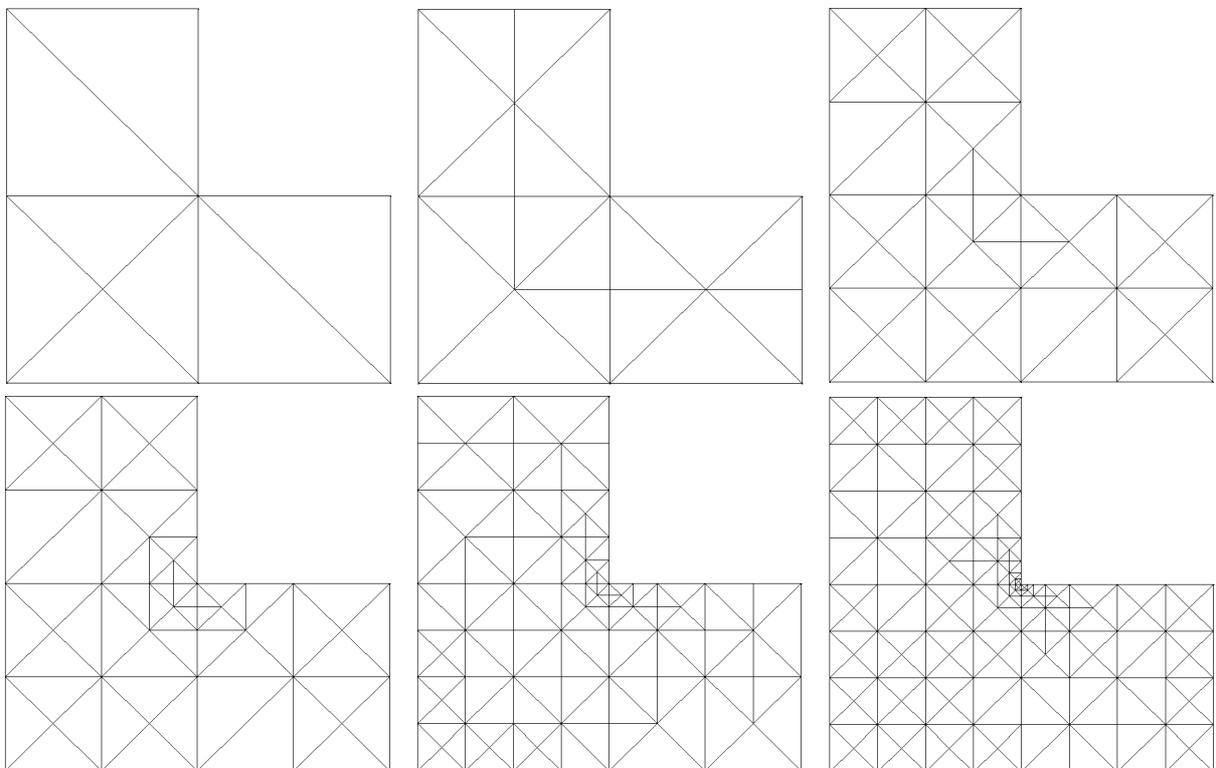


Figura 5.53. Mallas adaptadas (1^a , 3^a , 5^a , 7^a , 9^a y 12^a) con el indicador $ZZ(\nabla \times \vec{u})$ y refinamiento 1:2

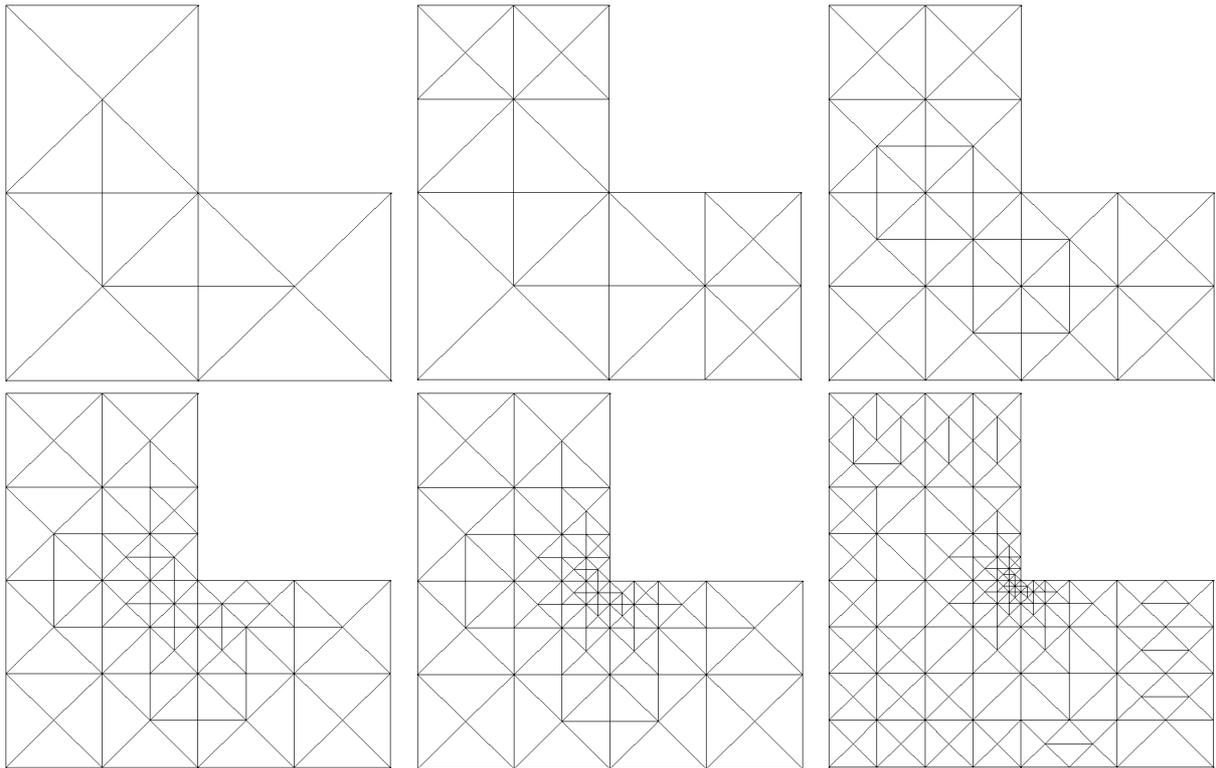


Figura 5.54. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a y 6^a) con el indicador $ZZ(\nabla \times \bar{u})$ y refinamiento 1:4

Tabla 5.2. Parámetros estadísticos del error estimado con el indicador $ZZ(\nabla \times \bar{u})$ y refinamiento 1:4

Malla	$\ e\ _{total}^2$	$\ e\ _{medio}^2$	$\ e\ _{m\acute{a}x}^2$	Desviación típica
1	27.5	4.58	14.4	5.02
2	3.12	0.195	0.476	0.12
3	1.77	0.0592	0.232	0.0742
4	0.369	5.77e-3	0.039	9.43e-3
5	0.144	1.44e-3	8.69e-3	1.87e-3
6	0.0724	5.32e-4	2.52e-3	6.95e-4
7	0.019	7.5e-5	5.27e-4	8.61e-5
8	9.5e-3	3.01e-5	1.32e-4	2.67e-5

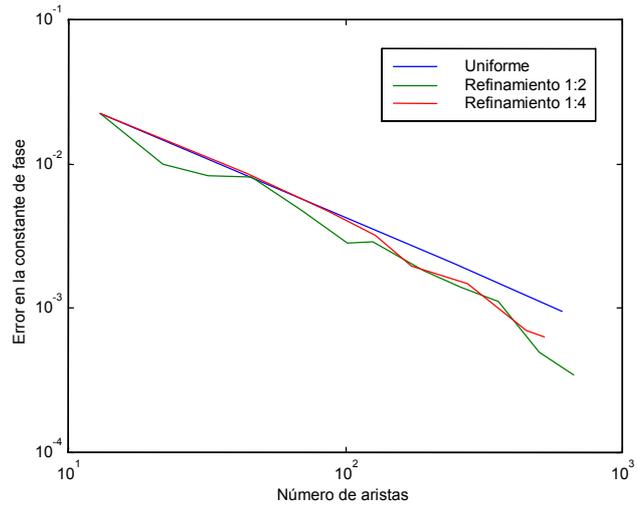
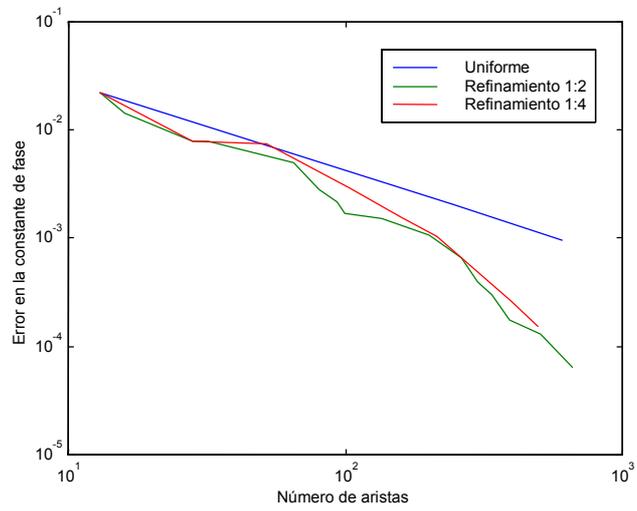
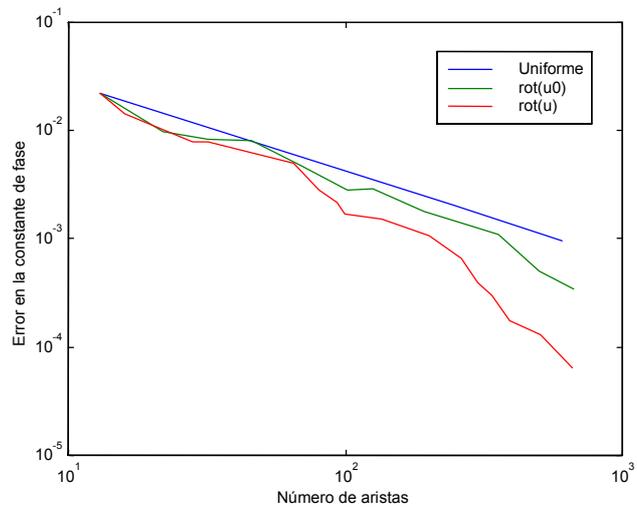
Figura 5.55. Convergencia del indicador ZZ ($\nabla \times \bar{u}_0$)Figura 5.56. Convergencia del indicador ZZ ($\nabla \times \bar{u}$)

Figura 5.57. Convergencia del indicador ZZ (refinamiento 1:2)

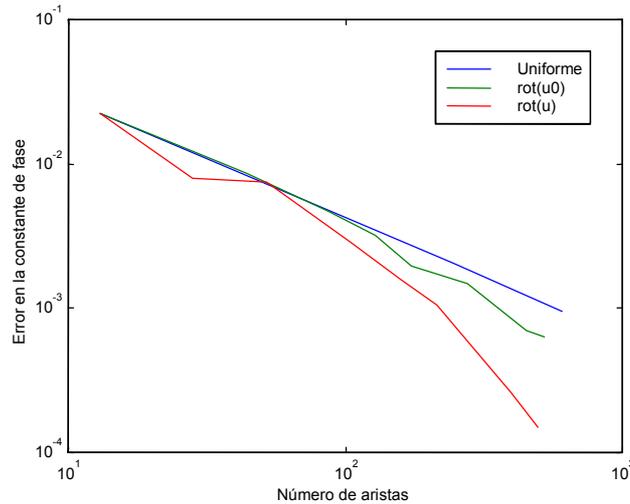


Figura 5.58. Convergencia del indicador ZZ (refinamiento 1:4)

5.4.2.3. Indicador por Continuidad de Flujo

En este punto se analiza el indicador de error en arista basado en la continuidad de flujo eléctrico o magnético en sus tres versiones:

- Punto medio de la arista.
- Norma.
- Norma ponderada por la longitud de la arista.

Los resultados obtenidos (figuras 5.59-5.64 y tabla 5.3) evidencian el mal comportamiento del indicador de error cuando se calcula como el valor en el punto medio de la arista o como la norma del error. En ambos casos, el indicador sobreestima la singularidad y prácticamente no decrece a lo largo del proceso, lo que provoca un refinamiento continuo de las mismas zonas. Este comportamiento incrementa rápidamente el número de condición de la matriz B (figura 5.66), lo que origina resultados erróneos por la imposibilidad de invertir la matriz a partir de un determinado momento, como muestra la figura 5.63.

En la figura 5.65 se compara la evolución del condicionamiento producido por los dos tipos de refinamiento al utilizar el indicador basado en la norma ponderada. En este caso se observa que en el refinamiento 1:2 el número de condición de B tiene un crecimiento ligeramente superior. Este elevado condicionamiento en las últimas etapas del proceso puede ser la causa de que el error relativo en el autovalor aumente en la última iteración (figura 5.64). Sin embargo, este comportamiento también puede ser debido a que en esa etapa la exactitud conseguida es muy buena y es posible que el valor utilizado como autovalor exacto presente una precisión similar o peor que el obtenido con el procedimiento adaptativo. Por esta razón, es conveniente eliminar los resultados obtenidos en esta última etapa del proceso de adaptación a la hora de evaluar la convergencia del método, sobre todo si nos encontramos en precisiones cercanas a 10^{-5} , como es el caso.

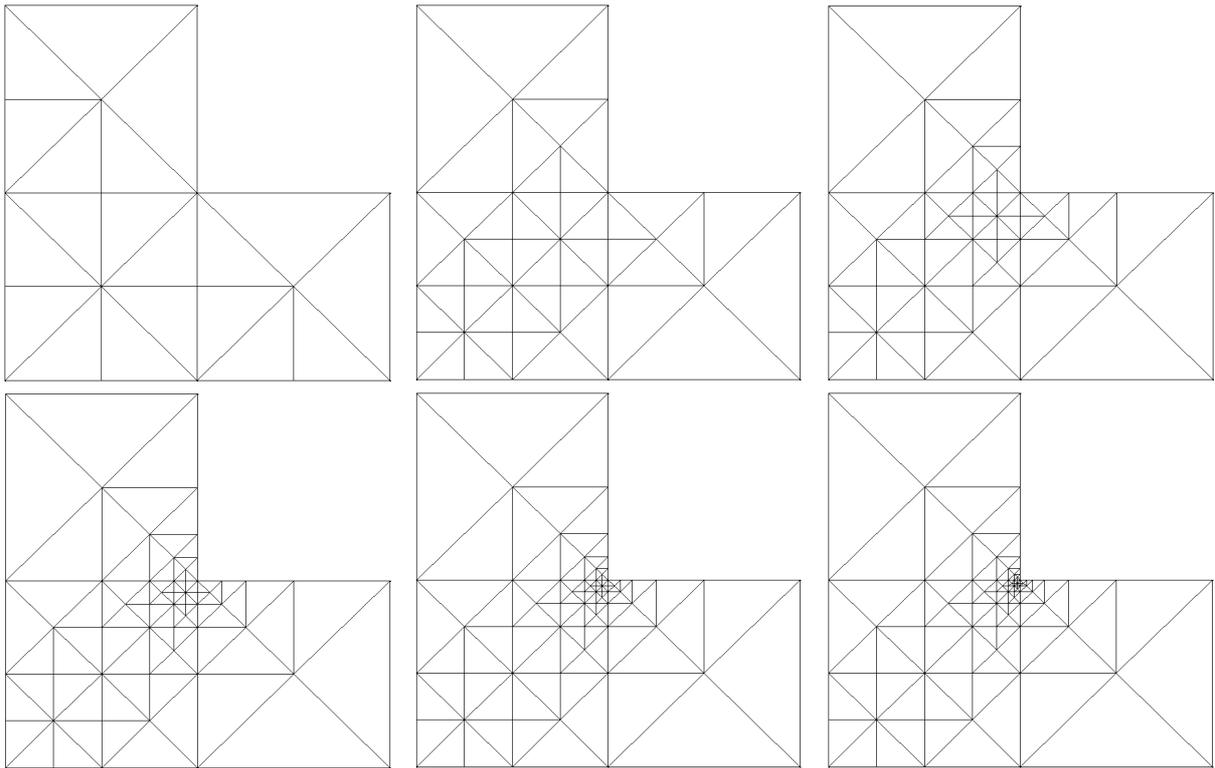


Figura 5.59. Mallas adaptadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 5^a y 6^a) con el indicador $\nabla \cdot \bar{w}$ (punto medio) y refinamiento 1:4

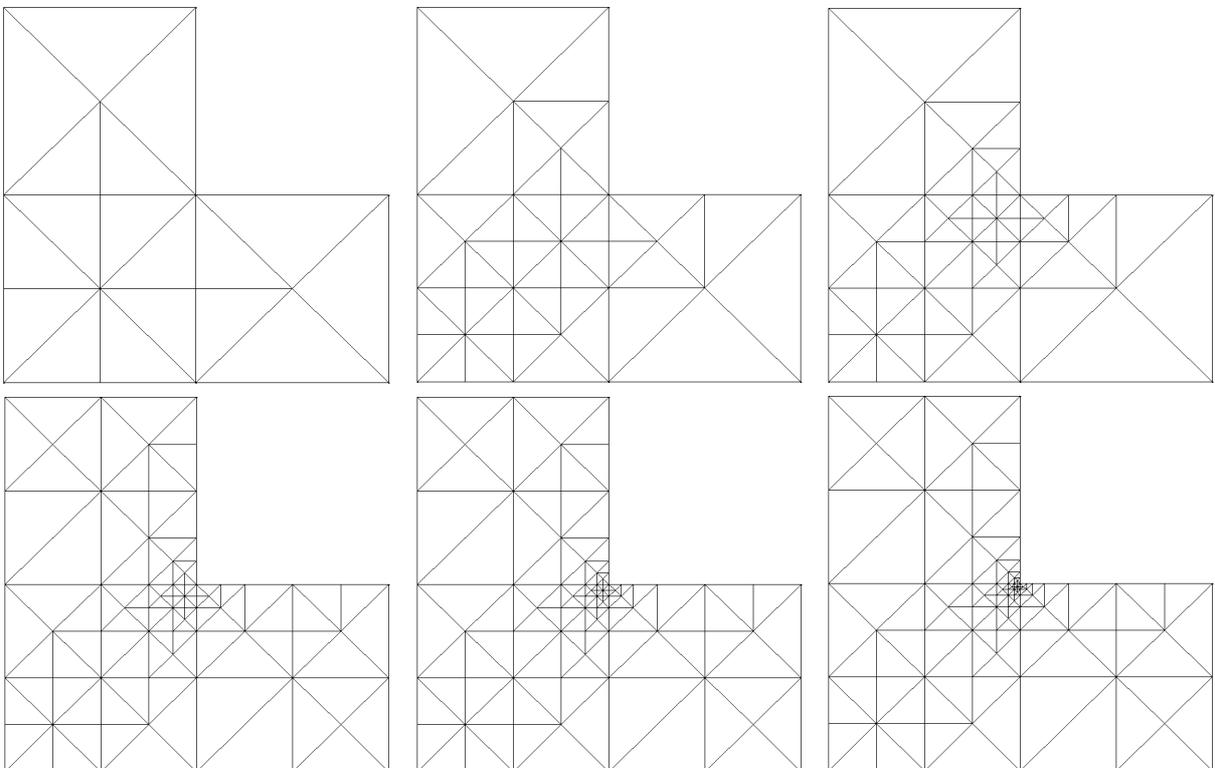


Figura 5.60. Mallas adaptadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 5^a y 6^a) con el indicador $\nabla \cdot \bar{w}$ (norma) y refinamiento 1:4

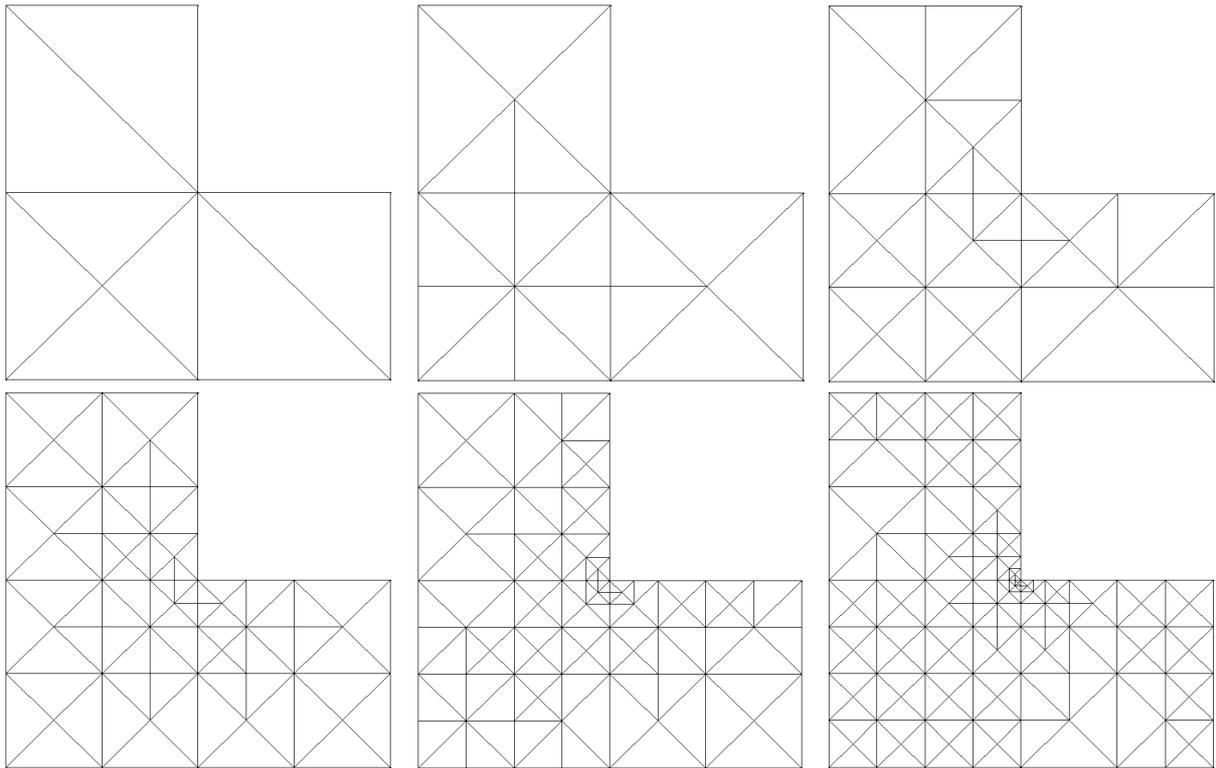


Figura 5.61. Mallas adaptadas (1^a , 3^a , 5^a , 7^a , 9^a y 12^a) con el indicador $\nabla \cdot \bar{w}$ (norma ponderada) y refinamiento 1:2

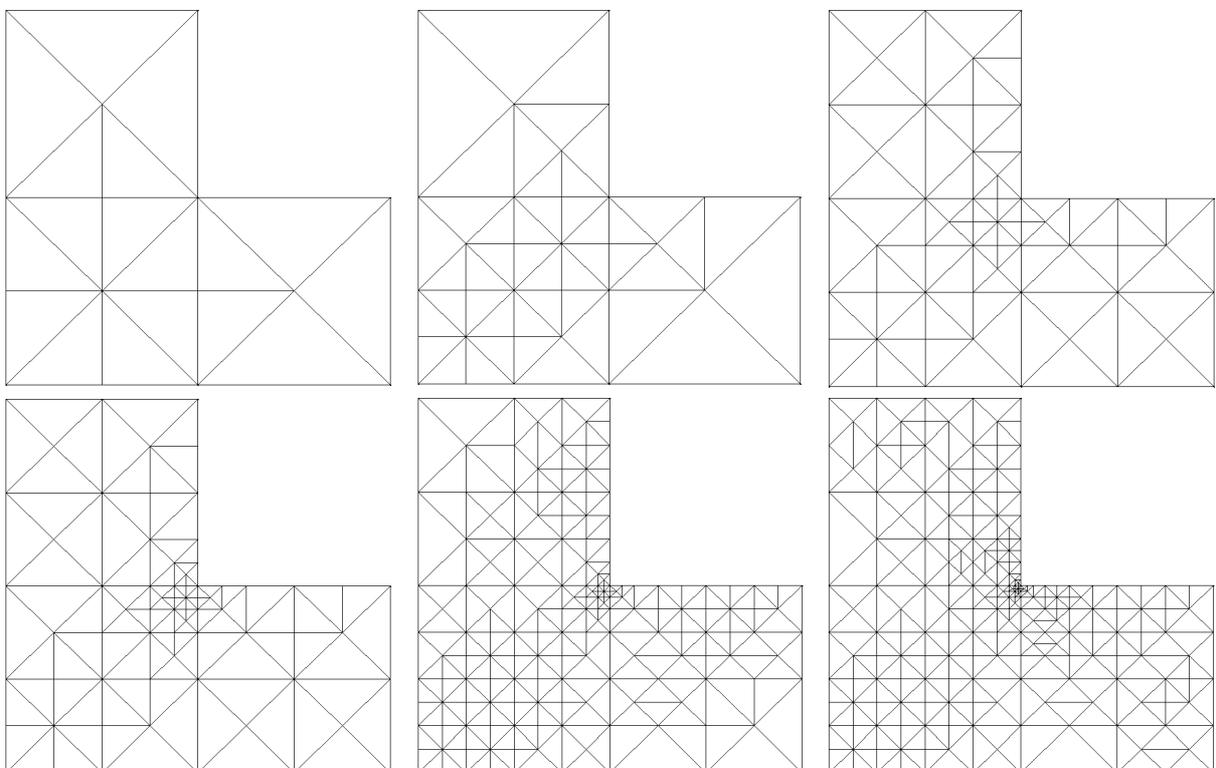


Figura 5.62. Mallas adaptadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 5^a y 6^a) con el indicador $\nabla \cdot \bar{w}$ (norma ponderada) y refinamiento 1:4

Tabla 5.3. Parámetros estadísticos del error estimado con el indicador $\nabla \cdot \bar{w}$ (norma ponderada) y refinamiento 1:4

Malla	$\ e\ _{total}^2$	$\ e\ _{medio}^2$	$\ e\ _{m\acute{a}x}^2$	Desviación típica
1	2.92	0.584	1.61	0.58
2	0.517	0.0235	0.127	0.0294
3	0.161	2.59e-3	0.0202	4.44e-3
4	0.0528	4.36e-4	4.66e-3	6.05e-4
5	0.0305	2.03e-4	1.14e-3	2.86e-4
6	8.66e-3	2.2e-5	2.85e-4	3.85e-5
7	3.69e-2	6.87e-6	7.11e-5	9.49e-6

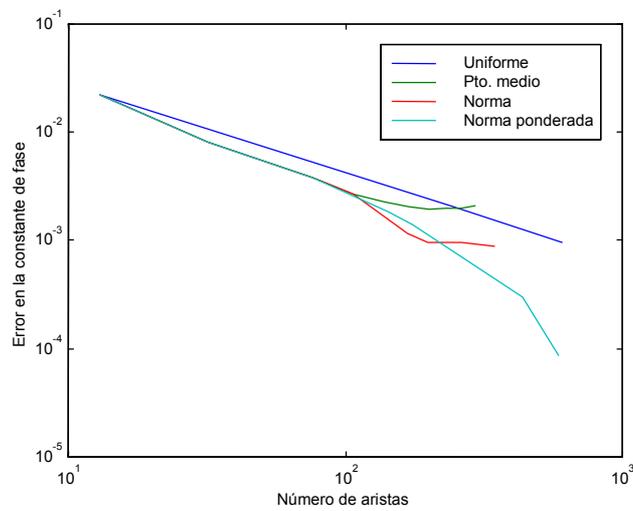


Figura 5.63. Convergencia del indicador de continuidad de flujo (refinamiento 1:4)

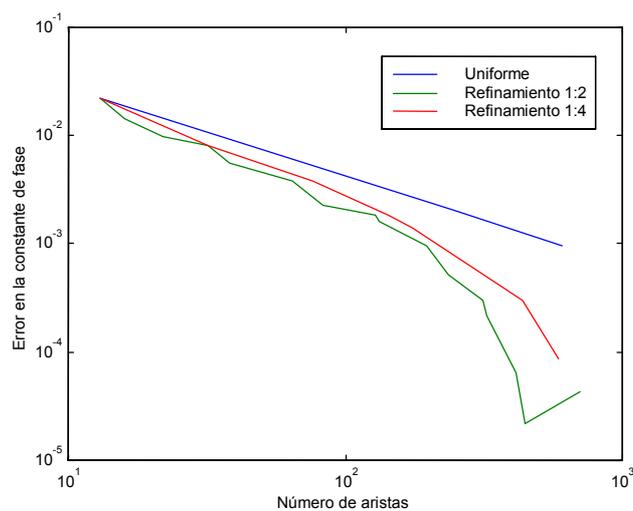


Figura 5.64. Convergencia del indicador de continuidad de flujo (norma ponderada)

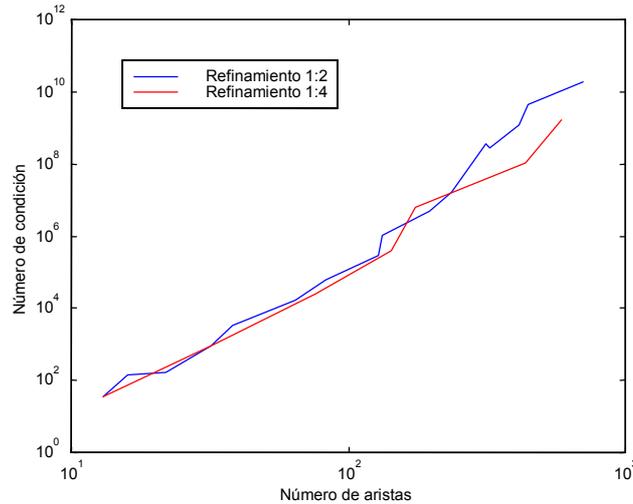


Figura 5.65. Evolución del condicionamiento de la matriz B del autosistema $(A + \lambda B)x = 0$ con el indicador de continuidad de flujo (norma ponderada)

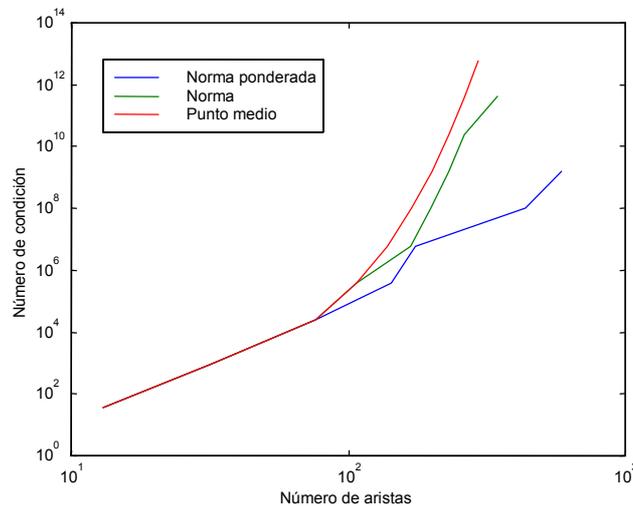


Figura 5.66. Evolución del condicionamiento de la matriz B del autosistema $(A + \lambda B)x = 0$ con el indicador de continuidad de flujo (refinamiento 1:4)

5.4.2.4. Conclusiones

Como resumen de los resultados obtenidos en la guía en L homogénea, en las figuras 5.67 y 5.68 se comparan las convergencias obtenidas con los mejores indicadores de cada tipo. En el caso del refinamiento 1:2, el indicador por continuidad de flujo es el que mejor convergencia presenta, siendo ésta prácticamente igual a la de los otros dos indicadores hasta el décimo refinamiento ($\delta < 10^{-3}$). En el refinamiento 1:4 la convergencia de los tres indicadores es prácticamente la misma.

La distribución de la densidad de error estimado en las mallas refinadas con estos tres indicadores y utilizando un refinamiento 1:4 se muestra en las figuras 5.69, 5.70 y 5.71. Estas mismas densidades para las mallas uniformes de la figura 5.37 se presentan en las figuras 5.72, 5.73 y 5.74. En el caso de los dos primeros indicadores de error, la densidad se ha calculado para cada elemento como el cociente entre el error local y su área. A partir de estos valores elementales de densidad de error se ha calculado un valor nodal (como media de los valores de

los elementos que comparten el nodo) y la distribución se ha obtenido mediante la interpolación lineal de estos valores en cada elemento. En el caso del indicador de error por continuidad de flujo, esta densidad se ha definido como el cociente entre el error en cada arista y la longitud de la arista. El valor nodal se ha calculado como la media de las densidades de error de las aristas que comparten el nodo.

Como se puede apreciar al comparar la densidad de error en las mallas adaptadas y en las uniformes, la mayor densidad de error tiende a confinarse en la zona donde tiene lugar la singularidad cuando se incrementa el número de incógnitas del problema. Sin embargo, el proceso adaptativo consigue un confinamiento mayor que la utilización de mallas no adaptadas.

Por último, en la figura 5.75 se muestra la evolución del condicionamiento de B a lo largo del proceso adaptativo. En ella se constata que estos indicadores presentan una evolución del condicionamiento similar cuando se utiliza el refinamiento 1:4.

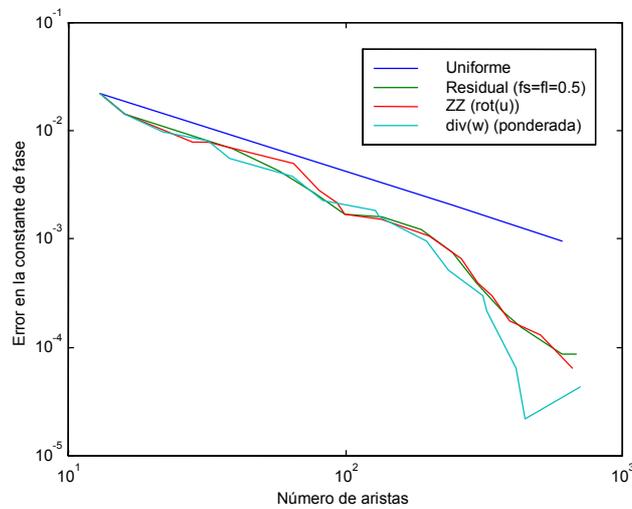


Figura 5.67. Convergencia de los distintos indicadores (refinamiento 1:2)

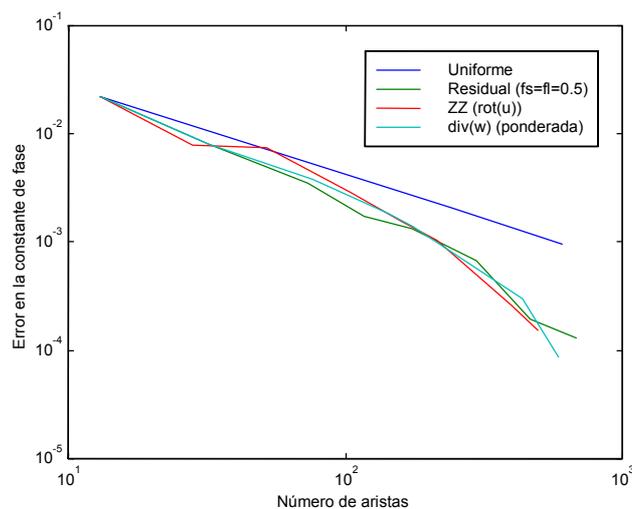


Figura 5.68. Convergencia de los distintos indicadores (refinamiento 1:4)

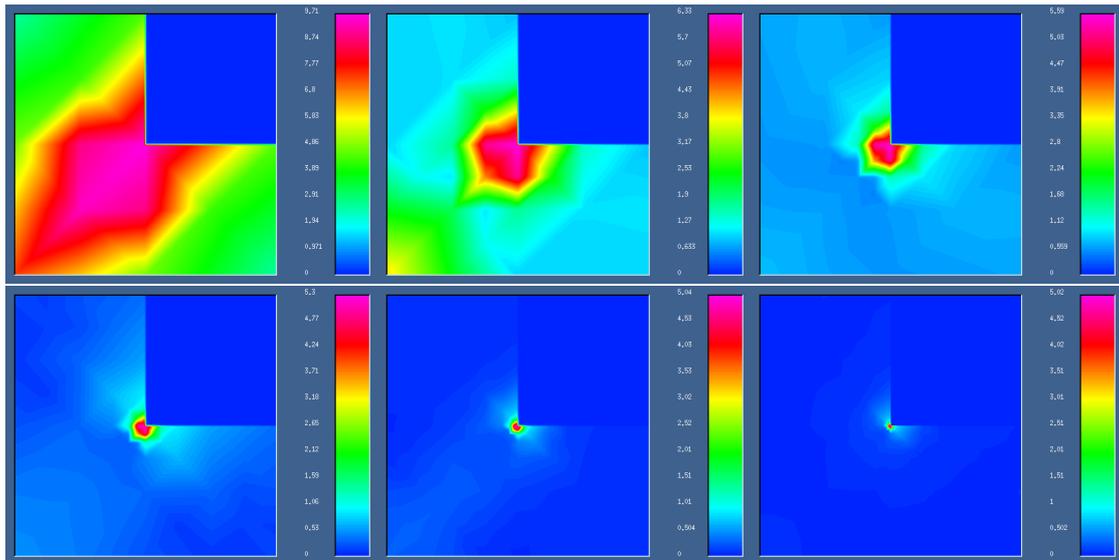


Figura 5.69. Distribución de la densidad de error estimado con el indicador residual ($f_s=f_i=0.5$) en las mallas de la figura 5.43

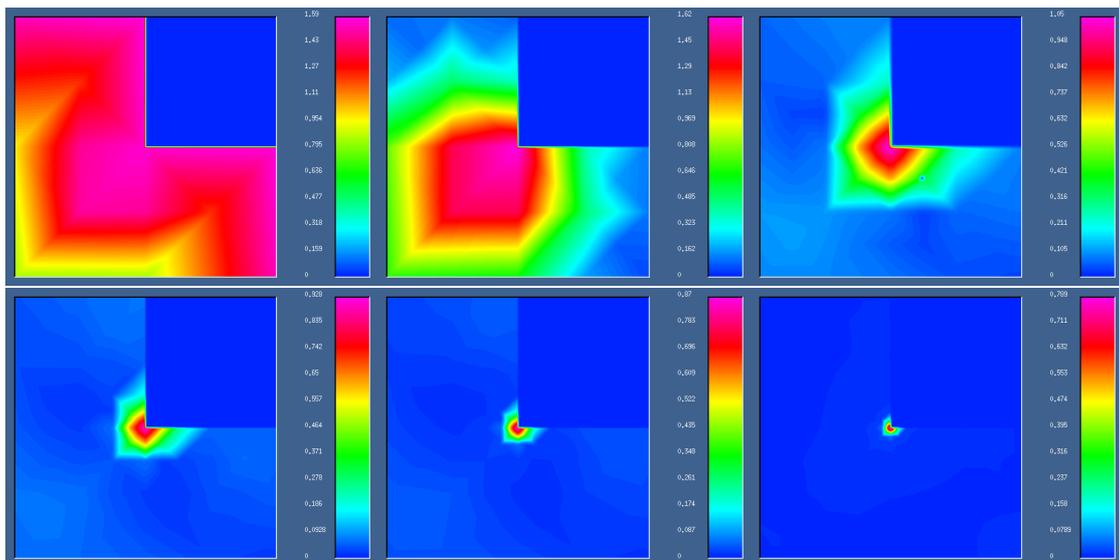


Figura 5.70. Distribución de la densidad del error estimado con el indicador $ZZ(\nabla \times \vec{u})$ en las mallas de la figura 5.54

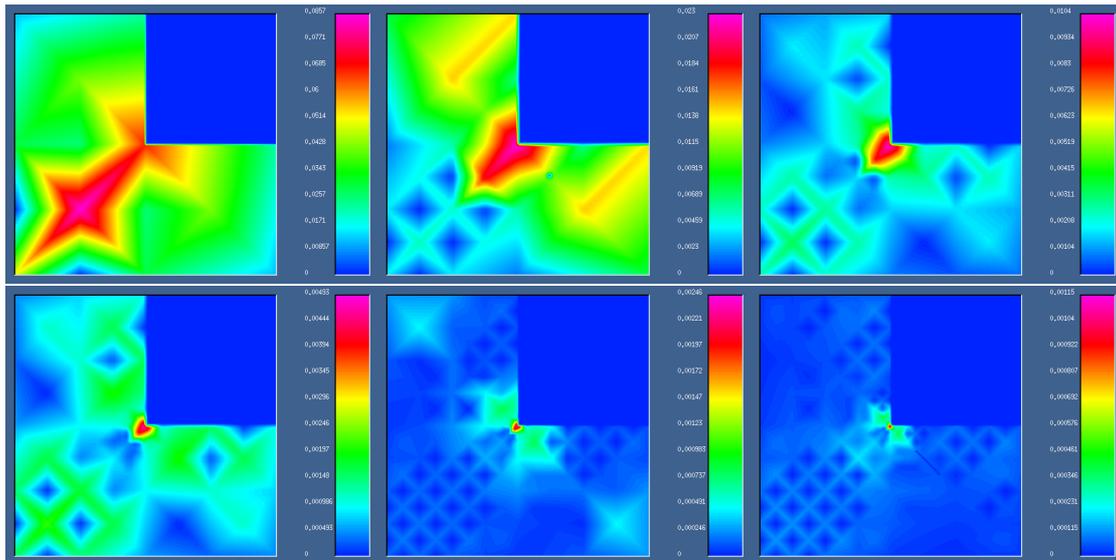


Figura 5.71. Distribución de la densidad del error estimado con el indicador de continuidad de flujo (ponderado) en las mallas de la figura 5.62

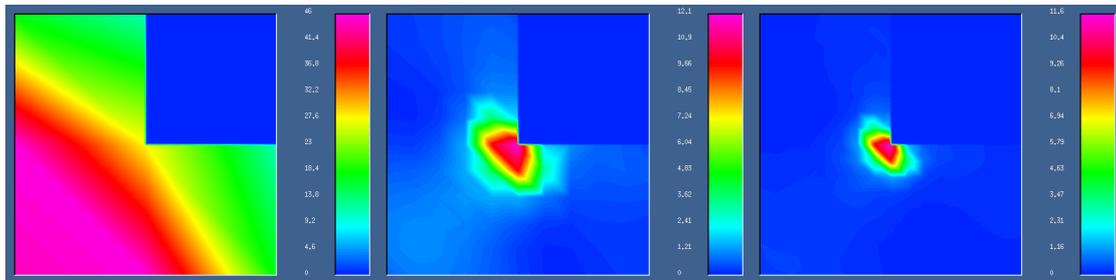


Figura 5.72. Distribución de la densidad de error estimado con el indicador residual ($f_s=f_t=0.5$) en las mallas de la figura 5.37

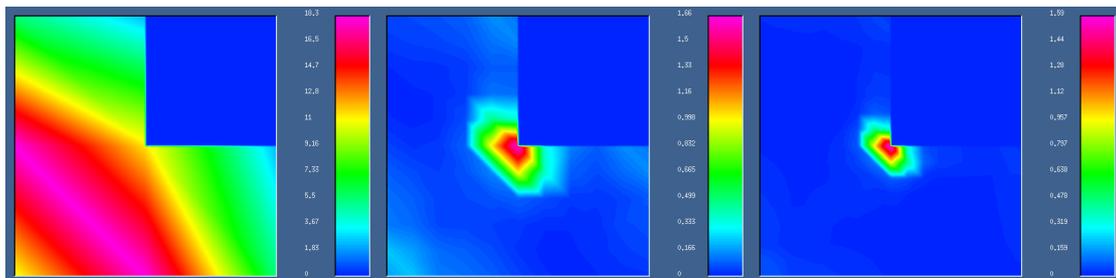


Figura 5.73. Distribución de la densidad del error estimado con el indicador $ZZ(\nabla \times \vec{u})$ en las mallas de la figura 5.37

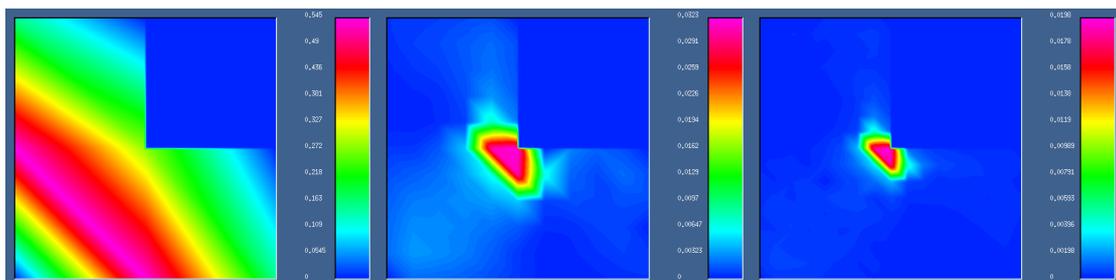


Figura 5.74. Distribución de la densidad del error estimado con el indicador de continuidad de flujo (ponderado) en las mallas de la figura 5.37

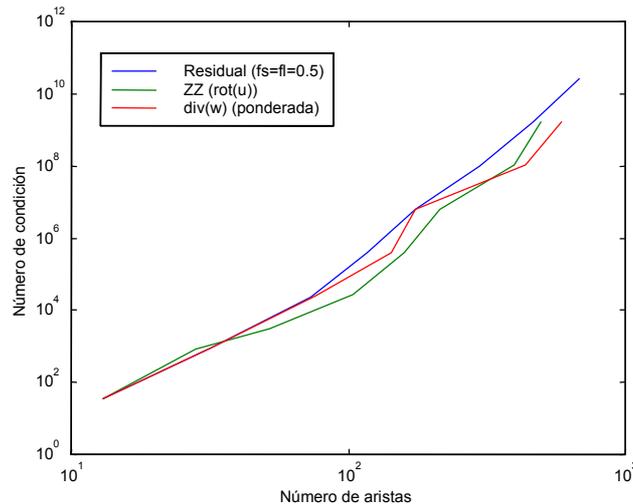


Figura 5.75. Condicionamiento de la matriz B del autosistema $(A + \lambda B)x = 0$ con distintos indicadores (refinamiento 1:4)

5.4.3. Línea Microstrip Encapsulada

El análisis de los distintos indicadores de error en esta estructura inhomogénea se va a restringir a las versiones de éstos con las que mejores resultados se han obtenido en el ejemplo anterior, y a la utilización de refinamiento 1:4 ya que, como hemos visto anteriormente, éste y el refinamiento 1:2 presentan un comportamiento similar, y el primero requiere un menor número de iteraciones.

En la figura 5.76 se muestra la estructura bajo estudio, y en las figuras 5.77 y 5.78 la distribución de las componentes transversal y axial de los campos eléctrico (obtenida con una formulación en campo eléctrico) y magnético (con una formulación en campo magnético) para el primer modo. En ellas se aprecia la singularidad de campo existente en la esquina inferior del conductor interno y es de esperar que el procedimiento de adaptación introduzca una mayor densidad de grados de libertad en esa región. Los cálculos de estos campos, tanto en estas representaciones como en los procesos adaptativos realizados, se han hecho sobre media estructura, con el fin de aprovechar la simetría que presenta y reducir el número de incógnitas a la mitad. En el eje de simetría se impuso la condición de pared magnética.

En este ejemplo se ha aplicado el proceso de adaptación tanto para una formulación en campo eléctrico como para una en campo magnético. En ambos casos la estimación del error se ha realizado sobre la variable primaria. La frecuencia de trabajo fue de 20 GHz ($k_0=418.88$). La figura 5.79 muestra una malla uniforme y las dos mallas graduales empleadas en la obtención de la convergencia del MEF clásico. Las figuras 5.80-5.85 presentan la secuencia de mallas obtenidas y las tablas 5.4-5.9 resumen la información estadística de éstas. En todos los casos el error estimado, así como su dispersión, disminuye considerablemente a lo largo del proceso.

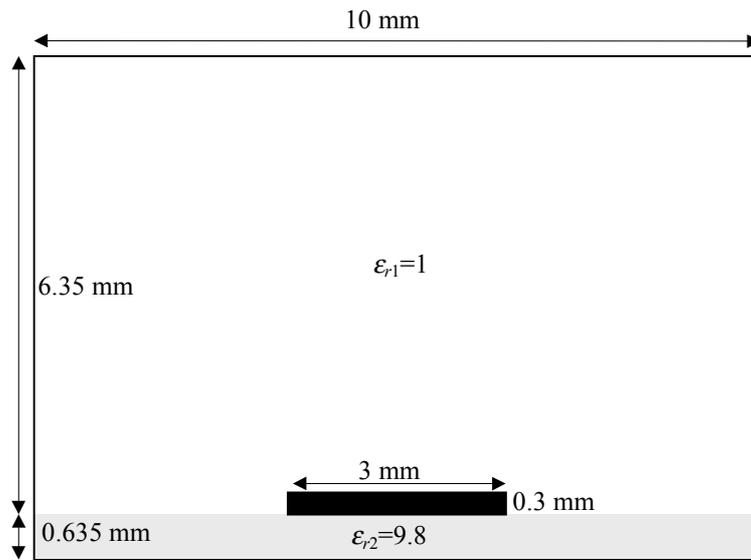


Figura 5.76. Estructura de la línea microstrip

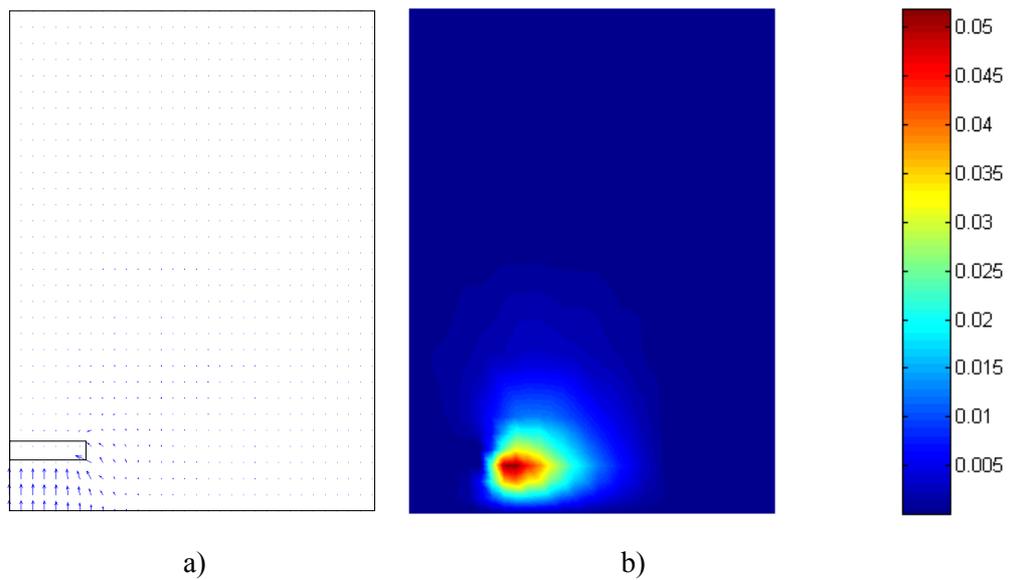


Figura 5.77. Distribución del campo eléctrico en el primer modo: a) componente transversal, b) módulo de la componente axial

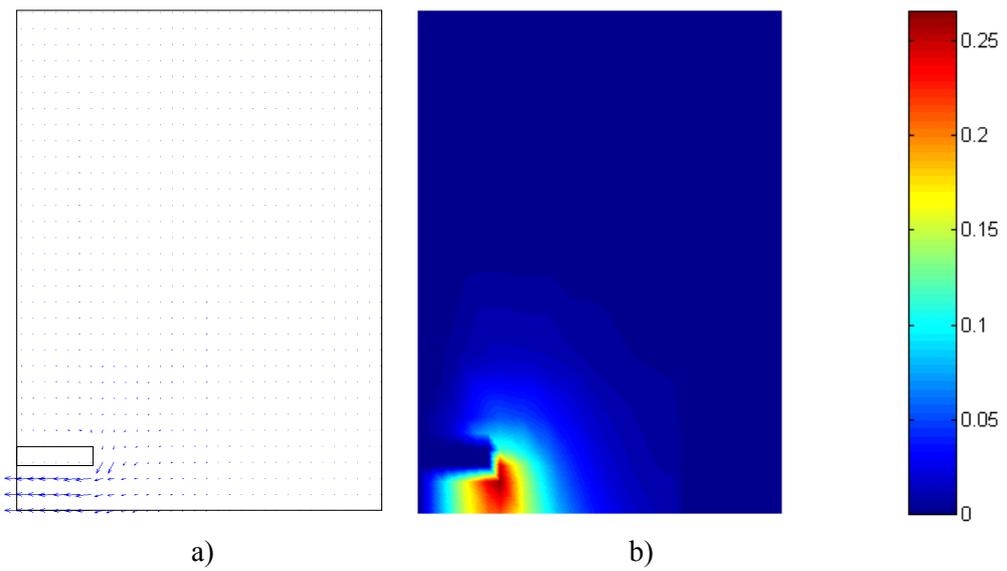


Figura 5.78. Distribución del campo magnético en el primer modo: a) componente transversal, b) módulo de la componente axial

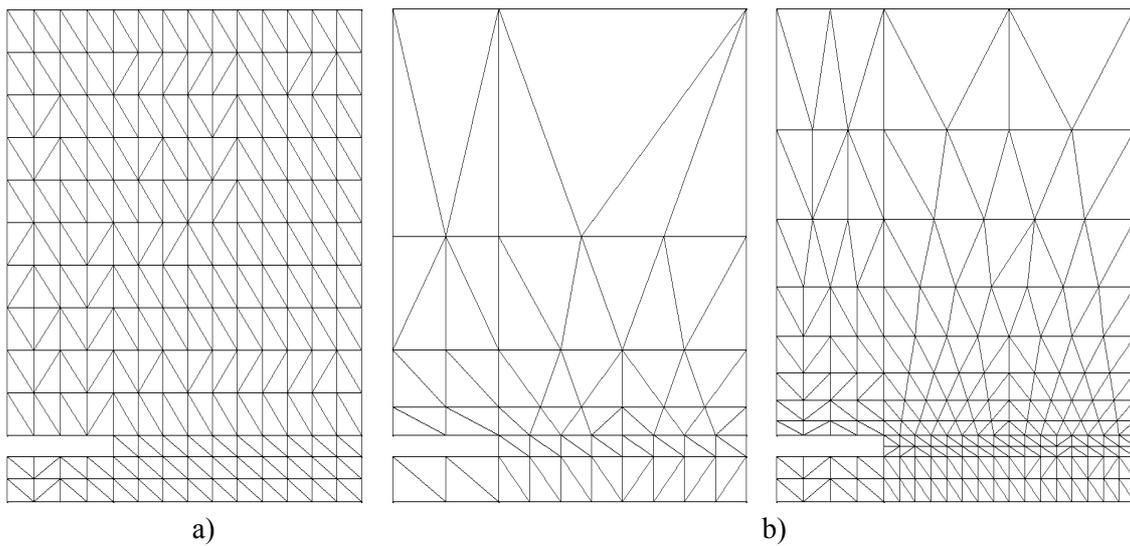


Figura 5.79. Mallas no adaptadas en una línea microstrip: a) uniforme, b) graduales

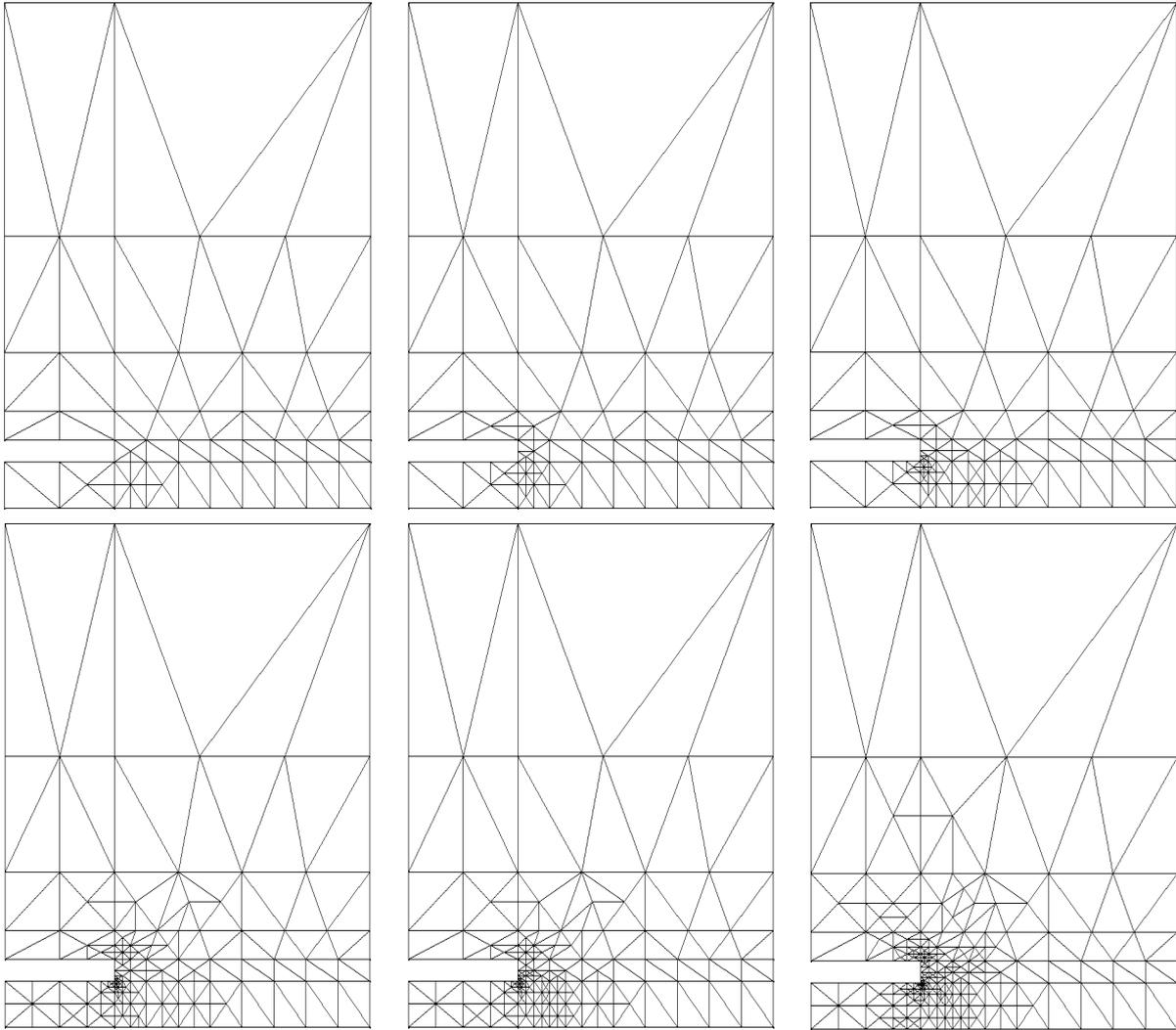


Figura 5.80. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a y 6^a) con el indicador residual ($f_s=f_f=0.5$), refinamiento 1:4 y resolución en campo eléctrico

Tabla 5.4. Parámetros estadísticos del error en las mallas de la figura 5.80

Malla	Aristas	$\ e\ _{total}^2$	$\ e\ _{medio}^2$	$\ e\ _{máx}^2$	Desviación típica
1	143	1.04	0.0121	0.344	0.0445
2	166	0.441	4.37e-3	0.0525	8.46e-3
3	209	0.172	1.33e-3	9.87e-3	1.7e-3
4	277	0.0653	3.78e-4	2.58e-3	4.96e-4
5	398	0.0209	8.33e-5	6.57e-4	9.52e-5
6	454	0.0172	5.98e-5	3.15e-4	5.65e-5

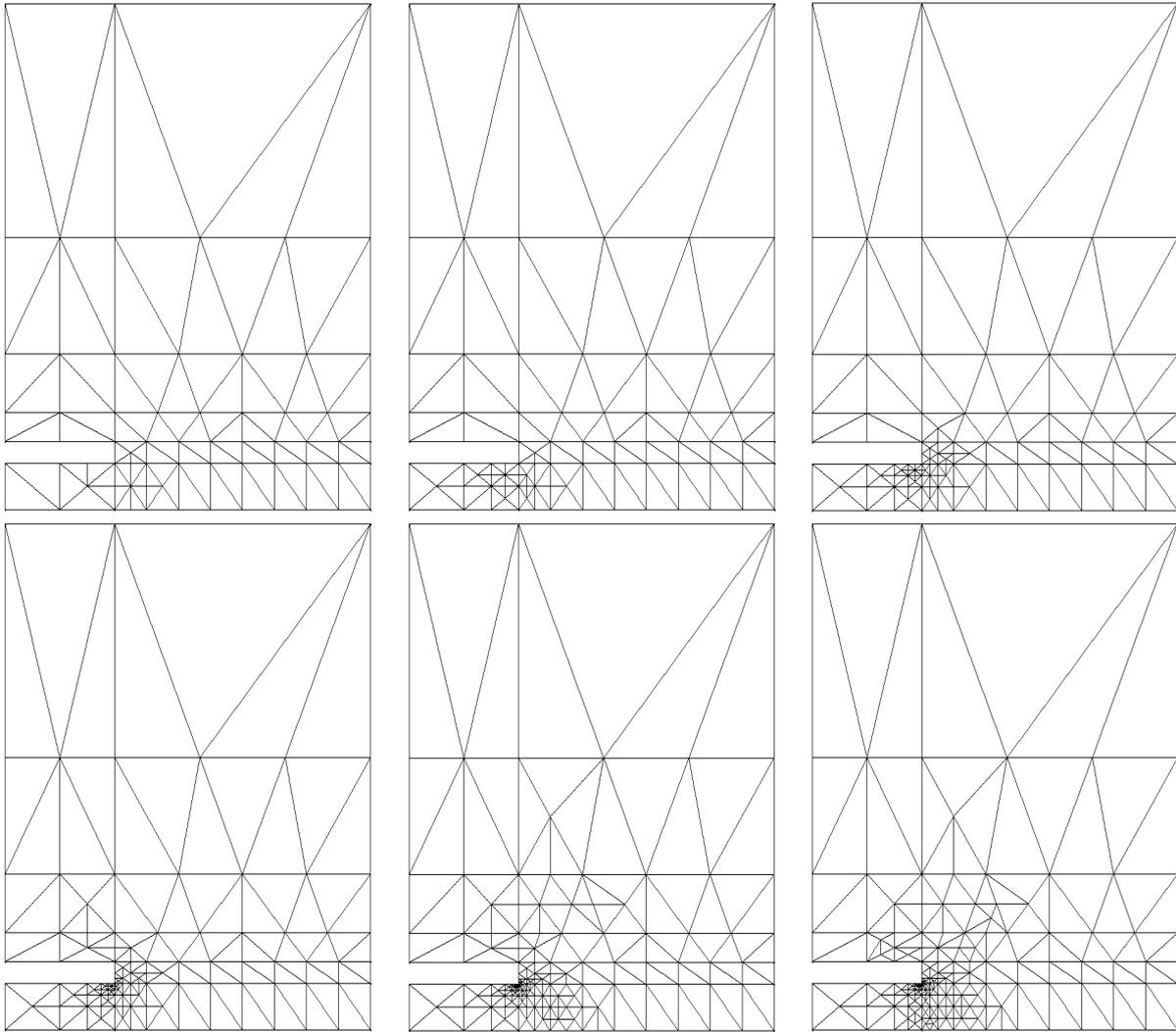


Figura 5.81. Mallas adaptadas (1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª y 6ª) con el indicador residual ($f_s=f_l=0.5$), refinamiento 1:4 y resolución en campo magnético

Tabla 5.5. Parámetros estadísticos del error en las mallas de la figura 5.81

Malla	Aristas	$\ e\ _{total}^2$	$\ e\ _{medio}^2$	$\ e\ _{máx}^2$	Desviación típica
1	143	0.134	1.56e-3	0.0352	5.98e-3
2	168	0.0547	5.37e-4	9.24e-3	1.29e-3
3	205	0.0325	2.58e-4	3.36e-3	5.09e-4
4	263	0.0162	9.87e-5	1.21e-3	1.65e-4
5	306	9.75e-3	5.08e-5	4.09e-4	7.4e-5
6	428	4.11e-3	1.51e-5	1.32e-4	1.86e-5
7	513	2.42e-3	7.39e-6	4.5e-5	7.97e-6

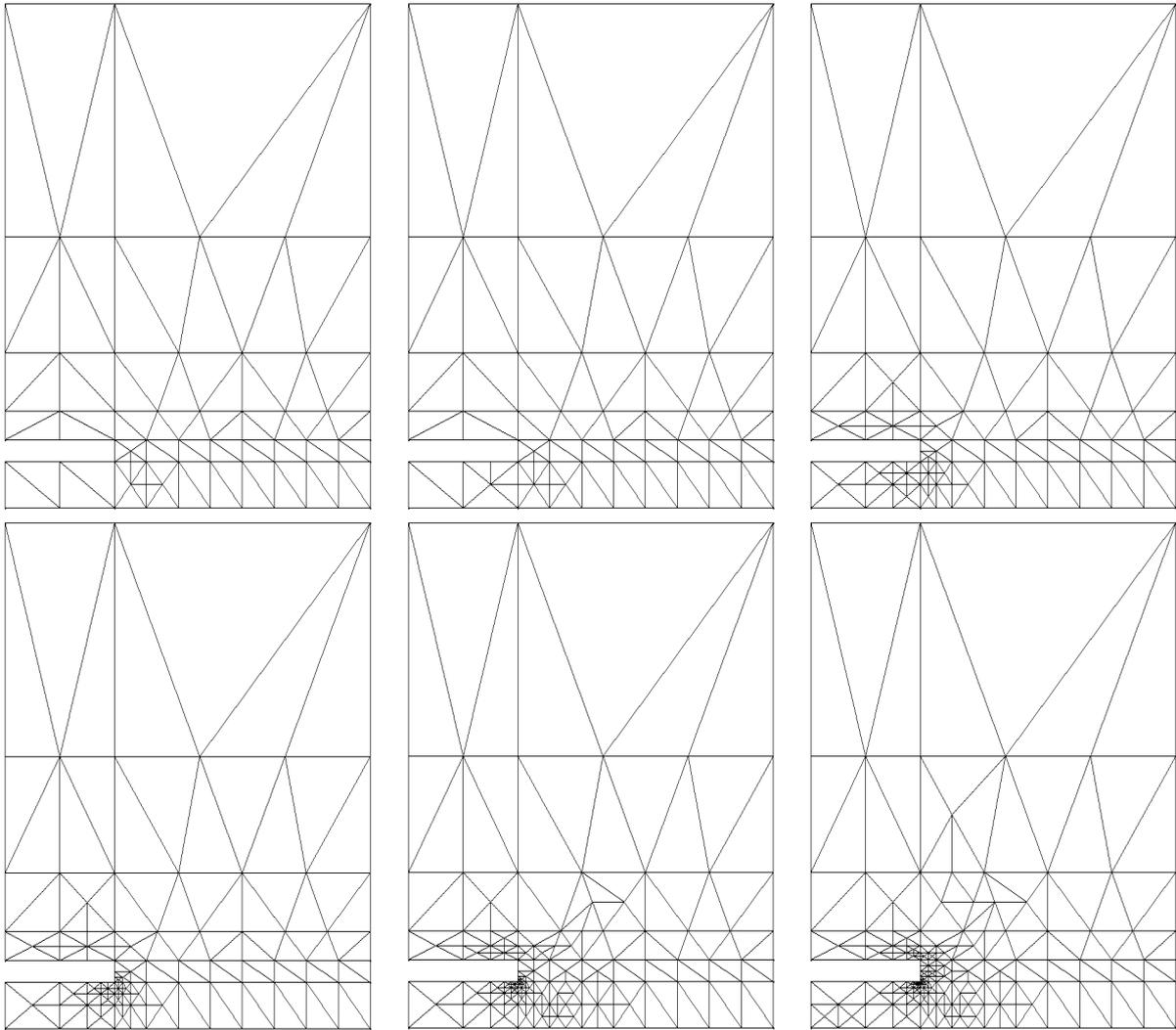


Figura 5.82. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a y 6^a) con el indicador ZZ ($\nabla \times \vec{u}$), refinamiento 1:4 y resolución en campo eléctrico

Tabla 5.6. Parámetros estadísticos del error en las mallas de la figura 5.82

Malla	Aristas	$\ e\ _{total}^2$	$\ e\ _{medio}^2$	$\ e\ _{m\acute{a}x}^2$	Desviación típica
1	143	0.144	1.67e-3	0.0538	6.68e-3
2	158	0.079	8.23e-4	0.0269	3e-3
3	166	0.0616	6.1e-4	6.91e-3	1.29e-3
4	242	0.0175	1.17e-4	1.48e-3	2.27e-4
5	285	6.75e-3	3.79e-5	3.4e-4	6.59e-5
6	418	1.88e-3	7.1e-6	7.5e-5	1.16e-5

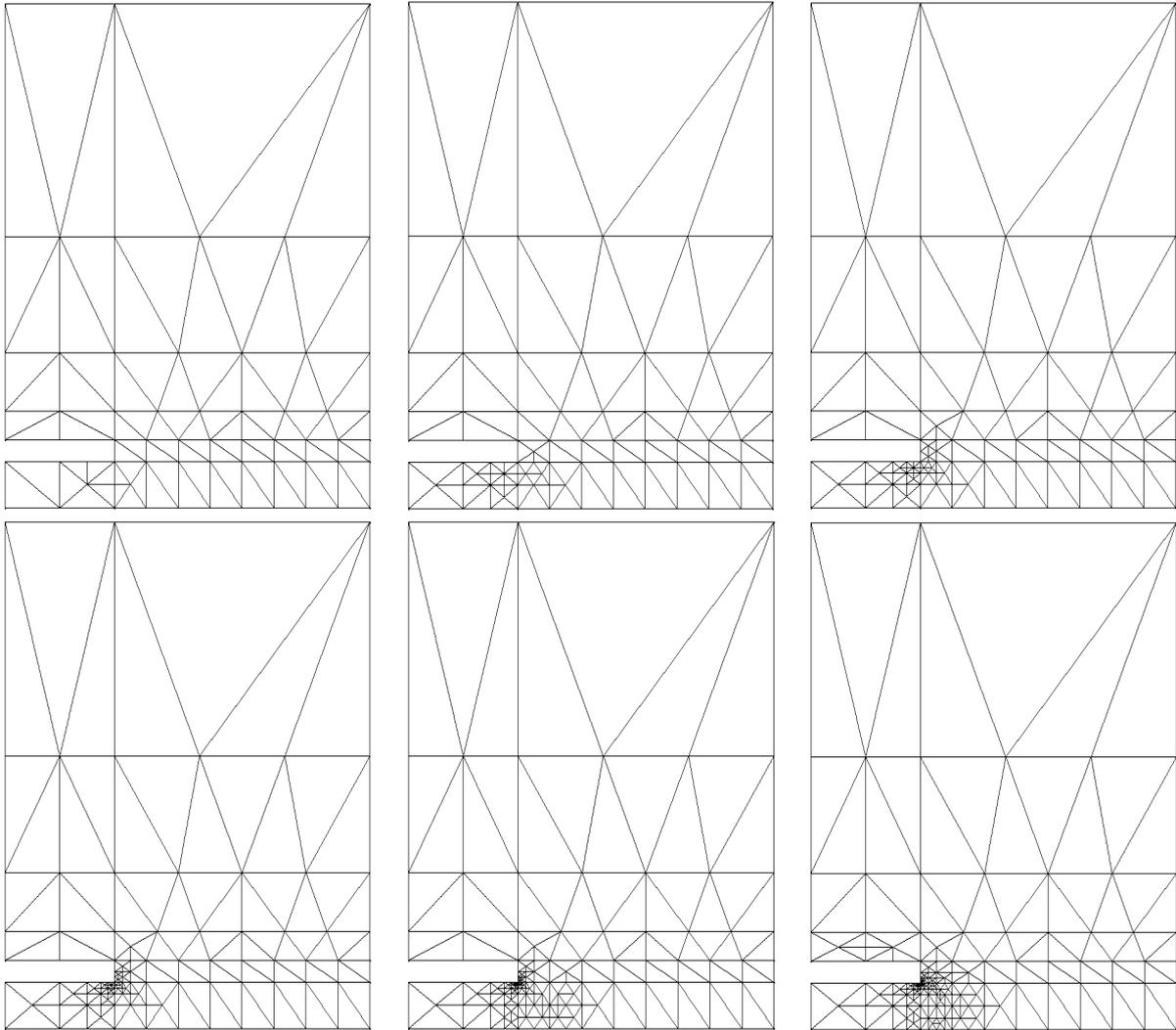


Figura 5.83. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a y 6^a) con el indicador ZZ ($\nabla \times \vec{u}$), refinamiento 1:4 y resolución en campo magnético

Tabla 5.7. Parámetros estadísticos del error en las mallas de la figura 5.83

Malla	Aristas	$\ e\ _{total}^2$	$\ e\ _{medio}^2$	$\ e\ _{m\acute{a}x}^2$	Desviación típica
1	143	0.164	1.9e-3	0.0964	0.011
2	154	0.0665	7.15e-4	0.0129	2.04e-3
3	200	0.027	2.19e-4	3.74e-3	5.97e-4
4	246	0.0137	8.95e-5	1.29e-3	2e-4
5	289	7.49e-3	4.14e-5	4.28e-4	7.95e-5
6	389	2.98e-3	1.21e-5	1.35e-4	2.03e-5

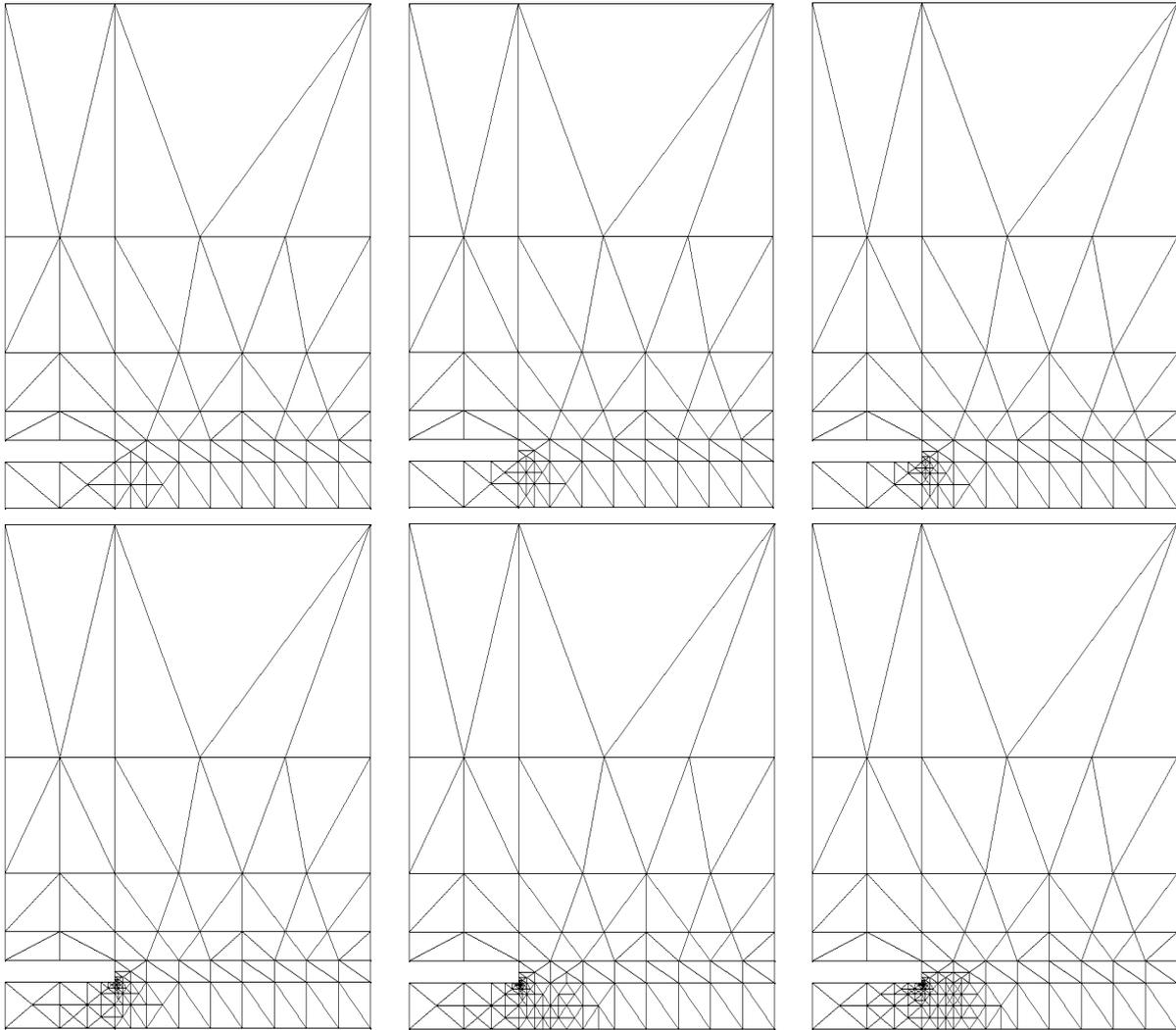


Figura 5.84. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a y 6^a) con el indicador $\nabla \cdot \bar{w}$ (norma ponderada), refinamiento 1:4 y resolución en campo eléctrico

Tabla 5.8. Parámetros estadísticos del error en las mallas de la figura 5.84

Malla	Aristas	$\ e\ _{total}^2$	$\ e\ _{medio}^2$	$\ e\ _{m\acute{a}x}^2$	Desviación típica
1	143	6.16e-5	5.63e-7	3.47e-5	3.56e-6
2	166	2.15e-5	1.57e-7	9.63e-6	8.66e-7
3	197	7.96e-6	4.8e-8	2.26e-6	1.92e-7
4	228	3.08e-6	1.58e-8	4.82e-7	4.77e-8
5	279	1.13e-6	4.66e-9	1.11e-7	1.25e-8
6	355	4.01e-7	1.28e-9	2.62e-8	2.88e-9
7	443	1.67e-7	4.18e-10	5.94e-9	8.77e-10

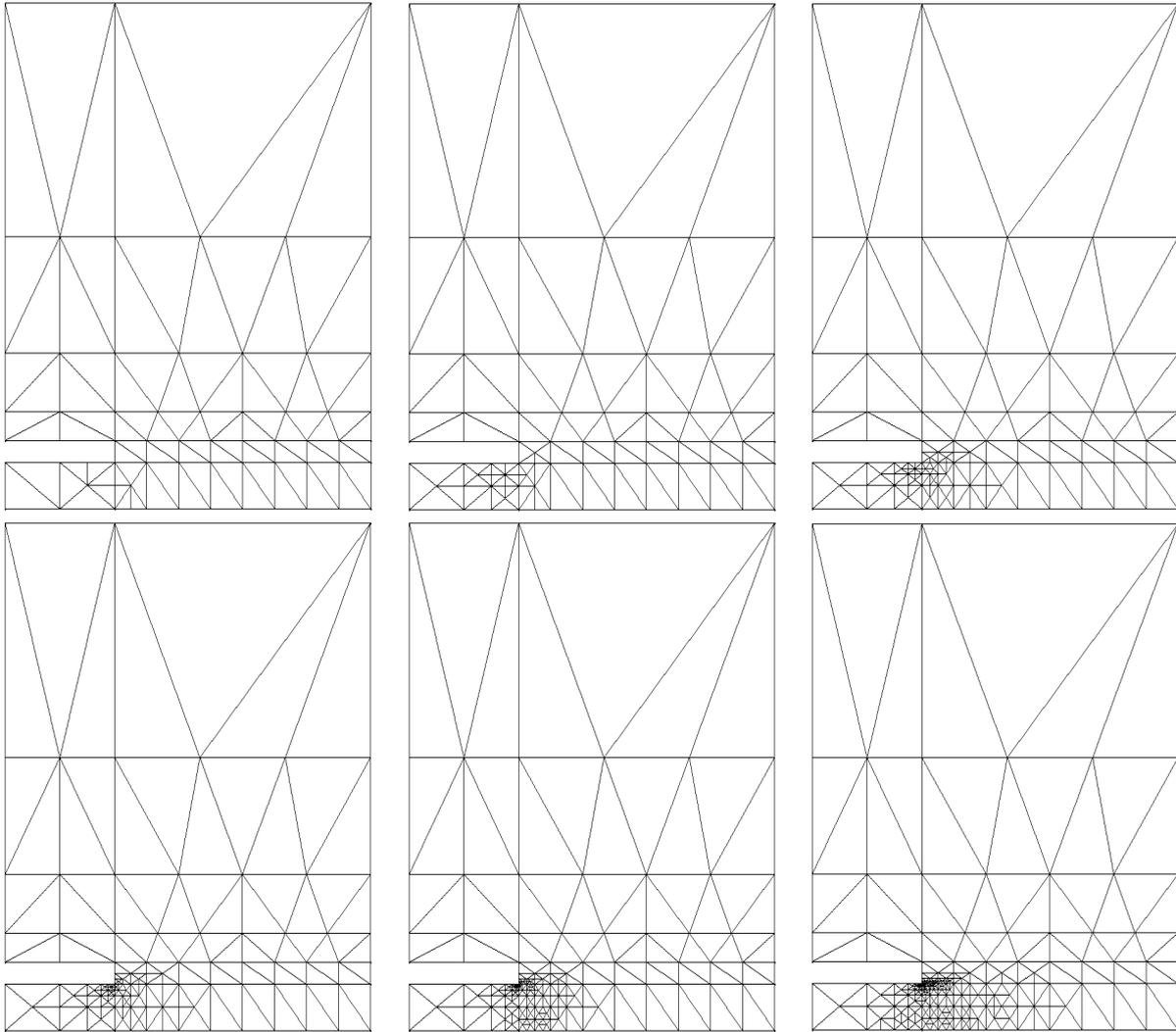


Figura 5.85. Mallas adaptadas (1^a , 2^a , 3^a , 4^a , 5^a y 6^a) con el indicador $\nabla \cdot \bar{w}$ (norma ponderada), refinamiento 1:4 y resolución en campo magnético

Tabla 5.9. Parámetros estadísticos del error en las mallas de la figura 5.85

Malla	Aristas	$\ e\ _{total}^2$	$\ e\ _{medio}^2$	$\ e\ _{m\acute{a}x}^2$	Desviación típica
1	143	1.26e-5	1.09e-7	8.1e-6	7.72e-7
2	156	8.52e-6	6.76e-8	2.03e-6	2.45e-7
3	193	5.38e-6	3.34e-8	8.18e-7	1.18e-7
4	274	2.05e-6	8.56e-9	2.7e-7	2.41e-8
5	305	1.28e-6	4.77e-9	7.86e-8	1.15e-8
6	435	5.67e-7	1.44e-9	2.01e-8	3.06e-9

Las figuras 5.86 y 5.87 muestran la convergencia de los indicadores analizados para el caso de formulación en campo eléctrico y el de formulación en campo magnético, respectivamente. Los resultados obtenidos mejoran considerablemente la convergencia del MEF

clásico. Como aspecto negativo, es de destacar el aumento del error producido con el indicador de continuidad de flujo en la resolución en campo eléctrico. Sin embargo, los indicadores de error calculados y mostrados en la tabla 5.9 disminuyen conforme avanza el proceso de adaptación. Este mal comportamiento del error en el autovalor, como se comentó en el ejemplo anterior, puede deberse al mal condicionamiento de la matriz B del autosistema. La figura 5.88 muestra la evolución del número de condición de la matriz B en las distintas simulaciones con formulación en campo eléctrico. En ella se evidencia el mayor crecimiento de este parámetro para el indicador de continuidad de flujo. Por tanto, para valorar la calidad del indicador por continuidad de flujo (ponderado) es conveniente disponer de un software de resolución de autosistemas robusto que realice un preconditionamiento de las matrices.

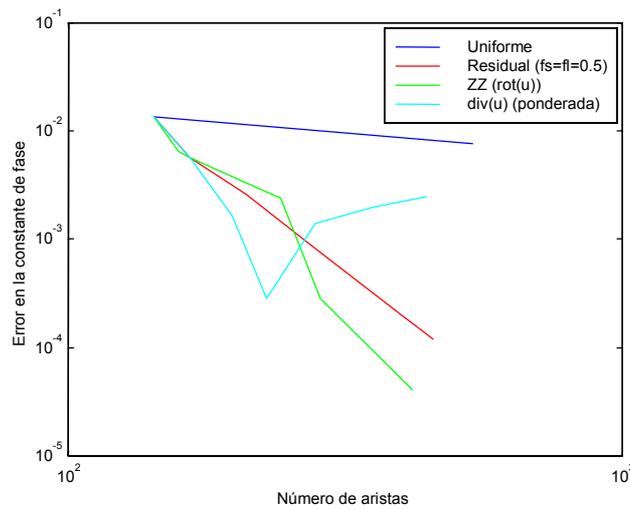


Figura 5.86. Convergencia de los distintos indicadores (refinamiento 1:4) con formulación en campo eléctrico

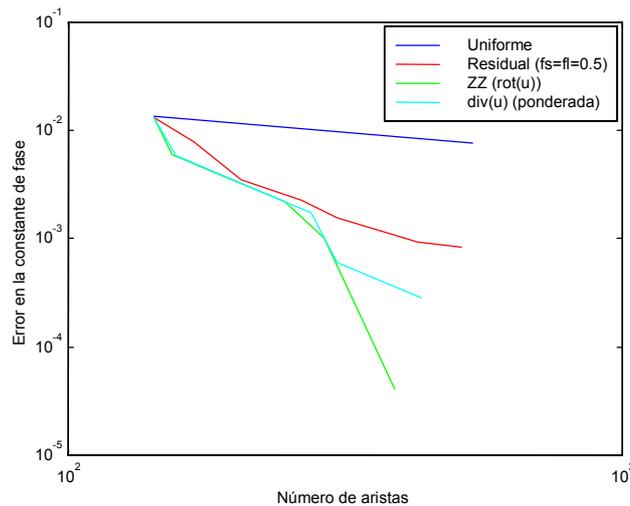


Figura 5.87. Convergencia de los distintos indicadores (refinamiento 1:4) con formulación en campo magnético

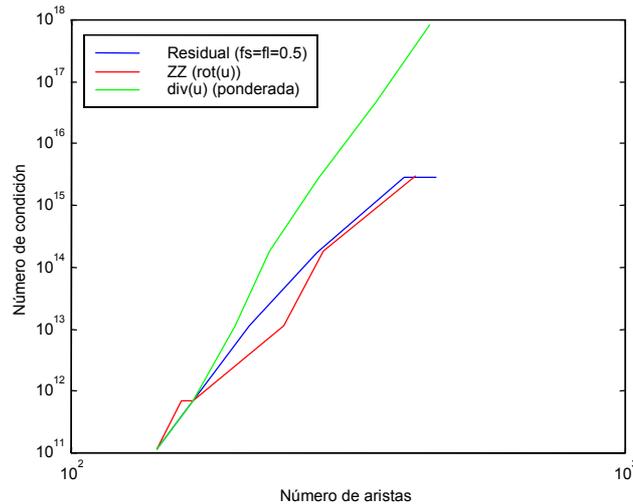


Figura 5.88. Condicionamiento de la matriz B del autosistema $(A + \lambda B)x = 0$ con distintos indicadores y formulación en campo eléctrico (refinamiento 1:4)

5.4.4. Finline Unilateral Encapsulada

En este apartado se analiza una línea finline encapsulada en una carcasa metálica cilíndrica. Esta estructura de guiado de ondas presenta dos características importantes en cuanto al proceso de adaptación se refiere. Por una parte, presenta un contorno curvo, al contrario que los ejemplos anteriores, lo que implica que tendrá lugar una modificación de éste a lo largo del proceso de adaptación. Por otra parte, contiene en su interior conductores de espesor nulo, lo que puede afectar, como se vio en el punto 5.1.3, a la aplicación de indicadores ZZ.

La figura 5.89 muestra esta estructura y sus dimensiones, mientras que en la figura 5.90 se representan las componentes transversal y axial del campo eléctrico en el primer modo, obtenidas mediante una formulación en campo eléctrico, para la mitad de la estructura. De nuevo, aquí se ha aprovechado la simetría de la sección de la línea y la resolución se ha realizado con la mitad de ella imponiendo en el eje de simetría la condición de pared eléctrica. La componente axial es despreciable frente a la transversal, y en ésta se puede apreciar la singularidad que aparece en la cercanía del extremo del conductor interior. Las mallas utilizadas para obtener la convergencia de referencia del MEF clásico se presentan en la figura 5.91.

En esta estructura se han analizado, utilizando la formulación en campo eléctrico, los tres indicadores utilizados en el ejemplo anterior. También se ha aplicado una versión del indicador ZZ basado en el rotacional de la solución que tiene en cuenta la presencia en el interior de la malla de aristas con condición de contorno. Esta versión utiliza las técnicas comentadas en 5.1.3 para mejorar la precisión de la solución recuperada. Por último, se ha querido realizar una *estimación cruzada del error*, entendiendo como tal aquella que se realiza sobre la variable dual a la utilizada en la resolución del problema. En este caso, se ha resuelto el problema con la formulación en campo eléctrico y se ha estimado el error con un indicador de continuidad de flujo magnético ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$).

Las mallas obtenidas se presentan en las figuras 5.92-5.96. En ellas se observa que todos los indicadores detectan correctamente la singularidad. El análisis de las curvas de convergencia obtenidas en las distintas simulaciones (figuras 5.97 y 5.98) constata la mejora lograda respecto al MEF clásico. Se puede apreciar la mejora obtenida al tratar los parches con aristas con condición de contorno. No obstante, es muy probable que la convergencia real en ese caso no sea tan buena como la obtenida con este indicador en la última etapa del proceso. Esta

brusca caída en el error puede deberse a la falta de exactitud del valor de referencia que se supone exacto.

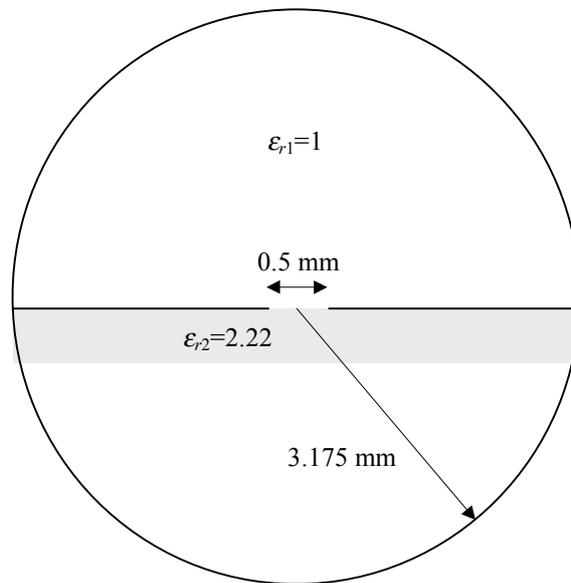


Figura 5.89. Estructura de la finline unilateral

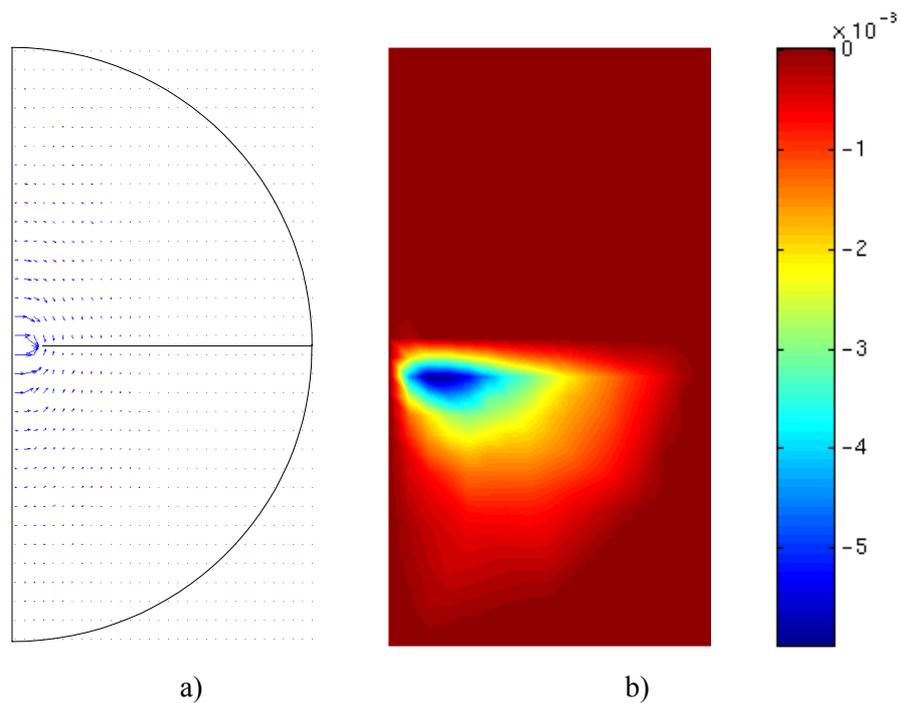


Figura 5.90. Distribución del campo eléctrico en el primer modo: a) componente transversal, b) componente axial

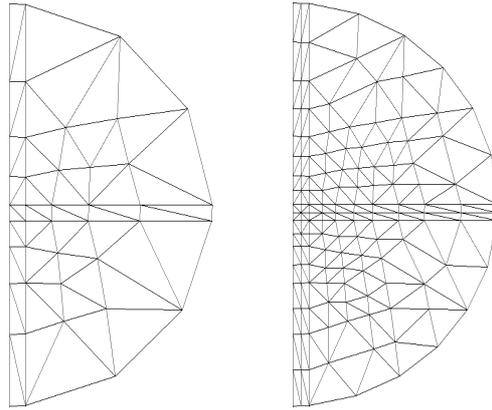


Figura 5.91. Mallas graduales utilizadas en el MEF clásico

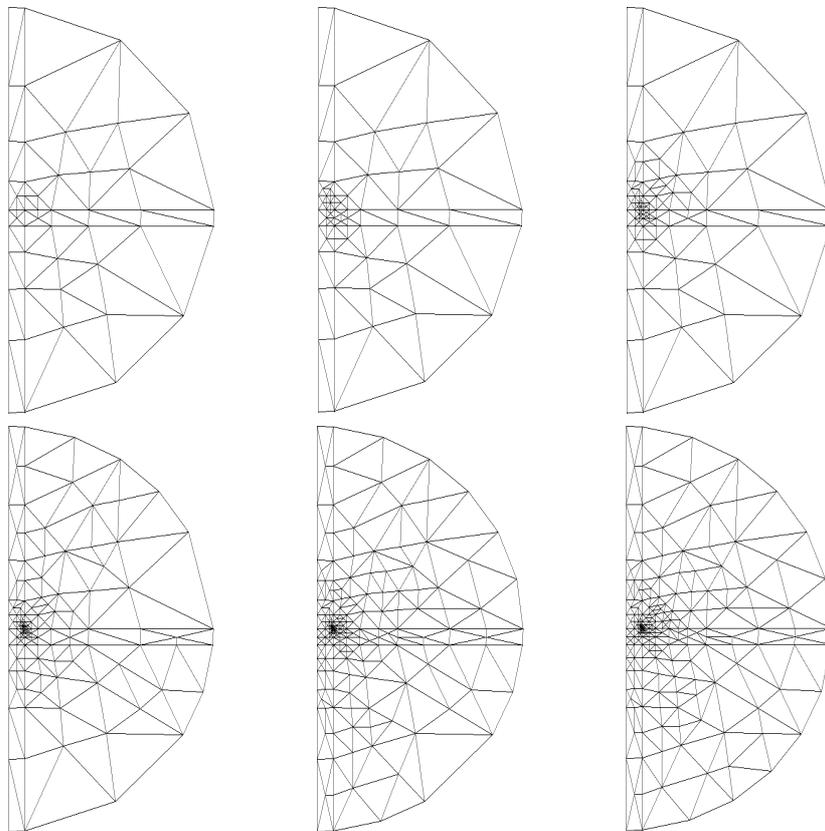


Figura 5.92. Mallas adaptadas (1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª y 6ª) con el indicador residual ($f_s=f_{\bar{r}}=0.5$) y refinamiento 1:4

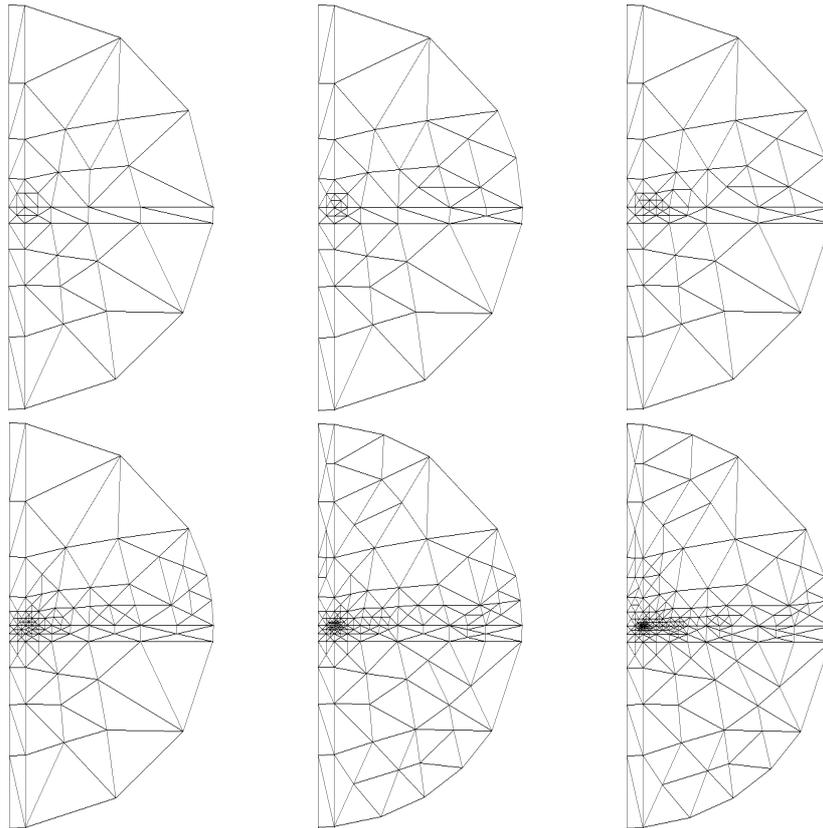


Figura 5.93. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a y 6^a) con el indicador ZZ ($\nabla \times \vec{u}$) y refinamiento 1:4

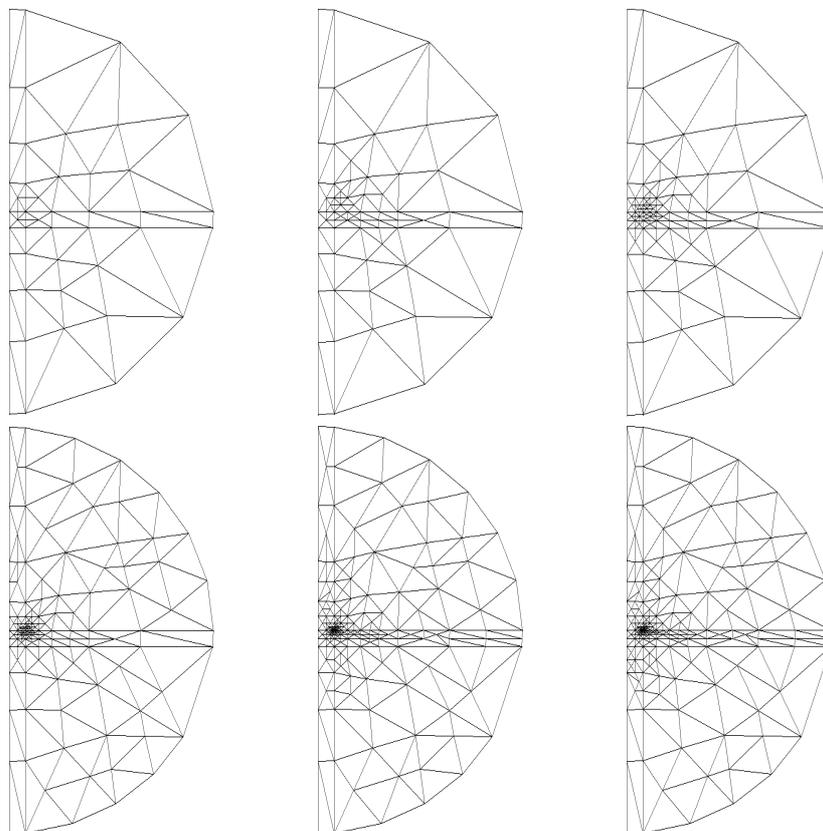


Figura 5.94. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a y 6^a) con el indicador ZZ ($\nabla \times \vec{u}$) y tratamiento de parches con aristas con condición de contorno (refinamiento 1:4)

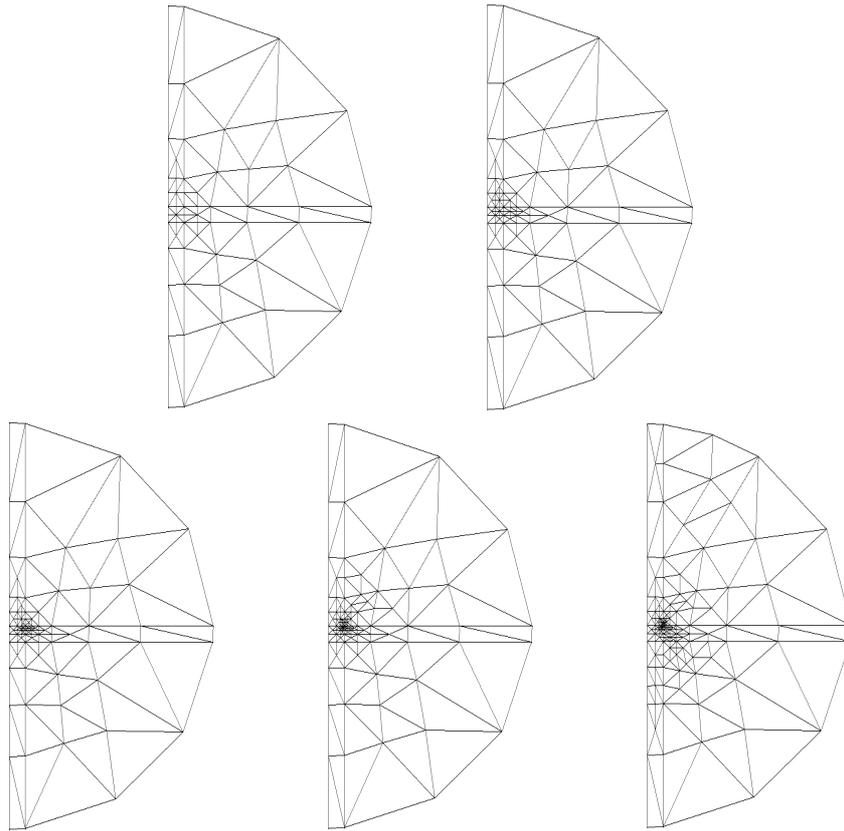


Figura 5.95. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a y 5^a) con el indicador de continuidad de flujo (refinamiento 1:4). Resolución en campo eléctrico, estimación del error en el flujo eléctrico

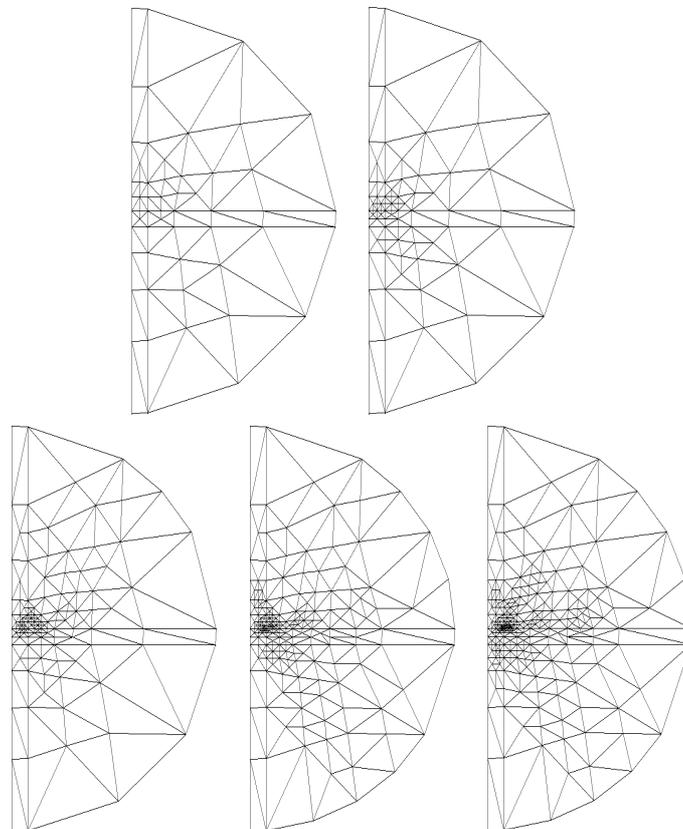


Figura 5.96. Mallas adaptadas (1^a, 2^a, 3^a, 4^a y 5^a) con el indicador de continuidad de flujo (refinamiento 1:4). Resolución en campo eléctrico, estimación del error en el flujo magnético

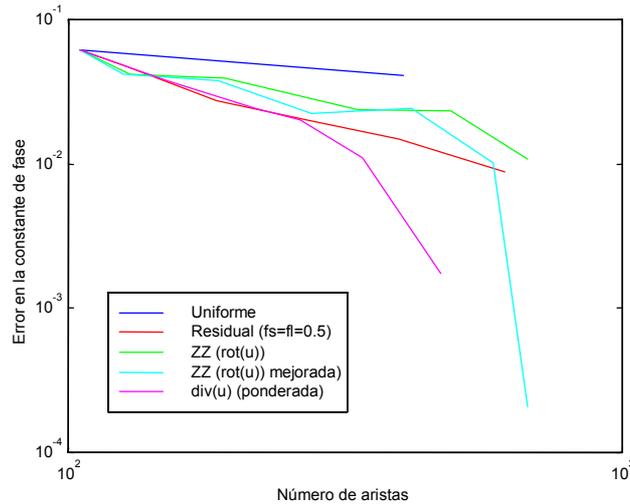


Figura 5.97. Convergencia de los distintos indicadores (refinamiento 1:4) con formulación en campo eléctrico

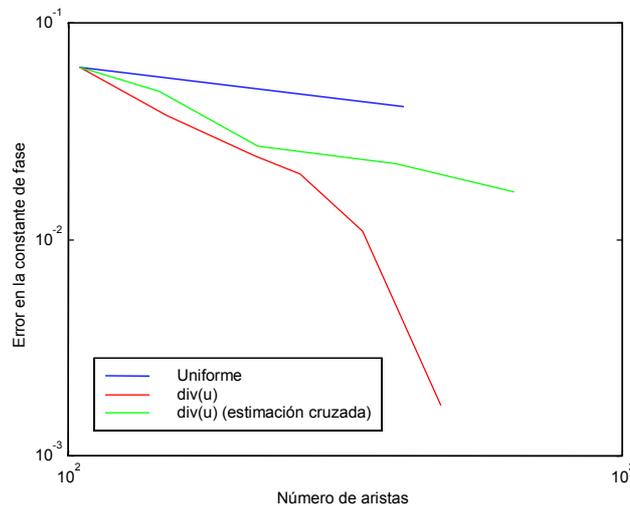


Figura 5.98. Convergencia del indicador por continuidad de flujo (refinamiento 1:4)

5.4.5. Línea Coplanar Encapsulada con Sustrato Anisótropo con Pérdidas

En último lugar se analiza una línea coplanar encapsulada en una carcasa metálica de sección rectangular. Las tiras conductoras interiores tienen, como en el caso anterior, un espesor nulo, y el sustrato sobre el que se encuentran situadas presenta pérdidas y anisotropía total en su permitividad eléctrica:

$$\epsilon_{r2} = \begin{bmatrix} 8 - j0.2 & 4 - j0.1 & 3 - j0.1 \\ 4 - j0.1 & 6 - j0.1 & 4 - j0.2 \\ 3 - j0.1 & 4 - j0.2 & 7 - j0.3 \end{bmatrix} \quad (5.193)$$

Estas características dieléctricas no son habituales y, por tanto, este ejemplo tiene, más bien, un interés académico y se ha elegido con el fin de comprobar el comportamiento de los indicadores desarrollados en el caso más general posible.

La figura 5.99 muestra esta estructura y sus dimensiones, mientras que en la figura 5.100 se representan las componentes transversal y axial del campo eléctrico, obtenida con una formulación en campo eléctrico, en el primer modo para la mitad de la estructura. De nuevo, se ha aprovechado la simetría de la sección de la línea y la resolución se ha realizado con la mitad de ella imponiendo en el eje de simetría la condición de pared magnética. Se puede apreciar que la componente axial es mucho menor que la transversal, y en ésta se observan dos singularidades en los extremos de las tiras conductoras internas.

Las mallas utilizadas para calcular la convergencia que se obtiene con el MEF clásico se muestran en la figura 5.101. La segunda y tercera fueron obtenidas a partir de la primera con sucesivos refinamientos 1:2 de todos los elementos y aplicando con posterioridad las técnicas de reposicionamiento de nodos e intercambio de aristas para mejorar la calidad de sus elementos. Las mallas obtenidas con los tres indicadores se presentan en las figuras 5.102-5.104. En ellas se observa que todos los indicadores detectan correctamente la singularidad.

En este caso, dadas las características dieléctricas del problema, no se ha podido obtener un valor de referencia mediante un programa comercial para calcular, a partir de él, la precisión obtenida. Por tanto, en vez de curvas de convergencia, se presenta en las figuras 5.105 y 5.106 la evolución de la constante de propagación (constante de atenuación y de fase) obtenida en cada proceso de adaptación, y se compara con los resultados del método clásico.

En todos los casos se aprecia una mejora de la convergencia respecto al MEF clásico. Sin embargo, mientras el valor asintótico para los dos primeros indicadores parece coincidir, el obtenido con el indicador de flujo resulta inferior. Este hecho parece indicar que, aunque este último indicador detecta correctamente las zonas de singularidad, las sobreestima e impone un refinamiento excesivo en éstas respecto al resto del dominio, lo que se traduce en una desviación del autovalor, debido al mal condicionamiento de la matriz, que no se corrige en las siguientes etapas.

También es interesante destacar que, mientras en los ejemplos anteriores el autovalor obtenido en el proceso de adaptación se acerca monótonamente a su valor exacto (de modo decreciente cuando se resuelve con la formulación en campo eléctrico, y creciente cuando se hace con la de campo magnético), en este caso se observa que no existe tal monotonía en el acercamiento al valor asintótico. Este hecho puede ser debido a las características anisótropas o de pérdidas del sustrato.

Por último, en la figura 5.107 se representa la distribución de la densidad del error estimado con los tres indicadores analizados en sus respectivas mallas adaptadas y en la segunda malla uniforme de la figura 5.101. Se han representado las mallas adaptadas que presentan un número de aristas similar al de la malla uniforme. Este número para cada una de ellas es:

- Malla uniforme: 384 aristas.
- Segunda malla adaptada con el indicador residual: 395 aristas.
- Tercera malla adaptada con el indicador ZZ: 433 aristas.
- Cuarta malla adaptada con el indicador de continuidad de flujo: 414 aristas.

Es evidente, a la vista de estas distribuciones, que los tres indicadores de error consiguen crear mallas que confinan el error en las zonas de singularidad en mayor medida que las mallas uniformes.

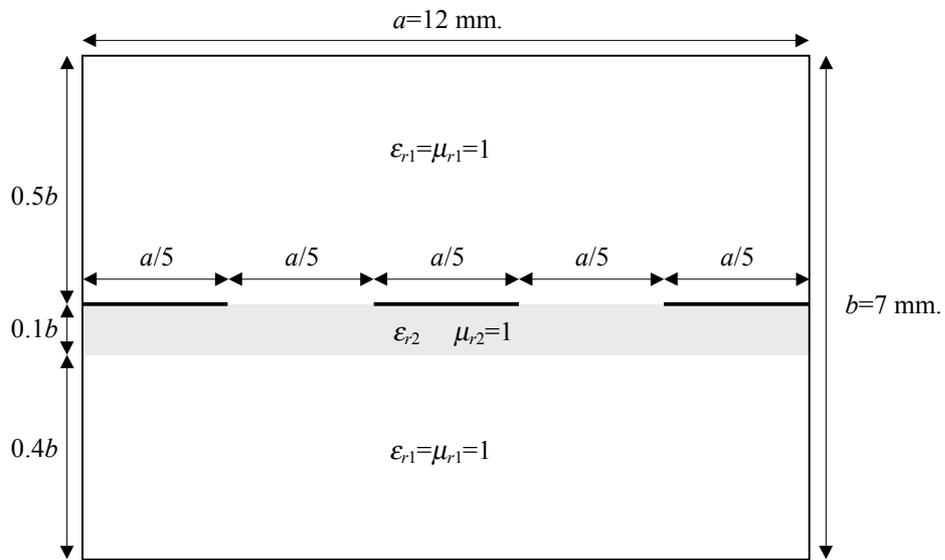


Figura 5.99. Estructura de la línea coplanar encapsulada

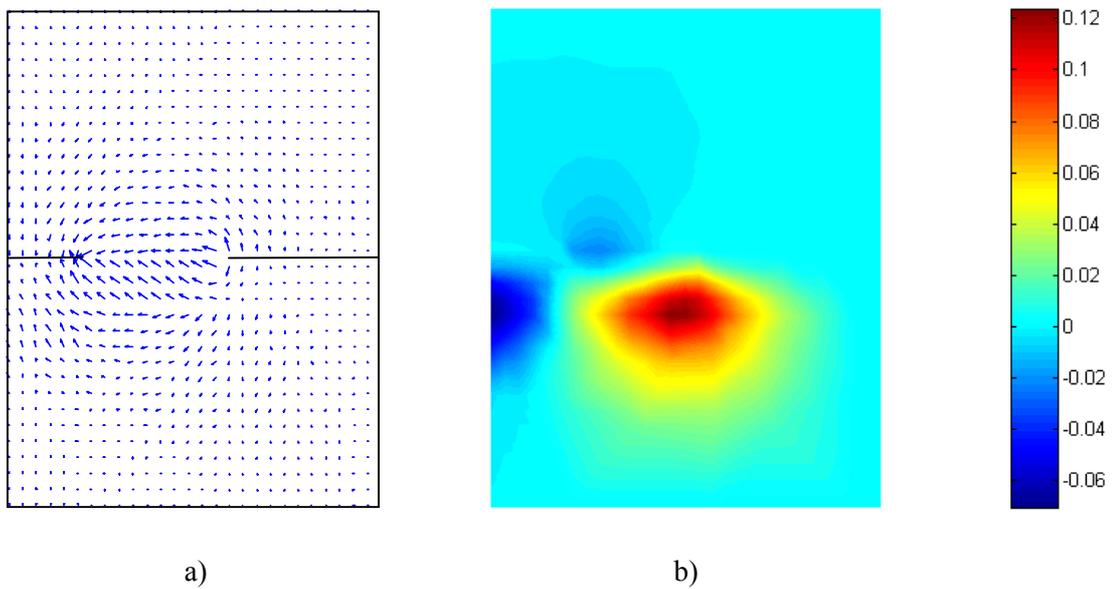


Figura 5.100. Distribución de las componentes transversales (a) y axial (b) del campo eléctrico para el primer modo de la línea coplanar encapsulada

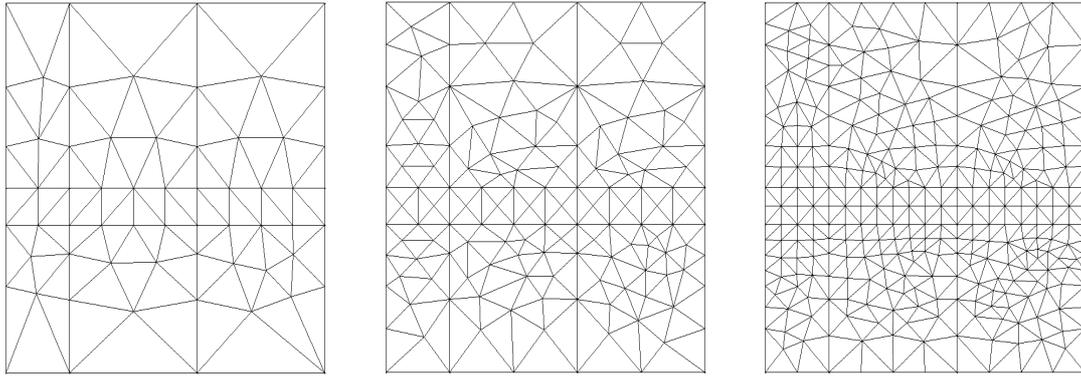


Figura 5.101. Mallas utilizadas en el MEF clásico

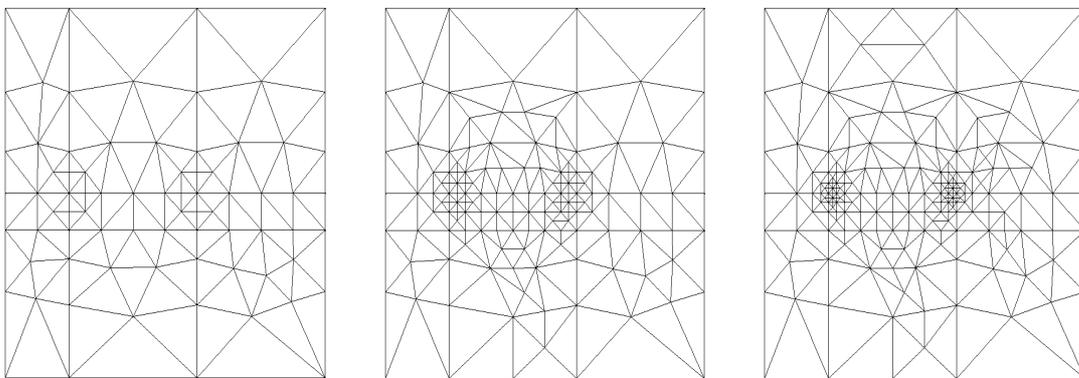
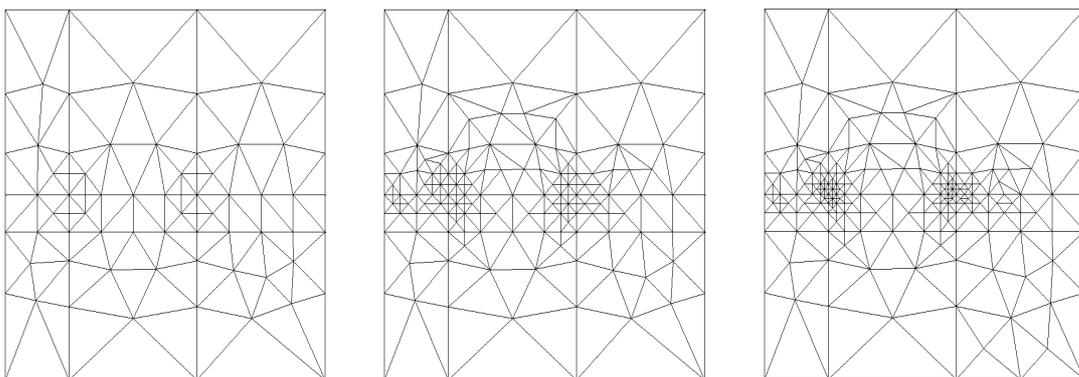
Figura 5.102. Mallas adaptadas (1ª, 2ª y 3ª) con el indicador residual ($f_s=f=0.5$), refinamiento 1:4 y resolución en campo eléctrico

Figura 5.103. Mallas adaptadas (1ª, 3ª y 4ª) con el indicador ZZ, refinamiento 1:4 y resolución en campo eléctrico

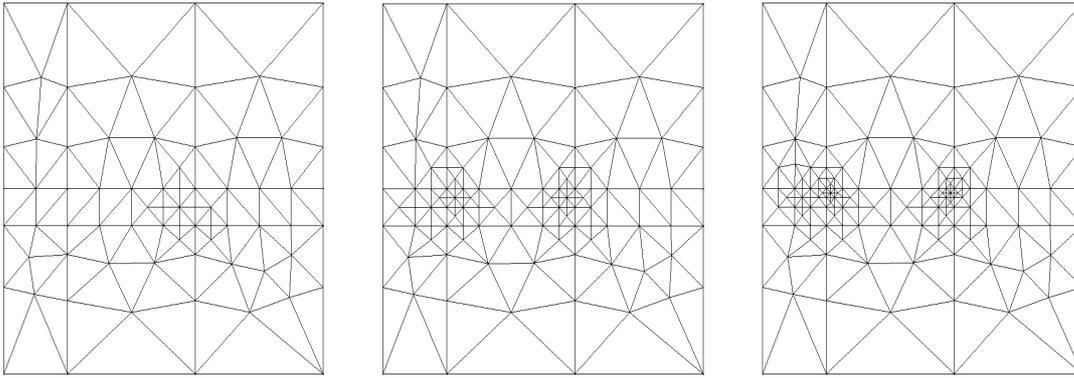


Figura 5.104. Mallas adaptadas (1ª, 3ª y 4ª) con el indicador por continuidad de flujo, refinamiento 1:4 y resolución en campo eléctrico

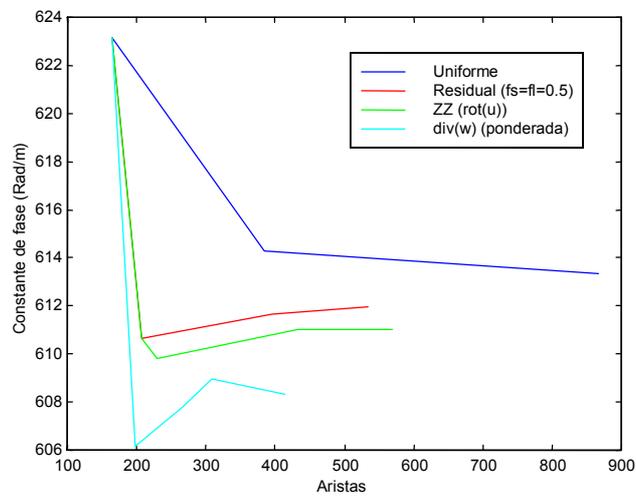


Figura 5.105. Constante de fase obtenida con mallas no adaptadas y en el proceso de adaptación con los distintos indicadores

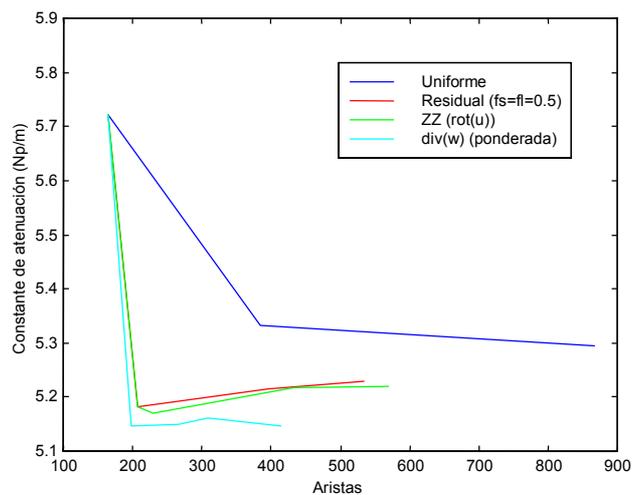


Figura 5.106. Constante de atenuación obtenida con mallas no adaptadas y en el proceso de adaptación con los distintos indicadores

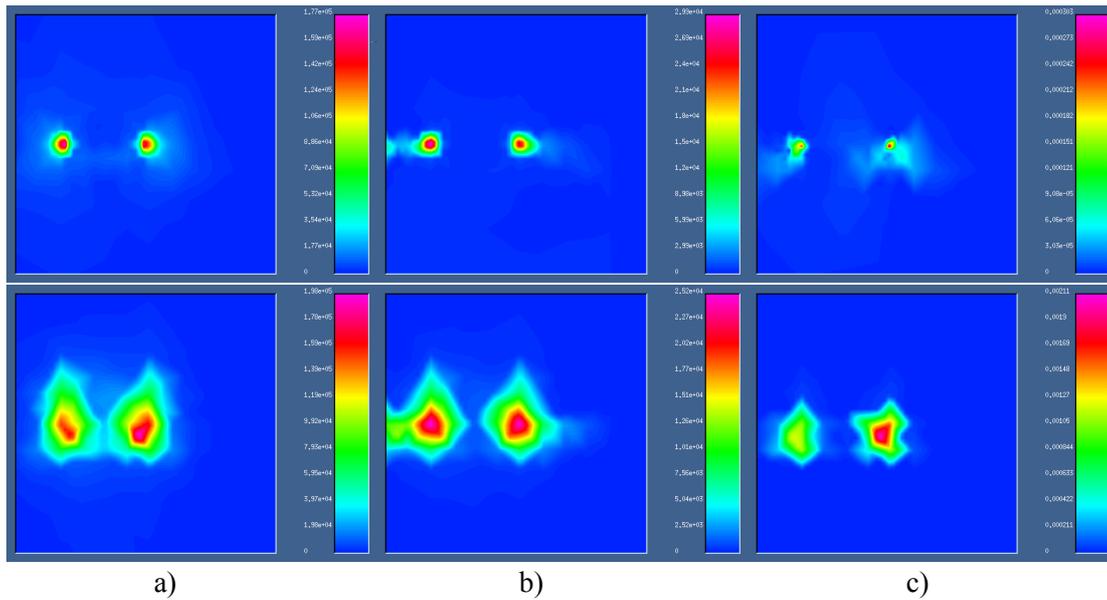


Figura 5.107. Distribución de la densidad del error estimado con el indicador residual (a), el indicador ZZ (b) y el indicador de continuidad de flujo (c) en mallas adaptadas (arriba) y uniformes (abajo) con un número similar de aristas.

Capítulo 6.

CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

A lo largo de la primera parte de esta tesis (capítulos 2, 3 y 4) se ha presentado una metodología multibloque de generación de mallas superficiales y volumétricas a partir de la discretización del contorno del dominio del problema, y un conjunto de métodos o técnicas de mallado que se enumeran a continuación:

- Dominios bidimensionales:
 - Generación de mallas triangulares, cuadriláteras y mixtas (estructuradas y no estructuradas) en dominios cuadriláteros.
 - Generación de mallas triangulares, cuadriláteras y mixtas (estructuradas y no estructuradas) en dominios triangulares.
 - Generación de mallas triangulares, cuadriláteras y mixtas (estructuradas y no estructuradas) en dominios poligonales convexos.
 - Generación de mallas triangulares, cuadriláteras y mixtas (estructuradas y no estructuradas) en dominios de geometría arbitraria mediante su descomposición en subdominios triangulares, cuadriláteros o poligonales convexos.
- Dominios superficiales tridimensionales:
 - Generalización de las técnicas bidimensionales en superficies definidas por su contorno.
 - Técnicas de transformación de superficies cuádricas y de revolución en superficies planas y definidas por su contorno, respectivamente, con el fin de aplicar sobre ellas los métodos anteriores.

Todas estas técnicas se caracterizan por su bajo coste computacional y la calidad de las mallas generadas.

- Dominios volumétricos:
 - Generación de mallas hexaédricas o tetraédricas estructuradas en dominios hexaédricos cuya discretización del contorno permita la generación de una retícula.
 - Generación de mallas tetraédricas no estructuradas en dominios de geometría arbitraria.

El coste computacional de los primeros métodos es muy bajo. Sin embargo, en el segundo caso, este coste se incrementa considerablemente por tratarse de un método mucho más general.

En todas estas situaciones bi- y tridimensionales se han desarrollado técnicas de suavizado o mejora de calidad de la malla a posteriori que se han mostrado muy eficientes.

De todos los anteriores métodos de discretización, se pueden considerar como contribuciones originales de esta tesis:

- La función de interpolación para la discretización de áreas triangulares con el mismo número de divisiones en sus tres líneas, presentada en (2.29).
- El método FARG de discretización de áreas cuadriláteras, triangulares y poligonales convexas.
- El método FARG3D de discretización de superficies definidas por su contorno y, mediante transformaciones de coordenadas adecuadas, de superficies cuádricas y de revolución.

- Los distintos criterios en la generación de elementos aplicados a la generación de mallas tetraédricas no estructuradas mediante el método de frente de avance volumétrico.

En la segunda parte de la tesis (capítulo 5) se han desarrollado algoritmos para la generación automática e inteligente de mallas, es decir, la creación de discretizaciones del dominio que aúnen un bajo coste computacional (pocas incógnitas) y una alta precisión en la solución. Con este fin se han desarrollado los siguientes tipos de indicadores de error para problemas bidimensionales (tanto en elementos triangulares como cuadriláteros):

- Indicadores de error basados en el residuo de la ecuación vectorial de onda y las condiciones de contorno en las aristas de cada elemento.
- Indicadores de error basados en la comparación del rotacional de la solución con un rotacional *suavizado* continuo a lo largo del dominio, obtenido a partir del rotacional de la solución.
- Indicadores de error basados en la continuidad de flujo (eléctrico o magnético) en las aristas interiores de la malla.

De estos tres indicadores, los dos últimos son aportaciones originales de la tesis.

Tras la estimación del error se debe enriquecer o refinar la malla en aquellas zonas o elementos que presenten un mayor error. Para ello se han desarrollado dos técnicas de refinamiento *tipo h* local conforme en triángulos:

- Refinamiento de *arista más larga* o 1:2.
- Refinamiento regular o 1:4.

En ambos casos se mantiene la conformidad de la malla, es decir, ésta no presenta nodos “suelos”, y la irregularidad de los elementos se encuentra acotada, pues se garantiza que el mínimo ángulo en cualquiera de las mallas de adaptación es, como mínimo, la mitad del ángulo mínimo de la malla inicial.

Estos indicadores y técnicas de refinamiento han sido validados mediante la aplicación de procedimientos adaptativos en distintas líneas de transmisión. De los resultados obtenidos con ellos se puede concluir que el indicador *ZZ* basado en el rotacional recuperado de la solución completa \vec{u} de la solución presenta un comportamiento similar al indicador residual, mientras que el indicador basado en la continuidad de flujo detecta de un modo más fino las singularidades del problema, siendo necesaria, para una correcta evaluación del mismo, la utilización de preconditionadores que disminuyan el número de condición de la matriz B del autosistema $(A + \lambda B)x = 0$ y permitan el estudio de problemas que presenten fuertes singularidades, como los analizados en el capítulo 5.

Asimismo, la tesis aporta una técnica de estimación del error en el autovalor, aplicable en aquellos casos donde el acercamiento al autovalor exacto se realiza de forma monótona tanto con formulación en campo eléctrico como con formulación en campo magnético.

Como ampliación teórica, se han desarrollado también indicadores de error de la misma naturaleza que los reseñados anteriormente, para problemas tridimensionales en cavidades resonantes. Una posible continuación de esta tesis puede consistir en la validación de estos indicadores y en el desarrollo de otros para problemas tridimensionales, así como el diseño de métodos de refinamiento tridimensional tipo Delaunay que permitan un rápido enriquecimiento de la malla en el proceso adaptativo.

Otras líneas futuras de investigación pueden encontrarse en:

- El diseño de técnicas de mallado superficial en superficies arbitrarias.
- El desarrollo de otros métodos de mejora a posteriori de la malla, sobre todo en el caso volumétrico, basados principalmente en la descomposición o unión de elementos vecinos en otros más regulares.
- El desarrollo de un método de mallado cuadrilátero que posibilite la aplicación del método adaptativo en mallas cuadriláteras.

- El desarrollo de otros indicadores de error de recuperación basados en el promediado de la solución, u otra función relacionada con ella, en parches de elementos.
- La generalización de los estimadores desarrollados a elementos de orden superior.
- La implementación del refinamiento *tipo p* o una combinación *hp*, y la comparación de éstos con los desarrollados en esta tesis.
- La aplicación del método adaptativo a problemas con excitación, tanto en dos como en tres dimensiones.

Apéndice 1.

NOMENCLATURA Y ESTRUCTURAS DE DATOS EN LA GENERACIÓN DE MALLAS

En este apéndice se describe la nomenclatura utilizada para referirse a los distintos componentes de la geometría y del mallado, esto es, los datos de entrada o definición de la estructura a mallar, y los de salida, que componen la discretización del dominio.

Las ideas fundamentales en las que se basa la estructuración de estos datos son dos: La primera consiste en hacer una separación entre los datos que definen la geometría del espacio a mallar y los datos del mallado en sí. Así, una línea de la geometría está determinada por dos puntos de la geometría, mientras que una arista del mallado está definida por dos nodos de la malla. Son dos definiciones paralelas pero que hacen referencia a distintos ámbitos: la geometría del problema y la malla. La segunda es la utilización de una estructura jerárquica que facilite la gestión de los componentes de la geometría y de la malla. De esta forma, un componente de dimensión superior se forma a partir de los de dimensión inmediatamente inferior, como veremos más adelante.

Aunque algunos componentes de las estructuras de geometría y mallado en dos dimensiones son directamente extrapolables a tres dimensiones, resulta evidente la necesidad de desarrollar estructuras jerárquicas de geometría y mallado independientes en dos y tres dimensiones. En este último caso, la tercera dimensión implica un nivel más de jerarquía.

A1.1. Componentes de la Geometría Bidimensional

El enfoque multibloque que se aplica a los métodos desarrollados en el capítulo 2 implica que, a la hora de definir geometrías complejas o con diversas características físicas (materiales y condiciones de contorno) en su dominio, se utilicen áreas sencillas, triangulares, cuadriláteras o poligonales. Estas áreas son las unidades mínimas de mallado y sólo pueden tener en su interior un tipo de material. Lo mismo sucede con las líneas, donde sólo puede definirse una condición de contorno.

Así pues, un dominio arbitrario puede quedar definido por n áreas. Éstas compartirán líneas y puntos entre sí, debiendo mantener una coherencia a la hora de discretizar líneas comunes.

En el ejemplo de la figura A1.1 se ha optado por la división del dominio en subdominios (áreas) cuadriláteros dada la no convexidad del problema. Sin embargo, existen casos en que no es la geometría lo que fuerza a utilizar varias áreas, sino la presencia de distintos materiales en el interior del dominio o, por ejemplo, las distintas características eléctricas del contorno. En la figura A1.2 se puede observar una línea microstrip dividida en un total de 6 áreas cuadriláteras.

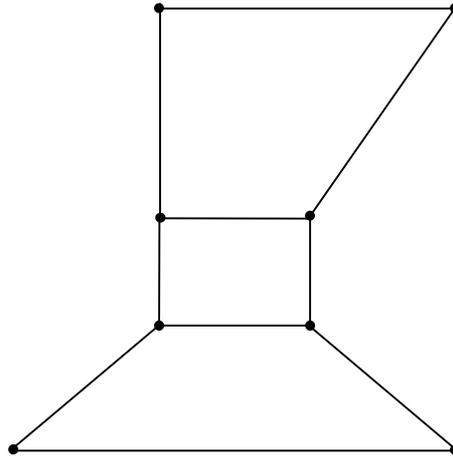


Figura A1.1. Creación de un dominio de malla mediante tres áreas cuadriláteras

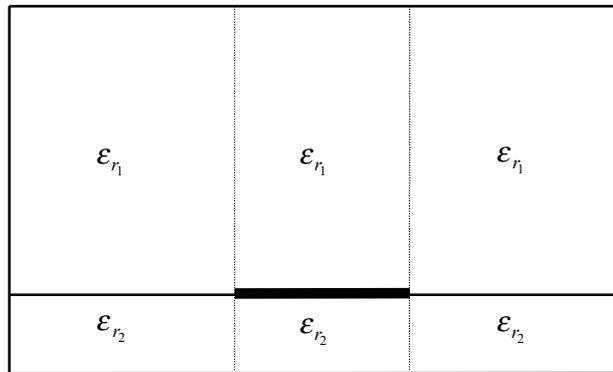


Figura A1.2. División en 6 áreas cuadriláteras de la estructura de una línea microstrip

A continuación se definen los componentes de la geometría del problema:

- **Punto:** es la parte básica y fundamental de la información geométrica, a partir de la cual se genera el resto. Está definido por dos coordenadas cartesianas en el plano.
- **Foco:** es un tipo de punto que, además de su posición, lleva asociado un ángulo para definir una dirección en el plano. Se utiliza en la definición líneas cónicas.
- **Línea:** está definida de forma general por dos puntos, el inicial y el final. En el caso de líneas cónicas también será preciso señalar un foco. Dado que existe la posibilidad, como se describe en el apéndice 2, de discretizar una línea de un modo arbitrario, parece que la opción de línea cónica no tenga mucho sentido, pero existen dos razones que la justifican:
 - Simplifica la discretización de la línea, pues se calculan automáticamente los nodos internos a partir de los dos puntos extremos del arco y el foco, como se describe en el apéndice 2.
 - En el caso de utilizar elementos de orden superior o técnicas de malla adaptativa, el conocimiento del foco permite calcular la posición de los nodos interpolados en la arista. En la figura A1.3 se puede observar una línea recta discretizada en forma de cónica con dos divisiones y otra definida directamente como cónica en las que se han utilizado elementos de segundo orden, cuyas aristas se dividen en dos aristas interpoladas (línea discontinua). Se puede observar que los nodos interpolados se ajustan mejor a la curva en el segundo caso que en el primero.

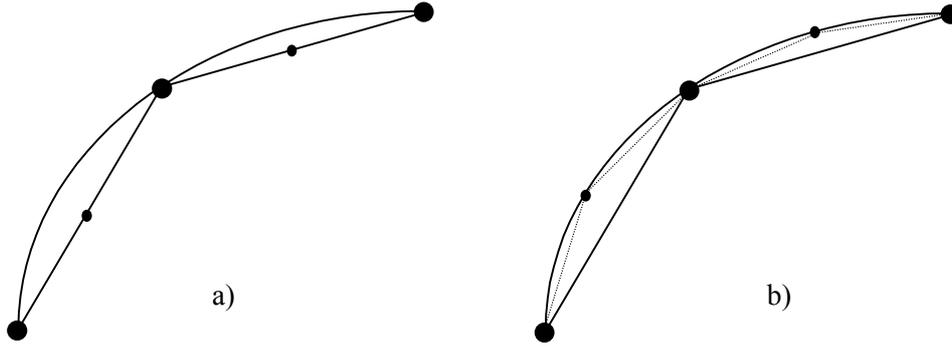


Figura A1.3. Interpolación de nodos en las aristas: a) línea recta, b) línea cónica

En líneas rectas es indiferente cuál de los puntos es el inicial y cuál el final. El orden de éstos sólo se utiliza como criterio en la discretización de la línea y no tiene efectos sobre el resultado final. No ocurre lo mismo con las cónicas, donde se asume que el arco va del punto inicial al final según el sentido positivo matemático (CCW), como se puede observar en la figura A1.4.

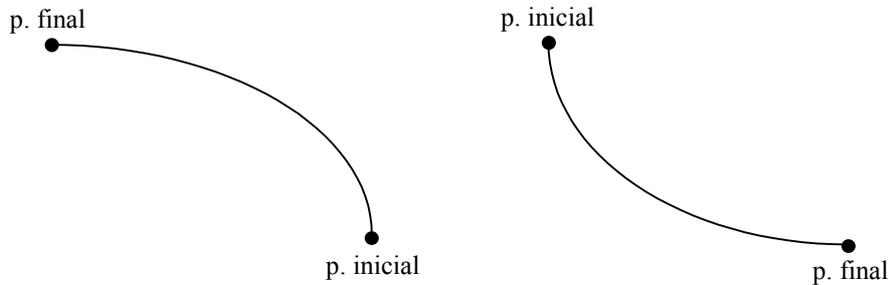


Figura A1.4. Criterio CCW para el sentido del arco en líneas cónicas

- **Polilínea:** es la unión de varias líneas consecutivas bajo una misma estructura geométrica (figura A1.5), tal que en un determinado momento de la definición de la geometría del problema la polilínea puede ser considerada como una línea definida entre el punto inicial de la primera línea y el punto final de la última.

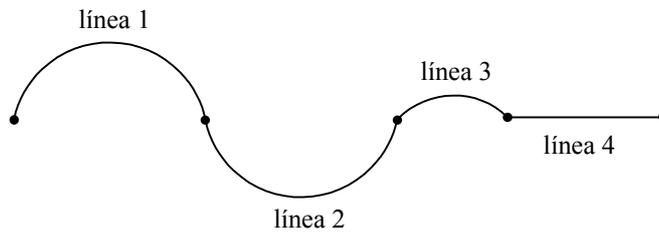


Figura A1.5. Ejemplo de polilínea

Se utiliza una estructura como la polilínea con el objeto de conseguir que la estructura superior considere esa polilínea como una línea. Esto resulta útil en la definición de figuras de tipo triangular o de tipo cuadrilátero con más de tres o cuatro lados (figura A1.6). De este modo se pueden aplicar los métodos de mallado desarrollados para este tipo de áreas.

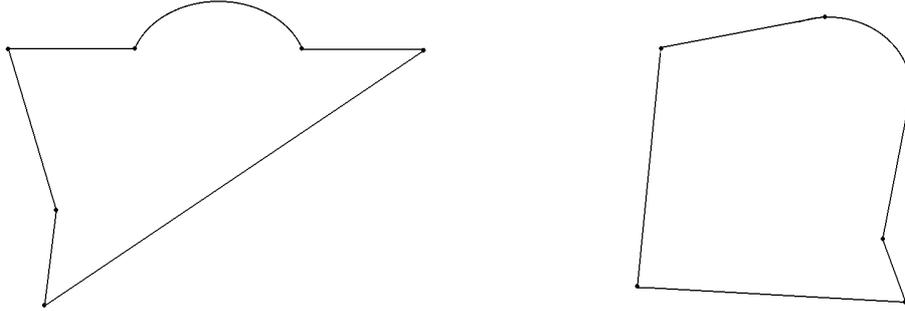


Figura A1.6. Áreas triangulares y cuadriláteras definidas mediante polilíneas

- **Área:** está definida por las líneas del contorno, las cuales deben definir un espacio cerrado y no deben cruzarse entre sí. En la figura A1.7 se presenta un ejemplo de definición de área. En este caso, ésta puede ser definida como un área triangular, como una cuadrilátera o, en general, como un área poligonal.

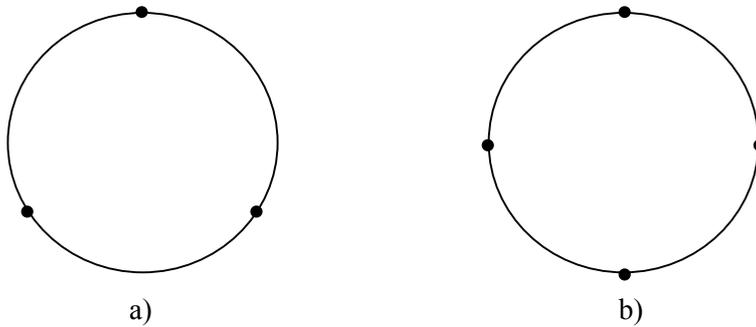


Figura A1.7. Definición de un círculo: a) con un triángulo, b) con un cuadrilátero

La definición del área debe hacerse indicando sus líneas o sus puntos consecutivos, como muestra la figura A1.8. En este caso, el sentido elegido es irrelevante.

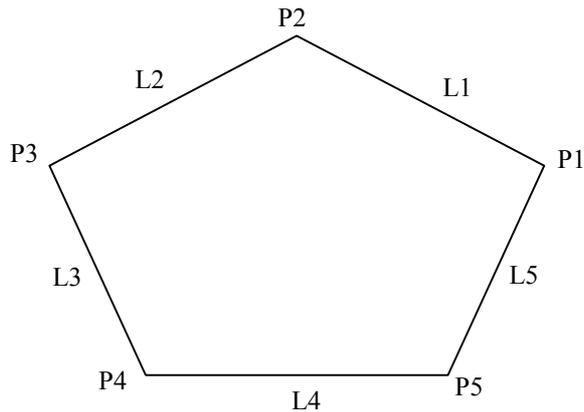


Figura A1.8. Definición de área a partir de sus líneas o puntos

A1.2. Componentes de la Malla Bidimensional

Las distintas estructuras que se requieren para la completa definición de la malla en dominios bidimensionales son:

- **Nodo:** es una estructura análoga al punto de la geometría. También se define a partir de dos coordenadas en el plano. Los nodos se crean en la discretización de líneas o áreas.
- **Arista:** está definida por los dos nodos de sus extremos. Normalmente, la arista es la recta que une dichos nodos. Sin embargo, en el caso de pertenecer a una línea cónica, se puede conocer su curvatura, si se pretende utilizar elementos curvos, elementos de orden superior o mallado adaptativo, a partir de su pertenencia a la línea.
- **Elemento:** en dos dimensiones el elemento final del mallado es un figura plana cerrada por aristas. Esta figura puede ser un triángulo o un cuadrilátero, dependiendo del número de aristas que la formen.

A1.3. Parámetros Físicos del Problema

Además de la descripción de la geometría del dominio y de la conectividad de la malla, es necesario, para la completa definición del problema, conocer las propiedades físicas asociadas a éste, esto es, el material (permitividad eléctrica y permeabilidad magnética) asociado a cada elemento y las condiciones de contorno del problema asociadas a algunos nodos y aristas. Por lo tanto, resulta evidente la necesidad de que los componentes de la malla dispongan de esta información para que, en la resolución posterior del problema mediante el MEF, sea utilizada adecuadamente. Asimismo, es interesante que los componentes de la geometría también dispongan de ella, pues de esta forma se pueden desarrollar mecanismos de herencia desde componentes de la geometría a sus análogos en la malla. Por ejemplo, un área a la que se asigna un determinado material puede transferir esta propiedad a los elementos generados tras su mallado.

A1.4. Información de Gestión de Malla

Hasta ahora se ha descrito la información de geometría, de conectividad y física necesaria para tener completamente definido el problema y que éste pueda ser resuelto mediante el MEF. No obstante, se precisa otro tipo de información asociada a la comentada anteriormente y que la complementa con el fin de simplificar las rutinas de gestión de la malla, entendiendo por gestión el control sobre ésta y la posibilidad de realizar ciertas operaciones en ella, como borrar componentes de la malla, reposicionar nodos, intercambiar aristas, seleccionar componentes, asignar propiedades, etc. Este tipo de información relaciona componentes de la geometría con componentes de la malla, y componentes de la malla entre sí. A continuación se enumeran los atributos de este tipo que presentan los distintos componentes de la geometría y el mallado.

- **Punto:** nodo asociado.
- **Línea:** arista inicial y final de las que componen su discretización. Dado que las aristas en una línea siguen una numeración consecutiva, conociendo la primera y la última se conocen todas ellas.
- **Área:** elementos inicial y final, aristas inicial y final internas, nodos inicial y final internos. Con esta información, y por la misma razón que en el caso de la línea, se conocen todos los componentes de la malla que pertenecen a un área.
- **Nodo:** punto asociado y nodos vecinos, es decir, aquéllos con los que comparte arista.
- **Arista:** línea a la que pertenece y elementos vecinos, es decir, elementos que la comparten.
- **Elemento:** área a la que pertenece y tipo de elemento (triangular o cuadrilátero).

Como se ha comentado anteriormente, esta información no es absolutamente necesaria, pero sí muy útil. Esta utilidad se refleja, por ejemplo, en la rutina de reposicionamiento de nodos descrita en el punto 2.6.1. En ella es necesario conocer los nodos vecinos de cada nodo

interior de un área. Sin la información de estos nodos vecinos sería necesaria una búsqueda de orden n para cada nodo, esto es, se trataría de un proceso con un coste computacional $O(n^2)$. Sin embargo, si esta información es conocida, este reposicionamiento sólo requiere un coste $O(n)$.

A1.5. Componentes de la Geometría Tridimensional

Como ya se comentó en la introducción de este apéndice, estas estructuras son similares a las bidimensionales; sin embargo, al tener un grado más de libertad, en ocasiones es preciso no sólo una coordenada más, sino otro tipo de información para poder representar una figura sin ambigüedad. Los componentes de geometría son los siguientes:

- **Punto:** al igual que en dos dimensiones, es la parte básica y fundamental de la estructura geométrica, y de la que se obtienen el resto de componentes. Está definido por tres coordenadas cartesianas en el espacio.
- **Eje:** representa una dirección en el espacio y puede definirse mediante dos puntos que marcan un vector director, o expresarlo en función de los ángulos de las coordenadas esféricas (φ, θ) .
- **Línea:** en el caso de líneas rectas, éstas están definidas por dos puntos, el inicial y el final. Si se trata de líneas cónicas, además de los puntos extremos también es preciso señalar un foco y un eje. El eje es necesario para definir sin ambigüedad la línea cuando los extremos del arco y el foco están alineados, como se muestra en la figura A1.9. Como se ha comentado arriba, el eje es un tipo de estructura independiente; sin embargo, el foco es simplemente un punto con una orientación asociada.

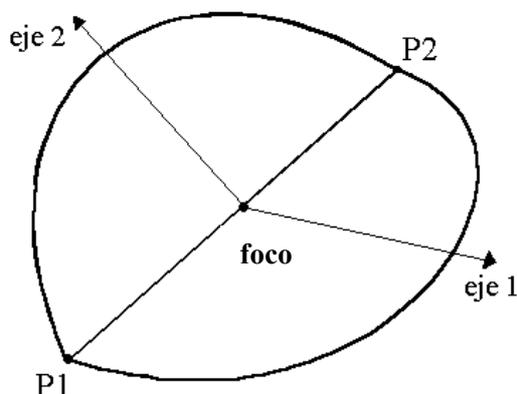


Figura A1.9. Dos posibles líneas cónicas con los mismos puntos y foco

- **Polilínea:** es la unión de varias líneas consecutivas bajo un mismo componente geométrico. Esto permite la definición de líneas más complejas a partir de líneas rectas o curvas más sencillas. Posteriormente, estas polilíneas se pueden utilizar en la definición de superficies.
- **Superficie:** está definida por las líneas del contorno, el cual debe ser cerrado, que delimitan el espacio que se pretende definir. Como en el caso bidimensional, las líneas o puntos necesarios para la definición de la superficie se deben introducir ordenadamente. Esto sería suficiente para una superficie plana, pero cuando las líneas del contorno son curvas y se pretende definir superficies con una determinada ecuación, son necesarios más datos para definir la superficie completamente. Los diferentes tipos de superficies bajo consideración son:
 1. Plana o definida por su contorno: no requiere más información.
 2. Esférica: se necesita un punto adicional (el centro).

3. Elipsoidal: se necesitan dos puntos adicionales (el centro del elipsoide y el foco del mismo) junto con un eje que defina el eje principal del elipsoide.
 4. Paraboloide elíptico: al igual que en el caso anterior, se requieren dos puntos (el vértice y el foco) y un eje.
 5. Revolución: se necesita un eje, que es justamente el de revolución.
- **Polisuperficie:** es la unión de varias superficies bajo una misma figura geométrica, que será tratada como una única superficie. El objetivo es el mismo que el visto para la polilínea, es decir, que la estructura superior, en este caso el volumen, considere una polisuperficie como una única superficie. Así se puede definir un volumen hexaédrico con más de seis superficies (figura A1.10). El concepto de polisuperficie es útil cuando la superficie que se desea definir se pueda crear a partir de otras superficies más sencillas, o cuando ésta presenta regiones con propiedades distintas. En ese caso, la utilización del concepto de polisuperficie reduce el número de volúmenes necesarios.
 - **Volumen:** se define mediante las superficies que lo determinan y que crean un espacio cerrado. Ésta es la estructura más alta de la jerarquía geométrica.

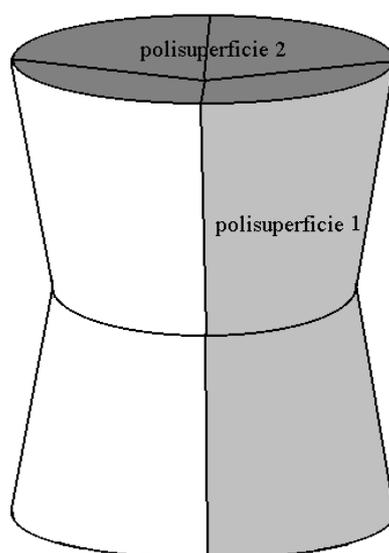


Figura A1.10. Volumen definido mediante polisuperficies

A cada uno de estos componentes se le puede añadir, como en el caso bidimensional, información referente a las condiciones de contorno (en puntos, líneas y superficies) o el tipo de material (en volúmenes). Este tipo de información puede ser heredada por aquellos componentes de la malla que se derivan del correspondiente componente geométrico.

Existe un caso particular de volumen que es creado de una manera mucho más estricta, ya que es mallado utilizando otro procedimiento que el seguido en el caso general. Es el caso del hexaedro discretizado mediante el método interpolador descrito en el punto 4.1. Este volumen está formado por seis superficies, planas o curvas. En este caso particular el volumen no se define a partir de las superficies de su contorno, sino que se hace directamente a partir de sus ocho puntos de geometría o vértices. El motivo de esta particularidad es permitir un mayor control sobre la información de geometría y de malla del volumen que permita la aplicación del método interpolador, tanto en su variante de mallado hexaédrico como en la de mallado tetraédrico. El convenio de indicación de los puntos del volumen consiste en introducir primero

los puntos consecutivos de una superficie y a continuación los de la superficie opuesta siguiendo el mismo orden. En la figura A1.11 se muestran algunas posibles combinaciones.

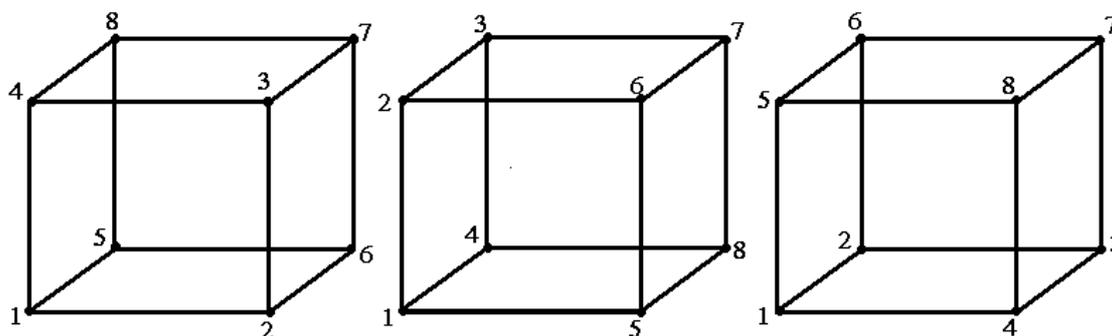


Figura A1.11. Orden de los puntos en la definición de un hexaedro

A1.6. Componentes de la Malla Tridimensional

Los componentes necesarios para la completa definición de una malla tridimensional son:

- **Nodo:** queda definido por sus coordenadas cartesianas en el espacio.
- **Arista:** está definida por dos nodos (el inicial y el final). En ella son de aplicación las mismas consideraciones realizadas en la arista bidimensional con respecto a la curvatura.
- **Cara:** está definida por las aristas que la delimitan. Se pueden generar caras triangulares o cuadriláteras. Las caras pueden ser planas o curvas. En el caso de emplear elementos curvos, de orden superior o métodos adaptativos que puedan requerir un refinamiento en la cara, se puede conocer la curvatura de ésta sabiendo a qué superficie pertenece.
- **Elemento:** está definido por las caras que lo delimitan. El elemento es volumétrico en el mallado tridimensional. Puede ser un tetraedro si tiene cuatro caras triangulares, o un hexaedro si tiene seis caras cuadriláteras (figura A1.12). Se podrían crear elementos con diferentes números de caras (prismas de base triangular o pirámides de base cuadrilátera), pero en esta tesis no se contempla esa posibilidad. Por tanto, se deduce que en un mismo volumen no se pueden encontrar ambos elementos, es decir, tetraedros y hexaedros, ya que para poder conectarlos es preciso el uso de estos otros tipos de elementos. Los tetraedros o hexaedros son la estructura más alta en la jerarquía del mallado.

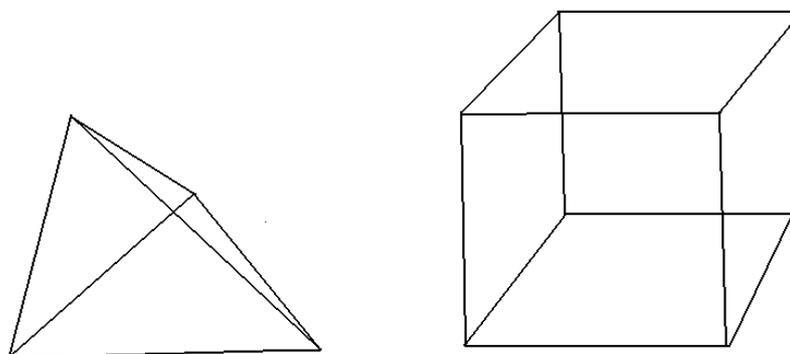


Figura A1.12. Tetraedro y hexaedro irregulares

Al igual que en el caso bidimensional, es conveniente utilizar una serie de estructuras auxiliares que, como ya se comentó, no pertenecen al mallado en sí, pero son útiles en la gestión de la malla y la geometría. En el caso tridimensional son más necesarias, si cabe, porque el control de la malla debe ser más exhaustivo para poder conocer las conexiones entre los diferentes componentes de ésta. Como se ha visto anteriormente, el elemento (tetraedro o hexaedro) es el componente superior en la estructura jerárquica y, por tanto, a partir de un elemento es posible conocer las caras que lo componen, a partir de éstas se pueden conocer sus aristas, y de las aristas se obtienen sus nodos. En el proceso de construcción de la malla hay ocasiones en los que se precisa realizar el proceso inverso, es decir, a partir de un nodo conocer las aristas, caras y elementos a los que pertenece. Con el objeto de cumplir este requerimiento, los componentes de la malla incluyen, además de la información análoga para tres dimensiones a la ya comentada en A1.4, los siguientes atributos:

- **Nodo**: aristas a las que pertenece.
- **Arista**: caras a las que pertenece.
- **Cara**: elementos a los que pertenece. Como una cara sólo puede pertenecer a dos elementos como máximo, esta información puede ser utilizada también para controlar si una cara es del contorno o es interior. Si una cara es interior debe pertenecer a dos y sólo a dos elementos, si es exterior únicamente pertenece a uno.
- **Elemento**: volumen al que pertenece y tipo de elemento (tetraedro o hexaedro).

Apéndice 2.

DISCRETIZACIÓN UNIDIMENSIONAL

La discretización de líneas es el primer paso en todo proceso de generación de malla basado en la discretización del contorno, independientemente del número de dimensiones en que se esté trabajando. Evidentemente, es el tipo de discretización más sencilla, pero, teniendo en cuenta que sin su descripción no se tendría una visión completa de la generación de mallas, se ha considerado interesante introducir en este apéndice las posibilidades que presenta este tipo de discretización y cómo se han llevado a cabo en la presente tesis.

La división de líneas en aristas puede tener dos finalidades:

- Discretizar un dominio unidimensional sobre el que se quiere estudiar un determinado problema mediante el MEF. En este caso, esta discretización es en sí misma el proceso de generación de malla y los elementos serán las propias aristas generadas.
- Discretizar el contorno unidimensional de un dominio bidimensional o tridimensional sobre el que se quiere aplicar el MEF.

En ambos casos se actúa de forma similar. En el primero, el proceso de discretización acaba con ese paso; en el segundo, será necesario mallar posteriormente el área definida por el contorno ya discretizado y, si se trata de un problema tridimensional, generar la malla del dominio volumétrico definido por las áreas o superficies ya malladas.

La discretización unidimensional requiere fundamentalmente dos parámetros:

- El número de divisiones en que se va a dividir la línea.
- El tipo de mallado que se le va a aplicar. En la presente tesis se han desarrollado tres tipos de discretización: uniforme, geométrica e irregular. A continuación se comenta cada uno de estos tipos.

A2.1. Discretización Uniforme

En este tipo de discretización, los nodos creados en el interior de la línea se encuentran equiespaciados en distancia, como se puede observar en la figura A2.1.

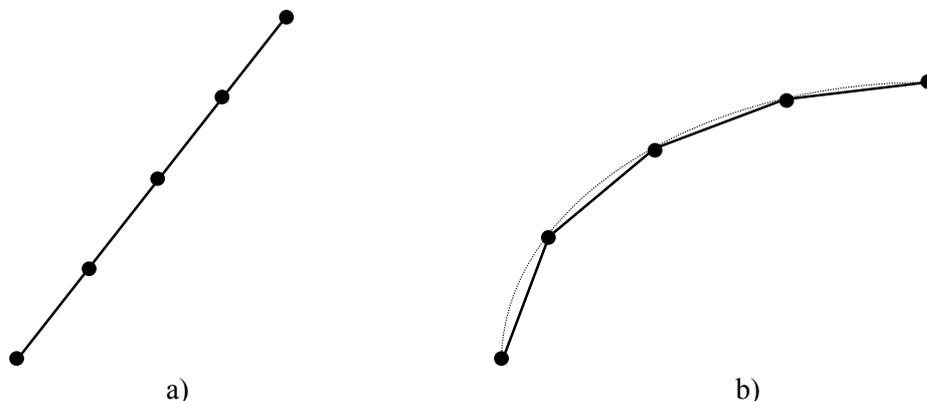


Figura A2.1. Discretización uniforme con 4 divisiones: a) línea recta, b) línea cónica

La generación de nodos equidistantes en una línea recta no plantea problemas. Sin embargo, el caso de líneas cónicas requiere un análisis más detallado.

Como se comenta en el apéndice 1, una línea cónica queda completamente definida por sus puntos inicial y final, su foco y un eje que indica la dirección de la curva en el espacio. Para averiguar la posición de los nodos interiores en la discretización de líneas cónicas se hace uso de la ecuación que relaciona la distancia ρ , con el ángulo φ (figura A2.2), para el caso en que ésta tenga un foco en el origen y sus ejes coincidan con los ejes coordenados:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (\text{A2.1})$$

donde p y e (excentricidad) son dos parámetros constantes de la cónica. En la figura A2.2 se puede interpretar el significado de p y e ($e = \frac{c}{a}$) en el caso de una elipse paralela al eje x .

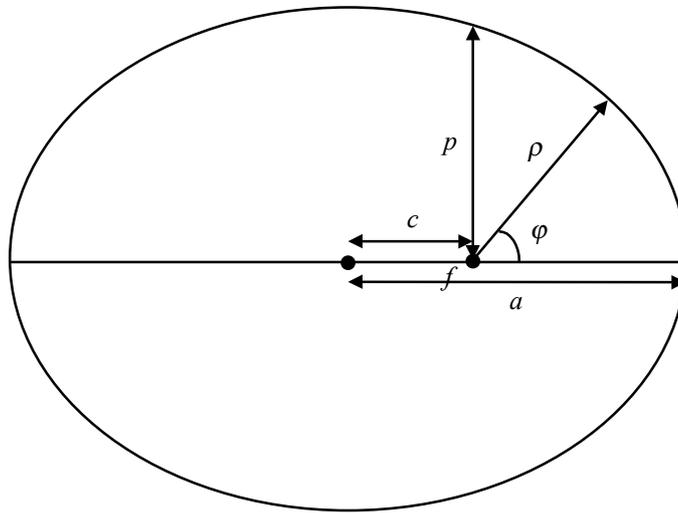


Figura A2.2. Parámetros de la elipse

Se pueden calcular los valores de p y e a partir de los datos de la cónica, esto es, las coordenadas del foco y los puntos extremos del arco cónico. Así, sustituyendo en (A2.1), se obtiene:

$$p = d_1(1 + e \cos \varphi_1) \quad (\text{A2.2})$$

$$e = \frac{d_1 - d_2}{d_2 \cos \varphi_2 - d_1 \cos \varphi_1} \quad (\text{A2.3})$$

donde d_1 , d_2 son las distancias de dos puntos de la cónica al foco de la misma, y φ_1 , φ_2 son los ángulos entre el eje mayor de la cónica y las rectas formadas al unir los puntos con el foco (figura A2.3).

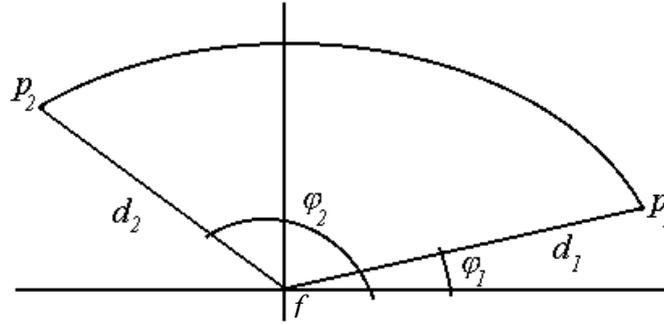


Figura A2.3. Datos de una cónica

Una vez conocidos p y e , se puede obtener el valor de ρ para cada uno de los valores de φ a lo largo de todo el arco. Tras esto, sólo resta transformar estas coordenadas polares en cartesianas para obtener la posición de los nodos interiores de la línea.

Se resuelve así la generación de nodos en cónicas cuyo foco coincide con el origen de coordenadas y se encuentran orientadas según el eje x . En el caso general en que la cónica presenta una situación y orientación arbitraria en el plano (para el caso bidimensional) o en el espacio (para el caso tridimensional) son necesarios traslaciones y giros previos para convertir la cónica arbitraria en una canónica. A continuación se describen los pasos que se realizan con este propósito para el caso tridimensional, siendo el procedimiento bidimensional una particularización de éste:

1. Se realiza una traslación del centro de coordenadas para situarlo sobre el foco de la cónica; esto se consigue restando a cada coordenada las coordenadas del foco (f_x, f_y, f_z) .

$$\begin{aligned}x_f &= x - f_x \\y_f &= y - f_y \\z_f &= z - f_z\end{aligned}\tag{A2.4}$$

2. Se calcula el vector normal al plano que contiene la cónica, para lo cual son necesarios los tres puntos conocidos de ese plano P_1 , P_2 y el foco (en el caso de que estos tres puntos estén alineados, es necesario un cuarto punto que resuelva la ambigüedad y que se puede obtener a partir del eje especificado en la definición de la cónica). Se definen dos vectores con esos tres puntos y el producto vectorial de esos vectores es el vector normal al plano.

$$\vec{u} = (P_{1x} - P_{2x}, P_{1y} - P_{2y}, P_{1z} - P_{2z})\tag{A2.5}$$

$$\vec{v} = (P_{1x} - f_x, P_{1y} - f_y, P_{1z} - f_z)\tag{A2.6}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}\tag{A2.6}$$

3. El eje de la cónica define un vector contenido en el plano de ésta. De modo que se conocen dos vectores perpendiculares entre sí, y que se utilizan para calcular, mediante su producto vectorial, un tercer vector perpendicular a ambos:

$$\vec{w} = \vec{n} \times \vec{e}_j e\tag{A2.7}$$

4. Estos tres vectores, normalizados, $(\hat{n}, \hat{w}, \hat{e}_j e)$ son utilizados como vectores de referencia para construir un nuevo sistema de ejes coordenados. Para realizar la transformación de

coordenadas desde el sistema original a las coordenadas sobre los nuevos ejes, se utiliza una matriz de transformación M . La matriz se crea de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} eje_x & eje_y & eje_z \\ w_x & w_y & w_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \quad (A2.8)$$

5. Se realiza la transformación de los puntos P_1 y P_2 a los nuevos ejes coordenados utilizando la matriz M . De forma general la transformación de un punto P se consigue mediante

$$P' = M \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \quad (A2.9)$$

Una vez finalizada la traslación y la rotación de los ejes, el resultado es la cónica situada en un plano $z' = 0$ y en el origen de ángulos $\varphi' = 0$, por lo que (A2.1) es de aplicación directa.

El siguiente paso consiste en discretizar la línea en aristas, de modo que la longitud de éstas sea similar, es decir, los nodos queden equiespaciados a lo largo de la cónica. Para conseguir esta discretización se plantean algunas posibilidades. Se puede pensar en dividir de forma convencional la recta que une los puntos P_1 y P_2 , para después hacer una proyección de los puntos intermedios sobre la curva. Esta opción se descarta ya que sólo es aceptable cuando la recta está “cerca” de la curva. Cuando no es así, las diferencias entre el arco y la cuerda son demasiado grandes como para no tenerlas en cuenta (figura A2.4a), sobre todo cuando el objetivo es que todos los arcos tengan la misma longitud. Otra opción es dividir la curva mediante divisiones equiángulares, opción válida si la curva es un arco de circunferencia. En caso de cónicas donde no haya correspondencia directa entre el ángulo y el arco, no es válida esta solución (figura A2.4b).

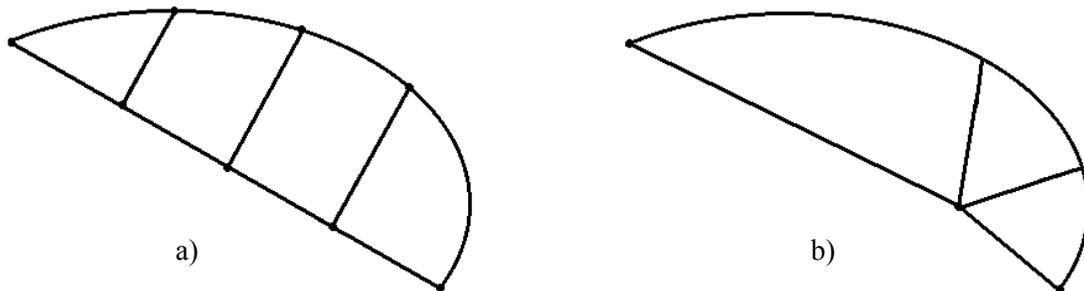


Figura A2.4. Situaciones no válidas al dividir una cónica

La solución que se ha adoptado finalmente es realizar una aproximación de la curva por una serie de puntos q_i . Estos puntos en la curva se calculan realizando una división equiangular del rango de ángulos en el que se está trabajando, y posteriormente se obtiene el punto asociado a cada ángulo. Este muestreo de m puntos debe ser bastante más denso que la discretización que se pretende obtener. Midiendo la distancia entre los puntos consecutivos y sumándola, se consigue una aproximación de la longitud D del arco de la cónica.

$$D = \sum_{i=1}^{m-1} dist(q_i, q_{i+1}) \quad (A2.10)$$

Dividiendo este valor entre el número de divisiones se obtiene el valor de la longitud del arco d_{div} para cada división. Partiendo del primer punto del muestreo se va sumando la distancia entre los puntos consecutivos hasta que se alcance la distancia d_{div} deseada. Cuando esto suceda, ése será el primer nodo interior de la línea, que denominaremos q_{k_1} . El resto de divisiones se obtienen de manera sucesiva partiendo del nodo definido en la división anterior. De forma general, cada nodo se obtiene realizando sumatorios parciales de las distancias entre los puntos auxiliares, hasta que el sumatorio tenga un valor lo más próximo posible a d_{div} . Al dividir la cónica en div divisiones, se crean $div-1$ nodos interiores $q_{k_1} \dots q_{k_n} \dots q_{k_{div-1}}$, con q_{k_n} tal que:

$$\sum_{i=k_{n-1}}^{k_n-1} dist(q_i, q_{i+1}) < d_{div} < \sum_{i=k_{n-1}}^{k_n} dist(q_i, q_{i+1}) \quad (A2.11)$$

De esta manera se consigue la división de líneas cónicas en tramos de la misma longitud, pudiendo ajustar la precisión aumentando el número de divisiones auxiliares.

Una vez realizada la discretización de la cónica en el plano auxiliar, el último paso consiste en deshacer el cambio de plano y volver a situar la cónica en su posición original. Para reposicionar la cónica se aplica el cambio de plano tanto a los puntos que definen la cónica como a los nodos interiores recién creados. Para pasar de un punto del plano auxiliar al plano original se utiliza la misma matriz definida en (A2.8) de la siguiente manera:

$$P = M^T \cdot \begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} \quad (A2.12)$$

Sólo resta deshacer la traslación, para lo cual basta con sumar las coordenadas del foco a cada una de las coordenadas de los nodos que se están tratando.

A2.2. Discretización Geométrica

En ocasiones resulta interesante realizar una discretización de la línea en la que la distribución de los nodos a lo largo de ella siga una progresión geométrica, es decir, que la densidad de nodos sobre la línea vaya disminuyendo paulatinamente desde el llamado *punto de acumulación* hasta el otro punto extremo.

Para conseguir este tipo de mallado es necesario conocer, además del número de divisiones, los siguientes parámetros:

- El punto de acumulación que, lógicamente, debe pertenecer a la línea que se quiere mallar. En sus proximidades, la densidad de nodos será mayor.
- El factor o razón geométrica que debe seguir la progresión. Es válido como tal cualquier número real positivo. En el caso en que éste sea menor que 1, el punto de acumulación será el opuesto al indicado.

En la figura A2.5 se observan dos ejemplos de este tipo de mallado, realizados ambos sobre una línea con cuatro divisiones, con el mismo punto de acumulación.

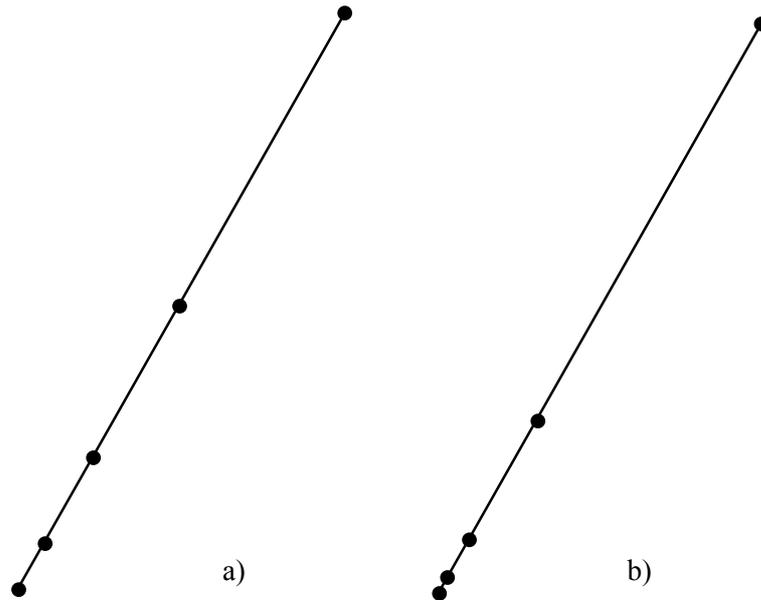


Figura A2.5. Ejemplos de mallados geométricos de línea: a) razón=2, b) razón=3

Este tipo de discretización puede resultar interesante cuando se pretende realizar un mallado gradual, con distintas densidades de malla en el dominio del problema, como es el caso de la figura A2.6, o cuando se deben discretizar líneas que conectan zonas del contorno con aristas de muy distinto tamaño. En la figura A2.7, que compara la malla bidimensional obtenida a partir de una discretización uniforme de las líneas de unión y la obtenida con una discretización geométrica, se puede apreciar la mejora obtenida en la regularidad de los elementos cuando se utiliza una discretización geométrica con la razón adecuada. Si el tamaño de las aristas en un extremo de la línea es d_1 y en el otro extremo es d_n , y se pretende dividir la línea en n aristas, esta razón se puede obtener como:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{d_n}{d_1}} \quad (\text{A2.13})$$

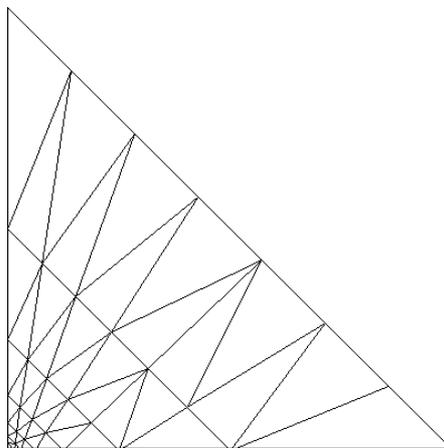


Figura A2.6. Malla de un área triangular con dos de sus líneas discretizadas geoméricamente

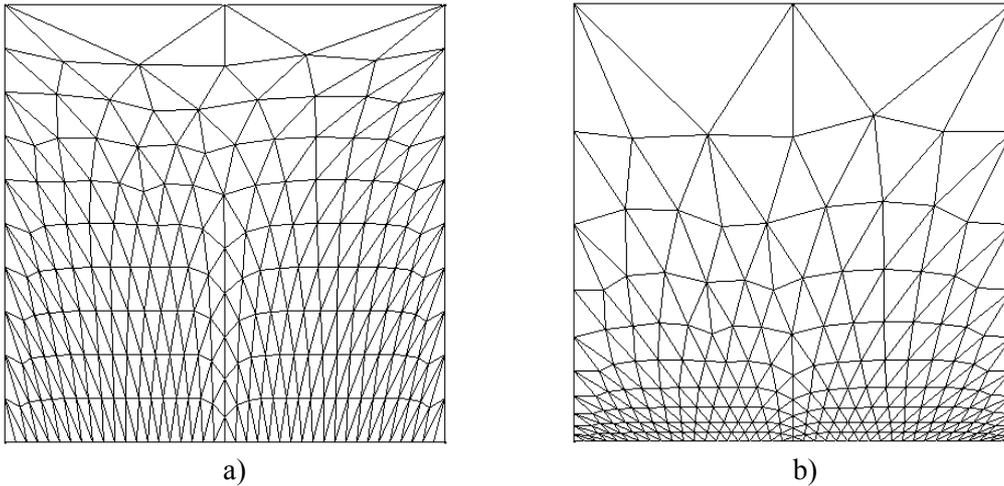


Figura A2.7. Malla gradual en un cuadrado: a) discretización uniforme de las líneas verticales, b) discretización geométrica de las líneas verticales

A2.3. Discretización Irregular

Esta discretización resulta útil en el caso de contornos sinuosos, curvos que no se ajusten a ninguna cónica o simplemente rectos sobre los que se requiere una distribución de los nodos no uniforme, con unas zonas con mayor densidad de éstos que otras (figura A2.8). En este caso es necesario conocer las coordenadas de los $n-1$ nodos interiores, siendo n el número de divisiones.

Este tipo de discretización no impone restricciones sobre el tipo de línea a la que puede afectar. Sin embargo, resulta incoherente crear una línea cónica y, posteriormente, en el proceso de mallado, situar los puntos interiores fuera del arco cónico. En la figura A2.9 se puede observar este caso.

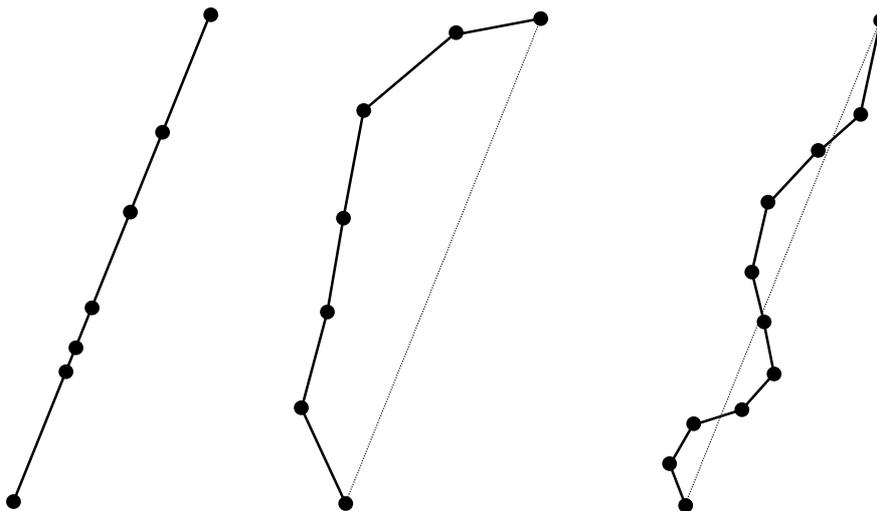


Figura A2.8. Ejemplos de discretización irregular de líneas rectas

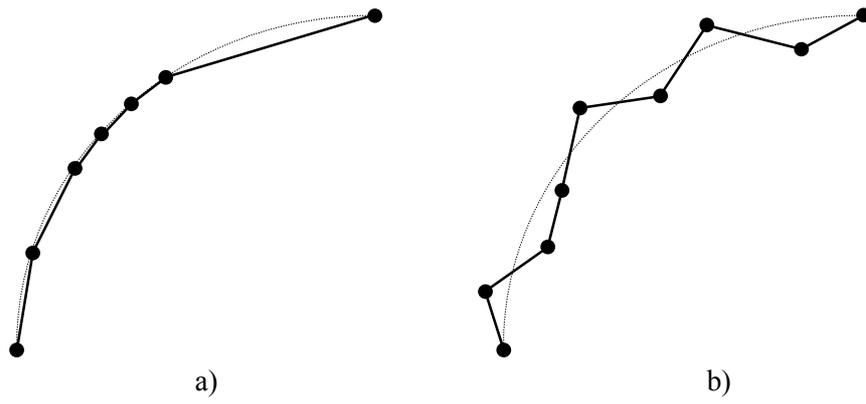


Figura A2.9. Discretización irregular de líneas cónicas: a) correcta, b) incorrecta

Apéndice 3.

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS A LA ECUACIÓN DE ONDA VECTORIAL EN PROBLEMAS CERRADOS

El análisis de estructuras de guiado de ondas y de cavidades resonantes requiere la resolución de la ecuación de onda vectorial para obtener las constantes de propagación o frecuencias de resonancia y los campos asociados a ellas. El método de los elementos finitos permite realizar este estudio en guías y cavidades de geometría arbitraria, inhomogéneas y anisótropas mediante la transformación del problema diferencial en un problema algebraico. Esta transformación se basa en la formulación de una ecuación integral equivalente a la ecuación diferencial inicial, y en la descomposición del dominio del problema en subdominios o elementos donde la función incógnita se interpola o aproxima mediante unas determinadas funciones base asociadas a cada elemento. Esta interpolación genera el problema algebraico equivalente.

De los dos procedimientos habitualmente utilizados para obtener la ecuación integral, se describe en este apéndice el método de Galerkin o de los residuos ponderados. La alternativa a ésta es la formulación variacional o de Ritz. Esta última se basa en la teoría del cálculo variacional y cuenta, por tanto, con una base matemática muy sólida. Sin embargo, dado que ambas formulaciones son equivalentes [Bal96], se ha elegido la primera pues resulta conceptualmente más sencilla y no requiere nociones de cálculo variacional.

La ecuación diferencial de partida, tanto para el análisis de estructuras de guiado como para el de cavidades resonantes que no presentan fuentes en su interior, es la ecuación de onda vectorial homogénea en cualquiera de los campos \vec{E} o \vec{H} :

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \vec{E} - \omega^2 \epsilon \vec{E} = 0 \quad (\text{A3.1})$$

$$\nabla \times \epsilon^{-1} \nabla \times \vec{H} - \omega^2 \mu \vec{H} = 0 \quad (\text{A3.2})$$

donde μ y ϵ , la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica, son, en general, tensores complejos de dimensión 3×3 que permiten el estudio de problemas con materiales anisótropos y con pérdidas, y ω es la pulsación o frecuencia angular.

A las ecuaciones (A3.1) y (A3.2) se les debe añadir las condiciones de contorno en la frontera del dominio del problema:

$$\hat{n} \times \vec{E}|_{PE} = 0 \quad (\text{A3.3})$$

$$\hat{n} \times \vec{H}|_{PM} = 0 \quad (\text{A3.4})$$

donde PE y PM indican condición de pared eléctrica y de pared magnética, respectivamente.

A la vista del paralelismo entre una formulación y otra, se puede escribir de un modo general:

$$\nabla \times \nu^{-1} \nabla \times \vec{F} - \omega^2 \vartheta \vec{F} = 0 \quad (\text{A3.5})$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \vec{E} \\
 \nu &= \mu \\
 \vartheta &= \varepsilon \\
 C.C.: \hat{n} \times \vec{F} \Big|_{PE} &= 0
 \end{aligned} \tag{A3.6}$$

para la formulación en campo eléctrico y

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \vec{H} \\
 \nu &= \varepsilon \\
 \vartheta &= \mu \\
 C.C.: \hat{n} \times \vec{F} \Big|_{PM} &= 0
 \end{aligned} \tag{A3.7}$$

para la formulación en campo magnético.

A3.1. Problemas de Guiado de Ondas

La simetría traslacional de este tipo de problemas da lugar a campos de la forma:

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}_0(x, y) e^{-\gamma z} \tag{A3.8}$$

donde $\gamma = \alpha + j\beta$ es la constante de propagación, α es la constante de atenuación y β es la constante de fase.

Para este tipo de campos se puede descomponer el operador ∇ como:

$$\nabla = \nabla_0 + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \gamma \right) \hat{z} \tag{A3.9}$$

donde:

$$\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} - \gamma \hat{z} \tag{A3.10}$$

Se pueden expresar la primera y segunda ecuaciones de Maxwell sin fuentes de un modo general como:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\
 \nabla \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon\vec{E}
 \end{aligned} \tag{A3.11}$$

Desarrollando (A3.11) con el operador ∇ definido según (A3.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{E} &= (\nabla_0 \times \vec{E}_0) e^{-\gamma z} + (\hat{z} \times \vec{E}_0) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \gamma \right) e^{-\gamma z} = -j\omega\mu\vec{H}_0 e^{-\gamma z} \\
 \nabla \times \vec{H} &= (\nabla_0 \times \vec{H}_0) e^{-\gamma z} + (\hat{z} \times \vec{H}_0) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \gamma \right) e^{-\gamma z} = j\omega\varepsilon\vec{E}_0 e^{-\gamma z}
 \end{aligned} \tag{A3.12}$$

$$\begin{aligned}\nabla_0 \times \vec{E}_0 &= -j\omega\mu\vec{H}_0 \\ \nabla_0 \times \vec{H}_0 &= j\omega\epsilon\vec{E}_0\end{aligned}\quad (\text{A3.13})$$

Multiplicando por μ^{-1} y ϵ^{-1} , respectivamente, y tomando rotacionales modificados $\nabla_0 \times$ en ambos términos de (A3.13) se tiene:

$$\begin{aligned}\nabla_0 \times (\mu^{-1}\nabla_0 \times \vec{E}_0) &= -j\omega\nabla_0 \times \vec{H}_0 \\ \nabla_0 \times (\epsilon^{-1}\nabla_0 \times \vec{H}_0) &= j\omega\nabla_0 \times \vec{E}_0\end{aligned}\quad (\text{A3.14})$$

Por último, sustituyendo $\nabla_0 \times \vec{H}_0$ y $\nabla_0 \times \vec{E}_0$, respectivamente, en (A3.14) por las expresiones (A3.13) se llega a:

$$\nabla_0 \times (\nu^{-1}\nabla_0 \times \vec{F}_0) - \omega^2 \nu \vec{F}_0 = 0 \quad (\text{A3.15})$$

donde \vec{F}_0 es \vec{E}_0 ó \vec{H}_0 , dependiendo de la formulación empleada.

A3.1.1. Obtención de la Ecuación Integral mediante el Método de Galerkin

La obtención de una expresión integral equivalente a (A3.15) mediante el método de Galerkin requiere un vector de funciones test \vec{T}_0 que multiplique la ecuación y cumpla las condiciones de contorno en la frontera del dominio del problema, es decir:

$$\vec{T}_0 \cdot [\nabla_0 \times (\nu^{-1}\nabla_0 \times \vec{F}_0)] - \omega^2 \vec{T}_0 \cdot (\nu \vec{F}_0) = 0 \quad (\text{A3.16})$$

$$\hat{n} \times \vec{T}_0|_{PE} = 0 \quad \text{para } \vec{F}_0 = \vec{E}_0 \quad (\text{A3.17})$$

$$\hat{n} \times \vec{T}_0|_{PM} = 0 \quad \text{para } \vec{F}_0 = \vec{H}_0 \quad (\text{A3.18})$$

Sustituyendo (A3.9) en la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \quad (\text{A3.19})$$

y asumiendo que \vec{A} y \vec{B} son invariantes en z , es decir:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0 \quad (\text{A3.20})$$

se tiene:

$$\nabla_0 \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \gamma \hat{z} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla_0 \times \vec{A} + \gamma \vec{B} \cdot (\hat{z} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot \nabla_0 \times \vec{B} - \gamma \vec{A} \cdot (\hat{z} \times \vec{B}) \quad (\text{A3.21})$$

que, teniendo en cuenta

$$\vec{B} \cdot (\hat{z} \times \vec{A}) = \hat{z} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{A3.22})$$

$$\vec{A} \cdot (\hat{z} \times \vec{B}) = -\hat{z} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{A3.23})$$

se transforma en:

$$\nabla_0 \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla_0 \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla_0 \times \vec{B} + \gamma \hat{z} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{A3.24})$$

En (A3.24) se pueden sustituir \vec{A} y \vec{B} por $v^{-1} \nabla_0 \times \vec{F}_0$ y \vec{T}_0 , respectivamente, pues éstas cumplen (A3.20), y aplicando esta ecuación en (A3.16) se obtiene:

$$\begin{aligned} & (v^{-1} \nabla_0 \times \vec{F}_0) \cdot (\nabla_0 \times \vec{T}_0) + \nabla_0 \cdot \left[(v^{-1} \nabla_0 \times \vec{F}_0) \times \vec{T}_0 \right] - \\ & - \gamma \hat{z} \cdot \left[(v^{-1} \nabla_0 \times \vec{F}_0) \times \vec{T}_0 \right] - \omega^2 \vec{T}_0 \cdot (\vartheta \vec{F}_0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.25})$$

Integrando (A3.25) en la sección transversal Ω de la guía se obtiene la siguiente expresión integral:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (v^{-1} \nabla_0 \times \vec{F}_0) \cdot (\nabla_0 \times \vec{T}_0) d\Omega + \iint_{\Omega} \nabla_0 \cdot \left[(v^{-1} \nabla_0 \times \vec{F}_0) \times \vec{T}_0 \right] d\Omega - \\ & - \gamma \iint_{\Omega} \hat{z} \cdot \left[(v^{-1} \nabla_0 \times \vec{F}_0) \times \vec{T}_0 \right] d\Omega - \omega^2 \iint_{\Omega} \vec{T}_0 \cdot (\vartheta \vec{F}_0) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.26})$$

Esta ecuación integral presenta segundas derivadas en alguno de sus integrandos, por lo que es conveniente manipularla hasta reducir el orden de derivación al mínimo [Bal96], obteniendo finalmente:

$$\iint_{\Omega} (\nabla_1 \times \vec{T}_0) \cdot (v^{-1} \nabla_0 \times \vec{F}_0) d\Omega - \omega^2 \iint_{\Omega} \vec{T}_0 \cdot (\vartheta \vec{F}_0) d\Omega = 0 \quad (\text{A3.27})$$

donde:

$$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \gamma \hat{z} \quad (\text{A3.28})$$

que es la expresión final de la formulación débil de (A3.15).

A3.1.2. Discretización de la Formulación Débil

Tras la generación de la malla o discretización del dominio bidimensional en n_e elementos triangulares y/o cuadriláteros, la ecuación (A3.27) se puede escribir como:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \iint_{\Omega^e} (\nabla_1 \times \vec{T}_0^e) \cdot (v_e^{-1} \nabla_0 \times \vec{F}_0^e) d\Omega^e - \omega^2 \sum_{e=1}^{n_e} \iint_{\Omega^e} \vec{T}_0^e \cdot (\vartheta_e \vec{F}_0^e) d\Omega^e = 0 \quad (\text{A3.29})$$

donde las funciones \vec{F}_0^e y \vec{T}_0^e , así como las propiedades v_e y ϑ_e , están definidas en el dominio del elemento e .

La interpolación utilizada en este tipo de problemas es mixta, con interpolación de arista conforme en rotacional para las componentes transversales de \vec{F}_0^e y \vec{T}_0^e , e interpolación nodal de Lagrange para la componente longitudinal. La descripción de estos tipos de interpolación, tanto para elementos triangulares como cuadriláteros, se encuentra en el apéndice 4. Con estas interpolaciones, se pueden escribir las funciones \vec{F}_0^e y \vec{T}_0^e como:

$$\vec{F}_0^e = \begin{bmatrix} (U^e)^T & (0) \\ (V^e)^T & (0) \\ (0) & (\psi^e)^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\vec{F}_{0t}^e) \\ (\vec{F}_{0z}^e) \end{bmatrix} \quad (\text{A3.30})$$

$$\bar{T}_0^e = \begin{bmatrix} (U^e)^T & (0) \\ (V^e)^T & (0) \\ (0) & (\psi^e)^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\bar{T}_{0t}^e) \\ (\bar{T}_{0z}^e) \end{bmatrix} \quad (\text{A3.31})$$

donde (U^e) y (V^e) son los vectores de las funciones base de interpolación vectorial conforme en rotacional, y (ψ^e) es el vector de funciones base de interpolación nodal de Lagrange. La nomenclatura \bar{x} en las componentes transversales de \bar{F}_0^e y \bar{T}_0^e indica que se trata de valores de arista, y \dot{x} indica que se trata de un valor nodal. En la presente tesis se ha empleado interpolación lineal en ambos casos, por lo que los vectores (U^e) , (V^e) , (ψ^e) , (\bar{T}_{0t}^e) , (\bar{T}_{0z}^e) , (\bar{F}_{0t}^e) y (\bar{F}_{0z}^e) tendrán 3 ó 4 componentes, dependiendo de si el elemento es triangular o cuadrilátero, respectivamente.

Definiendo

$$[P^e] = \begin{bmatrix} (U^e) & (V^e) & (0) \\ (0) & (0) & (\psi^e) \end{bmatrix} \quad (\text{A3.32})$$

(A3.30) y (A3.31) se pueden expresar como:

$$\bar{F}_0^e = [P^e]^T \cdot (\dot{\bar{F}}_0^e) \quad (\text{A3.33})$$

$$\bar{T}_0^e = [P^e]^T \cdot (\dot{\bar{T}}_0^e) \quad (\text{A3.34})$$

donde la nomenclatura (\dot{x}) indica que (x) es un vector que contiene en primer lugar los 3 (ó 4) valores de arista y seguidamente los 3 (ó 4) valores nodales.

Desarrollando los rotacionales modificados de (A3.29) se tiene:

$$\nabla_0 \times \bar{F}_0^e = \begin{vmatrix} \hat{x} & \frac{\partial}{\partial x} & F_{0x}^e \\ \hat{y} & \frac{\partial}{\partial y} & F_{0y}^e \\ \hat{z} & -\gamma & F_{0z}^e \end{vmatrix} = [Q_0^e]^T \cdot (\dot{\bar{F}}_0^e) \quad (\text{A3.35})$$

$$\nabla_1 \times \bar{T}_0^e = \begin{vmatrix} \hat{x} & \frac{\partial}{\partial x} & T_{0x}^e \\ \hat{y} & \frac{\partial}{\partial y} & T_{0y}^e \\ \hat{z} & \gamma & T_{0z}^e \end{vmatrix} = [Q_1^e]^T \cdot (\dot{\bar{T}}_0^e) \quad (\text{A3.36})$$

donde:

$$[Q_0^e] = \begin{bmatrix} \gamma(V^e) & -\gamma(U^e) & \frac{\partial(V^e)}{\partial x} - \frac{\partial(U^e)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\psi^e)}{\partial y} & -\frac{\partial(\psi^e)}{\partial x} & (0) \end{bmatrix} \quad (\text{A3.37})$$

$$[Q_1^e] = \begin{bmatrix} -\gamma(V^e) & \gamma(U^e) & \frac{\partial(V^e)}{\partial x} - \frac{\partial(U^e)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\psi^e)}{\partial y} & -\frac{\partial(\psi^e)}{\partial x} & (0) \end{bmatrix} \quad (A3.38)$$

Haciendo uso de (A3.33)-(A3.36), se puede expresar (A3.29) como:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_e} (\dot{\bar{T}}_0^e)^T \cdot \iint_{\Omega^e} [Q_1^e] \cdot \mathbf{v}_e^{-1} \cdot [Q_0^e]^T d\Omega^e \cdot (\dot{\bar{F}}_0^e) - \\ & - \omega^2 \sum_{e=1}^{n_e} (\dot{\bar{T}}_0^e)^T \cdot \iint_{\Omega^e} [P^e] \cdot \vartheta_e \cdot [P^e]^T d\Omega^e \cdot (\dot{\bar{F}}_0^e) = 0 \end{aligned} \quad (A3.39)$$

Desarrollando (A3.39) como se indica en [Bal96] se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_e} (\dot{\bar{T}}_0^e)^T \cdot \begin{bmatrix} \gamma^2[M_1^e] + \gamma[M_2^e] + [M_3^e] & \gamma[M_4^e] + [M_5^e] \\ \gamma[M_6^e] + [M_7^e] & [M_8^e] \end{bmatrix} \cdot (\dot{\bar{F}}_0^e) - \\ & - \omega^2 \sum_{e=1}^{n_e} (\dot{\bar{T}}_0^e)^T \cdot \begin{bmatrix} [N_1^e] & [N_2^e] \\ [N_3^e] & [N_4^e] \end{bmatrix} \cdot (\dot{\bar{F}}_0^e) = 0 \end{aligned} \quad (A3.40)$$

y ensamblando las matrices elementales $[M_i^e]$ y $[N_i^e]$ se obtiene:

$$(\dot{\bar{T}}_0)^T \cdot \left(\begin{bmatrix} \gamma^2[M_1] + \gamma[M_2] + [M_3] & \gamma[M_4] + [M_5] \\ \gamma[M_6] + [M_7] & [M_8] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [N_1] & [N_2] \\ [N_3] & [N_4] \end{bmatrix} \right) \cdot (\dot{\bar{F}}_0) = 0 \quad (A3.41)$$

donde

$$\begin{aligned} [M_i] &= \sum_{e=1}^{n_e} [M_i^e] \quad \text{con } i=1,\dots,8 \\ [N_i] &= \sum_{e=1}^{n_e} [N_i^e] \quad \text{con } i=1,\dots,4 \end{aligned} \quad (A3.42)$$

teniendo en cuenta la conectividad del elemento e en la malla.

A3.1.3. Aplicación de las Condiciones de Contorno

Sobre (A3.41) se deben aplicar las condiciones de contorno del problema. En el caso de haber utilizado una formulación en campo eléctrico, es decir, $\bar{F}_0 = \bar{E}_0$, la condición de pared eléctrica se traduce en la imposición de:

$$\begin{aligned} (\bar{F}_0)_i &= 0 \\ (\dot{\bar{F}}_0)_j &= 0 \\ (\bar{T}_0)_i &= 0 \\ (\dot{\bar{T}}_0)_j &= 0 \end{aligned} \quad (A3.43)$$

en las aristas i y los nodos j que presenten propiedad de pared eléctrica. Análogamente, si se utiliza una formulación en campo magnético, las expresiones (A3.43) se deben imponer en las aristas y los nodos que presenten la propiedad de pared magnética.

Tras la imposición de estas condiciones se habrán eliminado de las submatrices de (A3.41) las correspondientes filas y columnas:

$$\left(\frac{\dot{\bar{T}}_0'}{\bar{T}_0'}\right)^T \cdot \left(\begin{bmatrix} \gamma^2 [M_1'] + \gamma [M_2'] + [M_3'] & \gamma [M_4'] + [M_5'] \\ \gamma [M_6'] + [M_7'] & [M_8'] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [N_1'] & [N_2'] \\ [N_3'] & [N_4'] \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\frac{\dot{\bar{F}}_0'}{\bar{F}_0'}\right) = 0 \quad (\text{A3.44})$$

Como (A3.44) debe ser cierta para cualquier función test \bar{T}_0' , entonces se debe cumplir:

$$\left(\begin{bmatrix} \gamma^2 [M_1'] + \gamma [M_2'] + [M_3'] & \gamma [M_4'] + [M_5'] \\ \gamma [M_6'] + [M_7'] & [M_8'] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [N_1'] & [N_2'] \\ [N_3'] & [N_4'] \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\frac{\dot{\bar{F}}_0'}{\bar{F}_0'}\right) = 0 \quad (\text{A3.45})$$

A3.1.4. Transformación del Autosistema. Obtención de la Constante de Propagación

En el análisis de líneas de transmisión se pretende obtener el valor de la constante de propagación γ para cada modo o solución de la ecuación de onda. En el proceso de discretización de la ecuación integral (A3.27) se ha llegado a un autosistema en el que γ es conocido y el autovalor es la pulsación, de la que se puede obtener directamente el número de onda. Para obtener la constante de propagación de un modo directo, a partir de un valor de ω , es necesario modificar el autosistema (A3.45) para que el autovalor sea γ . Esto se consigue desarrollando dicho autosistema:

$$\left(\gamma^2 [M_1'] + \gamma [M_2'] + [M_3'] \right) \cdot (\bar{F}_{0t}') + \left(\gamma [M_4'] + [M_5'] \right) \cdot (\dot{F}_{0z}') - \omega^2 \left([N_1'] \cdot (\bar{F}_{0t}') + [N_2'] \cdot (\dot{F}_{0z}') \right) = 0 \quad (\text{A3.46})$$

$$\left(\gamma [M_6'] + [M_7'] \right) \cdot (\bar{F}_{0t}') + [M_8'] \cdot (\dot{F}_{0z}') - \omega^2 \left([N_3'] \cdot (\bar{F}_{0t}') + [N_4'] \cdot (\dot{F}_{0z}') \right) = 0 \quad (\text{A3.47})$$

y sustituyendo el valor de (\dot{F}_{0z}') despejado de (A3.47) en (A3.46):

$$\begin{aligned} & \left(\gamma^2 [M_1'] + \gamma [M_2'] + [M_3'] \right) \cdot (\bar{F}_{0t}') + \\ & + \left(\gamma [M_4'] + [M_5'] \right) \cdot \left(\gamma (\omega^2 [N_4'] - [M_8'])^{-1} \cdot [M_6'] + (\omega^2 [N_4'] - [M_8'])^{-1} \cdot ([M_7'] - \omega^2 [N_3']) \right) \cdot (\bar{F}_{0t}') - \\ & - \omega^2 \left([N_1'] + [N_2'] \cdot \left(\gamma (\omega^2 [N_4'] - [M_8'])^{-1} \cdot [M_6'] + (\omega^2 [N_4'] - [M_8'])^{-1} \cdot ([M_7'] - \omega^2 [N_3']) \right) \right) \cdot (\bar{F}_{0t}') = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.48})$$

El nuevo autosistema es cuadrático y se puede expresar de forma más compacta como:

$$\left(\gamma^2 [A] + \gamma [B] + [C] \right) \cdot (\bar{F}_{0t}') = 0 \quad (\text{A3.49})$$

Para transformar (A3.49) en un autosistema generalizado lineal, se introduce el cambio de variable:

$$(\bar{F}_{0t}'') = \gamma (\bar{F}_{0t}') \quad (\text{A3.50})$$

y (A3.49) se transforma en:

$$\left(\gamma \begin{bmatrix} [B]-[C] & [A] \\ [A] & [A] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [C] \\ [C] & [B]-[A] \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \bar{F}'_{0t} \\ \bar{F}''_{0t} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A3.51})$$

que es un autosistema de dimensión $(2 \times n_a) \times (2 \times n_a)$, siendo n_a el número de aristas libres, es decir, sin condición de contorno, y sus autovalores y autovectores se pueden obtener mediante un método general de resolución de autosistemas generalizados.

A3.2. Análisis de Cavidades Resonantes

A3.2.1. Obtención de la Ecuación Integral mediante el Método de Galerkin

En el análisis de cavidades resonantes, la ecuación de partida es la propia ecuación de onda vectorial tridimensional (A3.5), completada con las condiciones de contorno (A3.6) y (A3.7). Para obtener una expresión integral equivalente a ella mediante el método de Galerkin, se multiplica esta ecuación por una función test \bar{T} que cumpla las condiciones de contorno en la frontera del dominio del problema:

$$\bar{T} \cdot [\nabla \times (\nu^{-1} \nabla \times \bar{F})] - \omega^2 \bar{T} \cdot (\vartheta \bar{F}) = 0 \quad (\text{A3.52})$$

$$\hat{n} \times \bar{T}|_{PE} = 0 \quad \text{para } \bar{F} = \bar{E} \quad (\text{A3.53})$$

$$\hat{n} \times \bar{T}|_{PM} = 0 \quad \text{para } \bar{F} = \bar{H} \quad (\text{A3.54})$$

Teniendo en cuenta la identidad vectorial (A3.19), donde $\bar{A} = \nu^{-1} \nabla \times \bar{F}$ y $\bar{B} = \bar{T}$, se tiene:

$$(\nu^{-1} \nabla \times \bar{F}) \cdot (\nabla \times \bar{T}) + \nabla \cdot [(\nu^{-1} \nabla \times \bar{F}) \times \bar{T}] - \omega^2 \bar{T} \cdot (\vartheta \bar{F}) = 0 \quad (\text{A3.55})$$

Integrando (A3.55) en el volumen Ω de la cavidad se obtiene la siguiente expresión integral:

$$\iiint_{\Omega} (\nu^{-1} \nabla \times \bar{F}) \cdot (\nabla \times \bar{T}) d\Omega + \iiint_{\Omega} \nabla \cdot [(\nu^{-1} \nabla \times \bar{F}) \times \bar{T}] d\Omega - \omega^2 \iiint_{\Omega} \bar{T} \cdot (\vartheta \bar{F}) d\Omega = 0 \quad (\text{A3.56})$$

Aplicando el teorema de la divergencia, (A3.56) se transforma en:

$$\iiint_{\Omega} (\nu^{-1} \nabla \times \bar{F}) \cdot (\nabla \times \bar{T}) d\Omega + \iint_{\Gamma} [(\nu^{-1} \nabla \times \bar{F}) \times \bar{T}] d\Gamma - \omega^2 \iiint_{\Omega} \bar{T} \cdot (\vartheta \bar{F}) d\Omega = 0 \quad (\text{A3.57})$$

Se puede demostrar [Bal96] que el segundo término de (A3.57) se anula si en el contorno de la cavidad existen condiciones de pared eléctrica y/o magnética, quedando finalmente la ecuación integral de la formulación débil como:

$$\iiint_{\Omega} (\nu^{-1} \nabla \times \bar{F}) \cdot (\nabla \times \bar{T}) d\Omega - \omega^2 \iiint_{\Omega} \bar{T} \cdot (\vartheta \bar{F}) d\Omega = 0 \quad (\text{A3.58})$$

A3.2.2. Discretización de la Formulación Débil

Tras la generación de la malla o discretización del dominio bidimensional en n_e elementos tetraédricos, la ecuación (A3.58) se puede escribir como:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \iiint_{\Omega^e} (\nu_e^{-1} \nabla \times \vec{F}^e) \cdot (\nabla \times \vec{T}^e) d\Omega^e - \omega^2 \sum_{e=1}^{n_e} \iiint_{\Omega^e} \vec{T}^e \cdot (\vartheta_e \vec{F}^e) d\Omega^e = 0 \quad (\text{A3.59})$$

donde las funciones \vec{F}^e y \vec{T}^e , así como las propiedades ν_e y ϑ_e , están definidas en el dominio del elemento e .

La interpolación utilizada es la interpolación vectorial, lineal y conforme en rotacional sobre tetraedros descrita en A4.6. A partir de las funciones base utilizadas, se pueden escribir las funciones \vec{T}^e y \vec{F}^e como:

$$\vec{F}^e = \begin{bmatrix} (U^e)^T \\ (V^e)^T \\ (W^e)^T \end{bmatrix} \cdot (\vec{F}^e) \quad (\text{A3.60})$$

$$\vec{T}^e = \begin{bmatrix} (U^e)^T \\ (V^e)^T \\ (W^e)^T \end{bmatrix} \cdot (\vec{T}^e) \quad (\text{A3.61})$$

donde (U^e) , (V^e) y (W^e) son los vectores de las funciones base. La nomenclatura \bar{x} en las incógnitas indica que se trata de valores de arista. Dado que la interpolación utilizada es lineal y los elementos son tetraédricos, los vectores (U^e) , (V^e) , (W^e) , (\vec{T}^e) y (\vec{F}^e) tendrán 6 componentes, una por cada arista del tetraedro.

Las expresiones (A3.60) y (A3.61) se pueden expresar de forma más compacta como:

$$\vec{F}^e = [P^e]^T \cdot (\vec{F}^e) \quad (\text{A3.62})$$

$$\vec{T}^e = [P^e]^T \cdot (\vec{T}^e) \quad (\text{A3.63})$$

donde

$$[P^e] = [(U^e) \ (V^e) \ (W^e)] \quad (\text{A3.64})$$

Desarrollando el operador rotacional se tiene:

$$\nabla \times \vec{F}^e = \begin{bmatrix} \hat{x} & \frac{\partial}{\partial x} & F_x^e \\ \hat{y} & \frac{\partial}{\partial y} & F_y^e \\ \hat{z} & \frac{\partial}{\partial z} & F_z^e \end{bmatrix} = [Q^e]^T \cdot (\vec{F}^e) \quad (\text{A3.65})$$

$$\nabla \times \vec{T}^e = \begin{bmatrix} \hat{x} & \frac{\partial}{\partial x} & T_x^e \\ \hat{y} & \frac{\partial}{\partial y} & T_y^e \\ \hat{z} & \frac{\partial}{\partial z} & T_z^e \end{bmatrix} = [Q^e]^T \cdot (\vec{T}^e) \quad (\text{A3.66})$$

donde:

$$[Q^e] = \left[\frac{\partial(W^e)}{\partial y} - \frac{\partial(V^e)}{\partial z} \quad \frac{\partial(U^e)}{\partial z} - \frac{\partial(W^e)}{\partial x} \quad \frac{\partial(V^e)}{\partial x} - \frac{\partial(U^e)}{\partial y} \right] \quad (A3.67)$$

Sustituyendo (A3.62), (A3.63), (A3.65) y (A3.66) en (A3.59) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_e} (\bar{T}^e)^T \cdot \iiint_{\Omega^e} [Q^e] \cdot v_e^{-1} \cdot [Q^e]^T d\Omega^e \cdot (\bar{F}^e) - \\ & - \omega^2 \sum_{e=1}^{n_e} (\bar{T}^e)^T \cdot \iiint_{\Omega^e} [P^e] \cdot \vartheta_e \cdot [P^e]^T d\Omega^e \cdot (\bar{F}^e) = 0 \end{aligned} \quad (A3.68)$$

Desarrollando (A3.68) se llega a la expresión:

$$\sum_{e=1}^{n_e} (\bar{T}^e)^T \cdot [A^e] \cdot (\bar{F}^e) - \omega^2 \sum_{e=1}^{n_e} (\bar{T}^e)^T \cdot [B^e] \cdot (\bar{F}^e) = 0 \quad (A3.69)$$

donde las matrices $[A^e]$ y $[B^e]$ son:

$$[A^e] = [A_{xx}^e] + [A_{xy}^e] + [A_{xz}^e] + [A_{yx}^e] + [A_{yy}^e] + [A_{yz}^e] + [A_{zx}^e] + [A_{zy}^e] + [A_{zz}^e] \quad (A3.70)$$

$$[B^e] = [B_{xx}^e] + [B_{xy}^e] + [B_{xz}^e] + [B_{yx}^e] + [B_{yy}^e] + [B_{yz}^e] + [B_{zx}^e] + [B_{zy}^e] + [B_{zz}^e] \quad (A3.71)$$

con:

$$\begin{aligned} [A_{xx}^e] &= v_{e,xx}^{-1} \iiint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial(W^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial y} + \frac{\partial(V^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial z} - \frac{\partial(W^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial z} - \frac{\partial(V^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial y} \right] d\Omega^e \\ [A_{xy}^e] &= v_{e,xy}^{-1} \iiint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial(W^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial z} + \frac{\partial(V^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial x} - \frac{\partial(V^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial x} - \frac{\partial(W^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial x} \right] d\Omega^e \\ [A_{xz}^e] &= v_{e,xz}^{-1} \iiint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial(W^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial x} + \frac{\partial(V^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial y} - \frac{\partial(V^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial x} - \frac{\partial(W^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial y} \right] d\Omega^e \\ [A_{yx}^e] &= v_{e,yx}^{-1} \iiint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial(U^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial y} + \frac{\partial(W^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial z} - \frac{\partial(U^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial z} - \frac{\partial(W^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial y} \right] d\Omega^e \\ [A_{yy}^e] &= v_{e,yy}^{-1} \iiint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial(U^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial z} + \frac{\partial(W^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial x} - \frac{\partial(W^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial z} - \frac{\partial(U^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial x} \right] d\Omega^e \\ [A_{yz}^e] &= v_{e,yz}^{-1} \iiint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial(U^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial x} + \frac{\partial(W^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial y} - \frac{\partial(W^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial x} - \frac{\partial(U^e)}{\partial z} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial y} \right] d\Omega^e \\ [A_{zx}^e] &= v_{e,zx}^{-1} \iiint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial(V^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial y} + \frac{\partial(U^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial z} - \frac{\partial(U^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial y} - \frac{\partial(V^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial z} \right] d\Omega^e \\ [A_{zy}^e] &= v_{e,zy}^{-1} \iiint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial(V^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial z} + \frac{\partial(U^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial x} - \frac{\partial(V^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(W^e)^T}{\partial x} - \frac{\partial(U^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial z} \right] d\Omega^e \\ [A_{zz}^e] &= v_{e,zz}^{-1} \iiint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial(V^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial x} + \frac{\partial(U^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial y} - \frac{\partial(U^e)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(V^e)^T}{\partial x} - \frac{\partial(V^e)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(U^e)^T}{\partial y} \right] d\Omega^e \end{aligned} \quad (A3.72)$$

$$\begin{aligned}
 [B_{xx}^e] &= \theta_{e,xx} \left[\iiint_{\Omega^e} (U^e) \cdot (U^e)^T d\Omega^e \right] \\
 [B_{xy}^e] &= \theta_{e,xy} \left[\iiint_{\Omega^e} (U^e) \cdot (V^e)^T d\Omega^e \right] \\
 [B_{xz}^e] &= \theta_{e,xz} \left[\iiint_{\Omega^e} (U^e) \cdot (W^e)^T d\Omega^e \right] \\
 [B_{yx}^e] &= \theta_{e,yx} \left[\iiint_{\Omega^e} (V^e) \cdot (U^e)^T d\Omega^e \right] \\
 [B_{yy}^e] &= \theta_{e,yy} \left[\iiint_{\Omega^e} (V^e) \cdot (V^e)^T d\Omega^e \right] \\
 [B_{yz}^e] &= \theta_{e,yz} \left[\iiint_{\Omega^e} (V^e) \cdot (W^e)^T d\Omega^e \right] \\
 [B_{zx}^e] &= \theta_{e,zx} \left[\iiint_{\Omega^e} (W^e) \cdot (U^e)^T d\Omega^e \right] \\
 [B_{zy}^e] &= \theta_{e,zy} \left[\iiint_{\Omega^e} (W^e) \cdot (V^e)^T d\Omega^e \right] \\
 [B_{zz}^e] &= \theta_{e,zz} \left[\iiint_{\Omega^e} (W^e) \cdot (W^e)^T d\Omega^e \right]
 \end{aligned} \tag{A3.73}$$

Ensamblando las matrices elementales $[A^e]$ y $[B^e]$ se obtiene:

$$(\bar{T})^T \cdot [A] \cdot (\bar{F}) - \omega^2 (\bar{T})^T \cdot [B] \cdot (\bar{F}) = 0 \tag{A3.74}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 [A] &= \sum_{e=1}^{n_e} [A^e] \\
 [B] &= \sum_{e=1}^{n_e} [B^e]
 \end{aligned} \tag{A3.75}$$

teniendo en cuenta la conectividad del elemento e en la malla.

A3.2.3. Aplicación de las Condiciones de Contorno

A la ecuación (A3.74) se le deben aplicar las condiciones de contorno del problema. Si se ha utilizado una formulación en campo eléctrico, es decir, $\vec{F} = \vec{E}$, la condición de pared eléctrica se traduce en la imposición de:

$$(\bar{F})_i = 0 \tag{A3.76}$$

en las aristas i que presenten propiedad de pared eléctrica. Análogamente, si se utiliza una formulación en campo magnético, (A3.76) se debe imponer en las aristas que presenten la propiedad de pared magnética. Tras la imposición de estas condiciones, se habrán eliminado de las submatrices de (A3.74) las correspondientes filas y columnas, obteniendo:

$$(\bar{T}')^T \cdot ([A'] - \omega^2 \cdot [B']) \cdot (\bar{F}') = 0 \tag{A3.77}$$

Como (A3.77) debe ser cierta para cualquier función test \bar{T}' , entonces se debe cumplir:

$$([A'] - \omega^2 \cdot [B']) \cdot (\bar{F}') = 0 \quad (\text{A3.78})$$

A3.2.4. Resolución del Autosistema

El autosistema (A3.78) es de dimensión $n_a \times n_a$, siendo n_a el número de aristas libres, es decir, sin condición de contorno. Mediante un método general de resolución de autosistemas generalizados se puede resolver (A3.78) y obtener sus autovalores y autovectores asociados, que serán los distintos modos o soluciones de campo eléctrico o magnético, dependiendo de la formulación utilizada. En el análisis de cavidades resonantes se pretende obtener la distribución de estos campos, las frecuencias de resonancia asociadas y el factor de calidad de la cavidad (en el caso de que haya materiales con pérdidas) para cada uno de ellos. El autovalor de (A3.78) es el cuadrado de la pulsación de resonancia. La frecuencia de resonancia para cada modo i será:

$$f_{r,i} = \frac{\omega_{r,i}}{2\pi} \quad (\text{A3.79})$$

En caso de tratar con materiales con pérdidas, el autovalor será, en general, complejo:

$$\omega_{r,i} \left(1 - \frac{j}{2Q_i} \right) \quad (\text{A3.80})$$

donde Q_i es el factor de calidad del modo i de la cavidad.

Apéndice 4.

INTERPOLACIÓN LOCAL DE LA SOLUCIÓN

Una vez generada la malla del dominio del problema, el paso de la ecuación integral a un sistema algebraico requiere la utilización de funciones de forma que interpolen la solución del problema en cada elemento. En este apéndice se presentan los tipos de interpolación que han sido utilizados en la presente tesis, ya que su formulación es necesaria para el desarrollo de los distintos indicadores de error del capítulo 5.

A4.1. Interpolación Nodal de Lagrange de Primer Orden en Triángulos

Este tipo de interpolación es el más sencillo cuando sobre el dominio del problema se ha realizado una discretización con elementos triangulares de primer orden como el de la figura A4.1a. El valor de la función incógnita se obtiene interpolando linealmente los valores de la función en los tres vértices o nodos del elemento.

$$u^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i^e \psi_i^e(x, y) \quad (\text{A4.1})$$

donde $u^e(x, y)$ es la función interpolada en el elemento e , \hat{u}_i^e es el valor de la función en el nodo i -ésimo del elemento e , y $\psi_i^e(x, y)$ es la función de interpolación local o función de forma, asociada al nodo i del elemento e . Ésta es una función polinómica de primer orden que debe cumplir:

$$\psi_i^e(x_j^e, y_j^e) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{A4.2})$$

$$\psi_i^e(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \notin \Omega^e \quad (\text{A4.3})$$

$$\sum_{i=1}^3 \psi_i^e(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \Omega^e \quad (\text{A4.4})$$

donde Ω^e representa el dominio del elemento e .

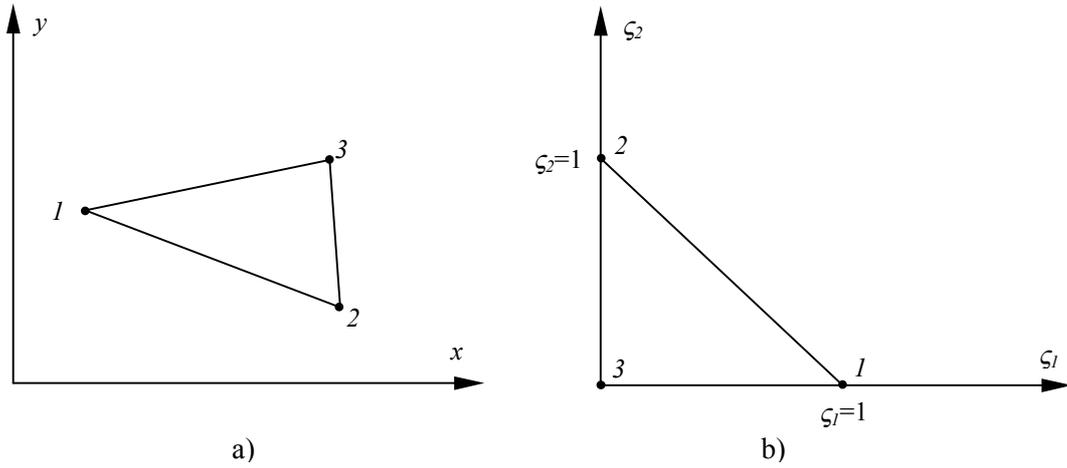


Figura A4.1. Elemento triangular nodal de primer orden: a) real, b) canónico

Esta interpolación requiere tantas funciones como nodos haya en la malla, pues aquéllas dependen de la posición de éstos. Para simplificar esta interpolación, así como el cálculo de las integrales de las que se obtienen los elementos de las matrices del sistema algebraico, se utiliza un elemento de referencia o canónico Ω^ζ como el de la figura A4.1b, para el que la función de interpolación es única. La función de transporte del elemento geométrico Ω^e al canónico Ω^ζ se define como:

$$F^e : (x, y) \in \Omega^e \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \Omega^\zeta \quad (\text{A4.5})$$

donde ζ_i son las coordenadas canónicas o simplex definidas como el cociente entre la distancia del punto al lado opuesto del nodo i y la distancia de dicho nodo a ese lado, como indica la figura A4.2, y cuyas expresiones son:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{h_1^e(x, y)}{h_{1, \max}^e} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}}{\Delta_\zeta} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\Delta_\zeta} \\ \zeta_2 &= \frac{h_2^e(x, y)}{h_{2, \max}^e} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}}{\Delta_\zeta} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\Delta_\zeta} \\ \zeta_3 &= \frac{h_3^e(x, y)}{h_{3, \max}^e} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{\Delta_\zeta} = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3}{\Delta_\zeta} \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

donde:

$$\begin{aligned} a_i &= y_{i+}^e - y_{i-}^e \\ b_i &= x_{i-}^e - x_{i+}^e \\ c_i &= x_{i+}^e y_{i-}^e - x_{i-}^e y_{i+}^e \end{aligned} \tag{A4.7}$$

indicando $i+$ e $i-$ una rotación 1-2-3 circular de índices a derechas.

El término del denominador, definido como

$$\Delta_\zeta = \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{A4.8}$$

es el área (positiva o negativa) del paralelogramo definido por los vectores que unen n_1 y n_2 , por una parte, y n_1 y n_3 por otra; es decir, en valor absoluto es el doble del área del elemento triangular.

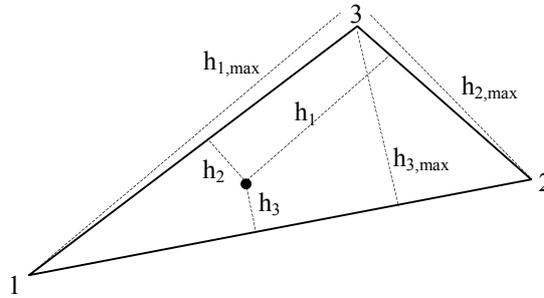


Figura A4.2. Significado geométrico de las coordenadas símplex en el triángulo

Se puede comprobar que, de las tres coordenadas símplex, sólo dos son linealmente independientes, siendo la relación entre ellas:

$$\sum_{i=1}^3 \zeta_i = 1 \tag{A4.9}$$

La función interpolada en el elemento canónico es:

$$u^e(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^e \psi_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \tag{A4.10}$$

donde $\psi_i^e(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ es ahora la función de forma asociada al nodo i en el elemento canónico.

A partir de (A4.6) es sencillo comprobar que las coordenadas símplex cumplen las condiciones exigibles a la función de interpolación ((A4.2)-(A4.4)), por lo que se toma:

$$\psi_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \zeta_i \tag{A4.11}$$

y (A4.10) queda:

$$u^e(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i^e \zeta_i \quad (\text{A4.12})$$

La figura A4.3 muestra las tres funciones de interpolación en un elemento triangular. En ella se puede observar que el valor de la función interpolada en una de las aristas del elemento depende sólo del valor de la función en los nodos de esa arista, lo que garantiza la continuidad de la solución a lo largo de todo el dominio del problema. Dentro de cada elemento la función es diferenciable, con derivadas direccionales continuas. En los nodos no es diferenciable, pudiendo presentar tantas derivadas como elementos compartan el nodo. En las aristas presenta derivada tangencial continua; la derivada normal es, en general, discontinua.

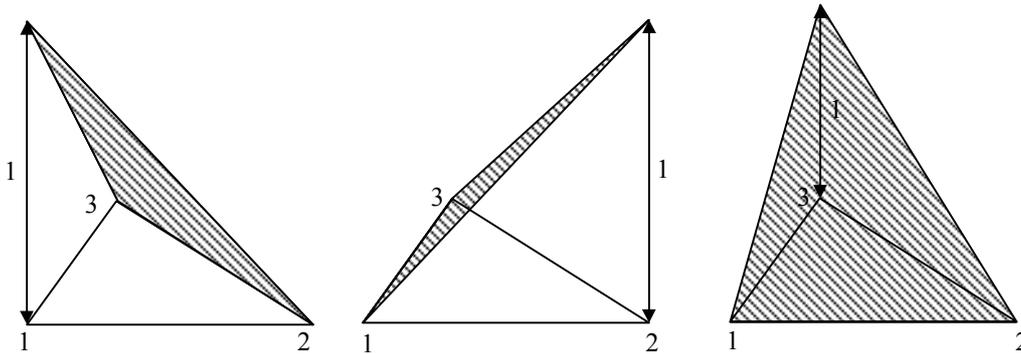


Figura A4.3. Funciones de interpolación nodal de primer orden en un elemento triangular

El error de interpolación cometido en este tipo de elemento depende del tamaño del elemento (h_e) y de su redondez (ρ_e) según la expresión [Sal95]:

$$\|u - \tilde{u}\|_{\Omega^e} \leq C_1 \frac{h_e^{k+1}}{\rho_e} |u|_{k+1, \Omega^e} = C_1 h_e^k r_e |u|_{k+1, \Omega^e} \quad (\text{A4.13})$$

donde C_1 es una constante dependiente del grado del polinomio de interpolación y del tipo de elemento, u es la solución exacta, \tilde{u} la solución interpolada, $r_e = \frac{h_e}{\rho_e}$ la relación de aspecto del elemento y k es el mínimo entre el orden del polinomio de interpolación completo utilizado y la dimensión del espacio de Hilbert al que pertenece la función u menos 1.

El tamaño del elemento en triángulos se define como la longitud de la arista más larga, y la redondez como el diámetro de la circunferencia inscrita.

En el caso de elementos lineales y soluciones suficientemente suaves, $k = 1$, con lo que (A4.13) queda:

$$\|u - \tilde{u}\|_{\Omega^e} \leq C_1 \frac{h_e^2}{\rho_e} |u|_{2, \Omega^e} = C_1 h_e r_e |u|_{2, \Omega^e} \quad (\text{A4.14})$$

La norma $\|\cdot\|$ en un espacio de Hilbert de orden 0 se define como:

$$\|f\|_{\Omega} = \|f\|_{0,2,\Omega} = \|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A4.15})$$

y coincide con la seminorma $|\cdot|_{\Omega}$.

Este error de interpolación se puede generalizar a las derivadas de la función:

$$\|u - \tilde{u}\|_{m,\Omega^e} \leq C_1 \frac{h_e^{k+1}}{\rho_e^m} |u|_{k+1,\Omega^e} \quad (\text{A4.16})$$

donde ahora la norma $\|\cdot\|$ está definida en un espacio de Hilbert de orden m :

$$\|f\|_{m,\Omega} = \|f\|_{m,2,\Omega} = \left[\sum_{\alpha=0}^m \left(\sum_{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{\alpha=0}^m \left(\sum_{\alpha} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^2 d\Omega \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A4.17})$$

siendo α el grado de derivación, $D^{\alpha} f$ el conjunto de derivadas de f de grado α , y la seminorma $|\cdot|_{m,\Omega}$:

$$|f|_{m,\Omega} = |f|_{m,2,\Omega} = \left[\left(\sum_{\alpha=m} \|D^{\alpha} f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\sum_{\alpha=m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^2 d\Omega \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A4.18})$$

Información más detallada sobre espacios de Hilbert se puede encontrar en [Sal98].

A4.2. Interpolación Nodal de Lagrange de Primer Orden en Cuadriláteros

Cuando la discretización del dominio del problema se realiza total o parcialmente con cuadriláteros, se requiere una función de interpolación para este tipo de elementos. Para el caso de un cuadrilátero de primer orden, esta interpolación se realiza a partir de los valores de la solución en los cuatro nodos o vértices del elemento (figura A4.4a):

$$u^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 \hat{u}_i^e \psi_i^e(x, y) \quad (\text{A4.19})$$

donde las funciones de forma son polinomios bilineales, es decir, polinomios de segundo grado no completos en dos variables, pero lineales si se considera cada variable por separado. Las operaciones con este tipo de interpolación también se ven facilitadas con la utilización de un elemento de referencia o canónico en el dominio Ω^s (figura A4.4b). En este caso la transformación realizada es:

$$F^e : (x, y) \in \Omega^e \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2) \in \Omega^s \quad (\text{A4.20})$$

donde:

$$\begin{aligned} x &= x_1^e + (x_2^e - x_1^e) \zeta_1 + (x_4^e - x_1^e) \zeta_2 + (x_3^e - x_4^e + x_1^e - x_2^e) \zeta_1 \zeta_2 \\ y &= y_1^e + (y_2^e - y_1^e) \zeta_1 + (y_4^e - y_1^e) \zeta_2 + (y_3^e - y_4^e + y_1^e - y_2^e) \zeta_1 \zeta_2 \end{aligned} \quad (\text{A4.21})$$

Y la función interpolada en el elemento de referencia es:

$$u^e(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i=1}^4 \hat{u}_i^e \psi_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) \quad (\text{A4.22})$$

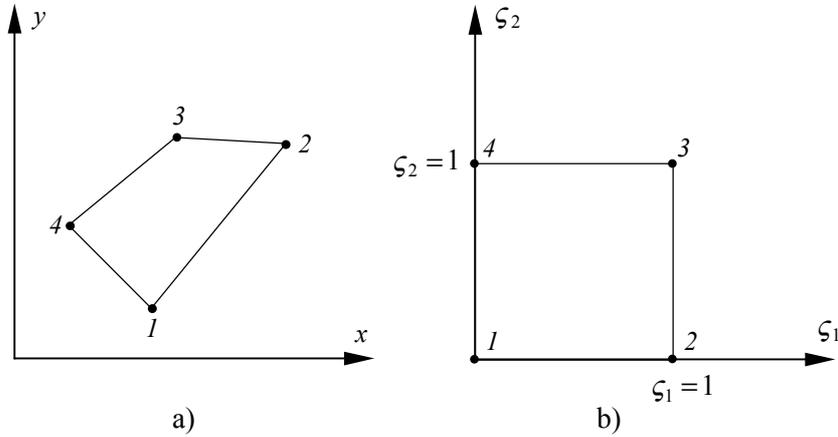


Figura A4.4. Elemento cuadrilátero nodal de primer orden: a) real, b) canónico

Para obtener la interpolación de u en el elemento canónico se debe realizar una doble interpolación lineal:

$$\begin{aligned} u^e(\zeta_1, \zeta_2) &= u^e(\zeta_1, 0)(1 - \zeta_2) + u^e(\zeta_1, 1)\zeta_2 = \\ &= u^e(0, 0)(1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2) + u^e(1, 0)\zeta_1(1 - \zeta_2) + u^e(1, 1)\zeta_1\zeta_2 + u^e(0, 1)(1 - \zeta_1)\zeta_2 = \quad (\text{A4.23}) \\ &= u_1^e(1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2) + u_2^e\zeta_1(1 - \zeta_2) + u_3^e\zeta_1\zeta_2 + u_4^e(1 - \zeta_1)\zeta_2 \end{aligned}$$

Identificando términos en (A4.23) se pueden obtener las funciones de forma:

$$\begin{aligned} \psi_1^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2) \\ \psi_2^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_1(1 - \zeta_2) \\ \psi_3^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_1\zeta_2 \\ \psi_4^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_1)\zeta_2 \end{aligned} \quad (\text{A4.24})$$

La figura A4.5 muestra el aspecto de estas funciones de forma. Se puede apreciar que en este caso la función no es plana dado que la interpolación no es lineal. Las funciones interpoladas con estas funciones de forma presentan la misma características respecto a continuidad y diferenciabilidad que las descritas en elementos triangulares.

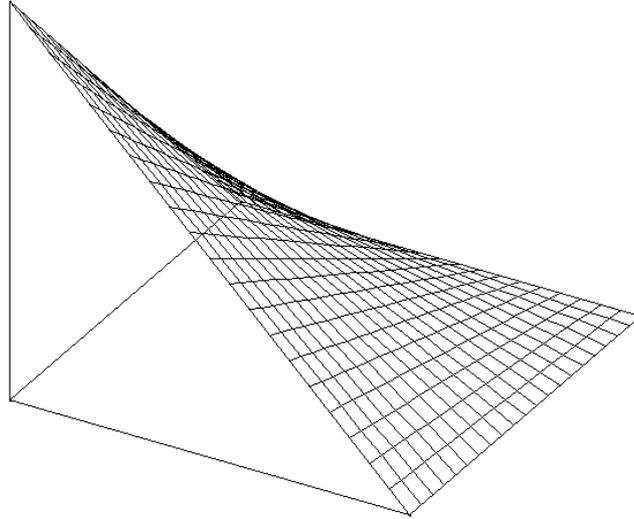


Figura A4.5. Función de interpolación nodal de primer orden en un elemento cuadrilátero

La expresión del error de interpolación coincide con (A4.13) pues ésta es una expresión general para elementos de Lagrange. En este caso, el tamaño del elemento se define como la longitud de la diagonal mayor del cuadrilátero. Es importante reseñar que, aunque el polinomio de interpolación en cuadriláteros de primer orden es de segundo grado en dos variables, es lineal en cada una de ellas por separado, por lo que el primer polinomio completo es lineal y $k=1$, con lo que la expresión de la convergencia en norma para cuadriláteros de primer orden es (A4.14), con la salvedad de la constante.

A4.3. Interpolación Nodal de Lagrange de Primer Orden en Tetraedros

La discretización de un problema tridimensional en elementos tetraédricos de primer orden (figura A4.6a) requiere una interpolación local que es una generalización de la vista en elementos triangulares, de tal forma que la función interpolada es una combinación lineal de cuatro funciones base, una por cada nodo del tetraedro:

$$u^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 u_i^e \psi_i^e(x, y, z) \tag{A4.25}$$

Estas funciones base deben cumplir las propiedades equivalentes en tres dimensiones a (A4.2)-(A4.4):

$$\psi_i^e(x_j^e, y_j^e, z_j^e) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{A4.26}$$

$$\psi_i^e(x, y, z) = 0 \quad \forall (x, y, z) \notin \Omega^e \tag{A4.27}$$

$$\sum_{i=1}^4 \psi_i^e(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega^e \tag{A4.28}$$

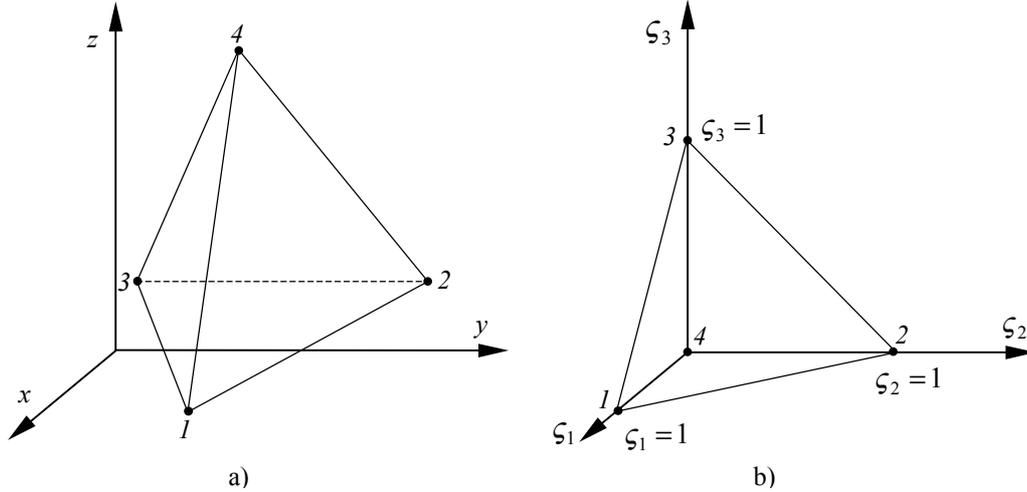


Figura A4.6. Elemento tetraédrico nodal de primer orden: a) real, b) canónico

Por las mismas razones argumentadas en el caso bidimensional, es conveniente construir estas funciones de forma en un elemento canónico (figura A4.6b). La función de transporte del espacio real al canónico

$$F^e : (x, y, z) \in \Omega^e \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \in \Omega^s \quad (A4.29)$$

viene dada por las siguientes expresiones de las coordenadas simplex:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{V_1^e(x, y, z)}{V^e} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2^e & y_2^e & z_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e & z_3^e \\ 1 & x_4^e & y_4^e & z_4^e \end{vmatrix}}{\Delta_\zeta} = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\Delta_\zeta} \\ \zeta_2 &= \frac{V_2^e(x, y, z)}{V^e} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e & z_1^e \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3^e & y_3^e & z_3^e \\ 1 & x_4^e & y_4^e & z_4^e \end{vmatrix}}{\Delta_\zeta} = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\Delta_\zeta} \\ \zeta_3 &= \frac{V_3^e(x, y, z)}{V^e} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e & z_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e & z_2^e \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_4^e & y_4^e & z_4^e \end{vmatrix}}{\Delta_\zeta} = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{\Delta_\zeta} \\ \zeta_4 &= \frac{V_4^e(x, y, z)}{V^e} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e & z_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e & z_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e & z_3^e \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix}}{\Delta_\zeta} = \frac{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}{\Delta_\zeta} \end{aligned} \quad (A4.30)$$

donde $V_i^e(x, y, z)$ es el volumen del tetraedro formado por el punto (x, y, z) y la cara opuesta al nodo i , como muestra la figura A4.7, y V^e es el volumen del elemento. La constante

$$\Delta_\zeta = \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e & z_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e & z_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e & z_3^e \\ 1 & x_4^e & y_4^e & z_4^e \end{vmatrix} \quad (\text{A4.31})$$

es el volumen (positivo o negativo) del paralelepípedo definido por los vectores que unen los nodos 1 y 2, 1 y 3, y 1 y 4. Su valor absoluto es, por tanto, seis veces el volumen del elemento. Las expresiones de a_i , b_i , c_i y d_i se obtienen evaluando las expresiones (A4.30).

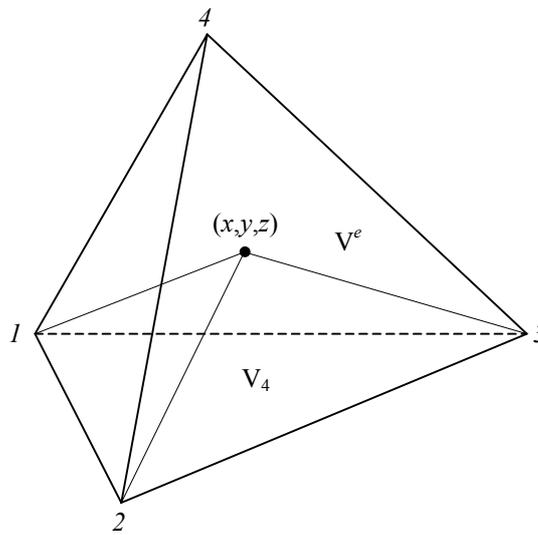


Figura A4.7. Interpretación geométrica de las coordenadas simplex en el tetraedro

A partir de la definición geométrica de las coordenadas simplex ζ_i es evidente que éstas toman el valor 1 en el nodo i y se anulan en los demás nodos. Asimismo, la suma de los volúmenes parciales $V_i^e(x, y, z)$ es V^e y, por tanto:

$$\sum_{i=1}^4 \zeta_i(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega^e \quad (\text{A4.32})$$

por lo que se puede concluir que las funciones de forma coinciden con las coordenadas simplex:

$$\psi_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = \zeta_i \quad (\text{A4.33})$$

y la función interpolada se puede escribir como:

$$u^e(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = \sum_{i=1}^4 \hat{u}_i^e \zeta_i \quad (\text{A4.34})$$

El hecho de que el valor en una de las caras de la función interpolada dependa únicamente del valor de la función en los nodos de esa cara garantiza la continuidad de la función a lo largo del dominio del problema. Dentro de cada elemento esta función es continua y diferenciable, con derivadas direccionales continuas. En los nodos no es diferenciable, pudiendo presentar tantas derivadas como elementos compartan el nodo. En las caras presenta derivada tangencial continua, siendo la derivada normal, en general, discontinua.

A4.4. Interpolación Vectorial Conforme en Rotacional de Primer Orden en Triángulos

La resolución de la ecuación de onda vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{v}^{-1} \nabla \times \vec{F}) - \omega^2 \vartheta \vec{F} = 0 \quad (\text{A4.35})$$

donde \vec{F} puede ser el campo eléctrico o el magnético, en una estructura de geometría y materiales arbitrarios se puede plantear mediante una interpolación nodal de cada una de las componentes del campo eléctrico o magnético. Sin embargo, este tipo de interpolación presenta dos problemas fundamentales: la aparición de modos espurios no identificables y la dificultad en el modelado de soluciones localmente singulares.

Como se vio en A4.1, la solución del problema obtenida con una interpolación nodal es continua en todo el dominio de éste. Sin embargo, si la estructura presenta materiales con distintas propiedades electromagnéticas, en la interfaz entre dos materiales debe existir una discontinuidad en el campo eléctrico o magnético, cumpliéndose la continuidad en las densidades de flujo eléctrico o magnético (\vec{D} ó \vec{B}). La utilización de la interpolación nodal en ese caso genera soluciones espurias ($\omega = 0$) [Sun95] que cumplen:

$$\nabla \times (\mathbf{v}^{-1} \nabla \times \vec{F}) = 0 \quad (\text{A4.36})$$

Estos modos no cumplen

$$\nabla \cdot \vec{G} = 0 \quad (\text{A4.37})$$

donde \vec{G} representa la densidad de flujo eléctrico o flujo magnético, dependiendo de la formulación utilizada, y, por tanto, no tienen significado físico. La identificación de este tipo de solución entre todos los modos calculados resulta difícil, pues la interpolación nodal no aproxima correctamente este modo y su autovalor correspondiente no se encuentra próximo a cero.

Para solucionar este problema es necesario construir funciones de interpolación que cumplan:

$$\nabla \cdot \vec{\psi}_i^e = 0 \quad (\text{A4.38})$$

$$\nabla \times \vec{\psi}_i^e = \text{cte} \quad (\text{A4.39})$$

En el caso de elementos triangulares se pretende interpolar una función vectorial bidimensional:

$$\vec{u}(x, y) = u_x(x, y)\hat{x} + u_y(x, y)\hat{y} \quad (\text{A4.40})$$

a partir de los valores de la componente tangencial de la solución en las tres aristas del elemento:

$$\bar{u}^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i^e \bar{\psi}_i^e(x, y) \quad (\text{A4.41})$$

donde \bar{u}_i^e es el valor de la solución en la arista i del elemento e . Para ello se proponen las siguientes funciones base:

$$\bar{\psi}_i^e(x, y) = l_i \left[\psi_i^e(x, y) \nabla \psi_{i+}^e(x, y) - \psi_{i+}^e(x, y) \nabla \psi_i^e(x, y) \right] \quad (\text{A4.42})$$

donde l_i es la longitud de la arista i , es decir, la que une los nodos i e $i+$ (teniendo en cuenta que $i+$ indica una rotación circular), y ψ_i^e , para elementos lineales, la función de forma nodal descrita en A4.1 correspondiente al nodo i , es decir:

$$\psi_i^e(x, y) = \frac{a_i x + b_i y + c_i}{\Delta_\zeta} \quad (\text{A4.43})$$

Sustituyendo (A4.43) en los gradientes de (A4.42) se tiene:

$$\bar{\psi}_i^e(x, y) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} \left[\psi_i^e(x, y) [a_{i+} \hat{x} + b_{i+} \hat{y}] - \psi_{i+}^e(x, y) [a_i \hat{x} + b_i \hat{y}] \right] = U_i^e(x, y) \hat{x} + V_i^e(x, y) \hat{y} \quad (\text{A4.44})$$

donde:

$$U_i^e(x, y) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [a_{i+} \psi_i^e(x, y) - a_i \psi_{i+}^e(x, y)] \quad (\text{A4.45})$$

$$V_i^e(x, y) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [b_{i+} \psi_i^e(x, y) - b_i \psi_{i+}^e(x, y)] \quad (\text{A4.46})$$

Y en el elemento de referencia:

$$\bar{\psi}_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) = U_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) \hat{x} + V_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) \hat{y} \quad (\text{A4.47})$$

con

$$U_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [a_{i+} \zeta_i - a_i \zeta_{i+}] \quad (\text{A4.48})$$

$$V_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [b_{i+} \zeta_i - b_i \zeta_{i+}] \quad (\text{A4.49})$$

Por tanto, la función solución queda interpolada en el elemento real como:

$$\bar{u}^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i^e U_i^e(x, y) \hat{x} + \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i^e V_i^e(x, y) \hat{y} \quad (A4.50)$$

Y en el elemento canónico:

$$\bar{u}^e(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i^e U_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) \hat{x} + \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i^e V_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) \hat{y} \quad (A4.51)$$

La figura A4.8 muestra este tipo de elemento y la numeración de sus aristas y nodos, así como el elemento de referencia correspondiente. Se puede comprobar fácilmente que estas funciones de forma cumplen (A4.38) y (A4.39).

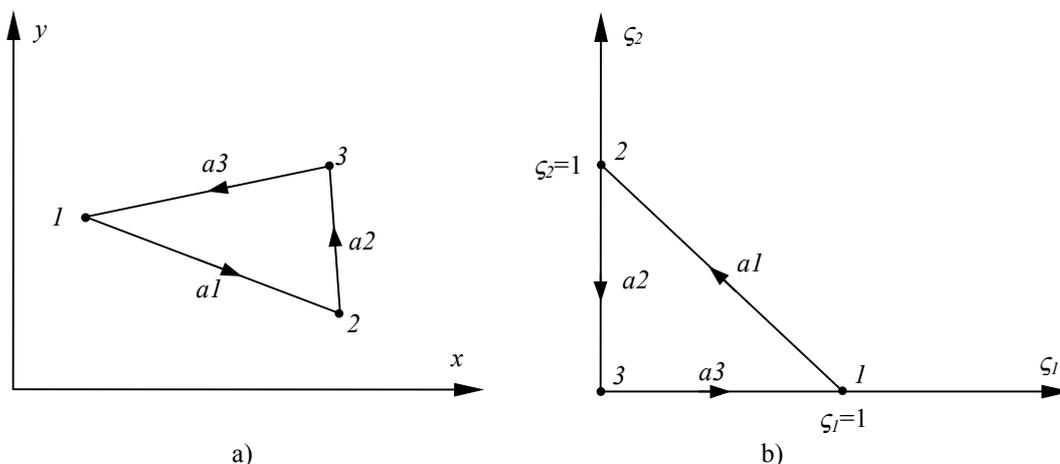


Figura A4.8. Elemento triangular de arista de primer orden: a) real, b) canónico

Las funciones interpoladas en (A4.50) son continuas y tienen derivadas continuas en el interior del elemento; las componentes tangenciales a las aristas son continuas, pero no las normales.

El error de interpolación cometido en este tipo de interpolación depende del tamaño y la relación de aspecto del elemento:

$$\|\bar{u} - \tilde{u}\|_{\Omega^e} \leq C_1 \frac{h_e^{k+1}}{\rho_e} |\bar{u}|_{k, \Omega^e} = C_1 r_e h_e^k |\bar{u}|_{k, \Omega^e} \quad (A4.52)$$

donde $k = 1$ para elementos lineales y funciones suficientemente regulares [Sal95].

A4.5. Interpolación Vectorial Conforme en Rotacional de Primer Orden en Cuadriláteros

En el caso de elementos cuadriláteros es posible interpolar funciones vectoriales mediante elementos de arista como el de la figura A4.9. Como en la interpolación nodal, resulta más útil trabajar sobre un elemento de referencia en el dominio Ω^ζ . La transformación que define el paso del elemento real al canónico viene dada por (A4.20) y (A4.21), y su matriz jacobiana es:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial y}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial y}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}(\zeta_2) & J_{12}(\zeta_2) \\ J_{21}(\zeta_1) & J_{22}(\zeta_1) \end{bmatrix} \quad (\text{A4.53})$$

donde:

$$\begin{aligned} J_{11}(\zeta_2) &= x_2^e - x_1^e + (x_3^e - x_4^e + x_1^e - x_2^e)\zeta_2 \\ J_{12}(\zeta_2) &= y_2^e - y_1^e + (y_3^e - y_4^e + y_1^e - y_2^e)\zeta_2 \\ J_{21}(\zeta_1) &= x_4^e - x_1^e + (x_3^e - x_4^e + x_1^e - x_2^e)\zeta_1 \\ J_{22}(\zeta_1) &= y_4^e - y_1^e + (y_3^e - y_4^e + y_1^e - y_2^e)\zeta_1 \end{aligned} \quad (\text{A4.54})$$

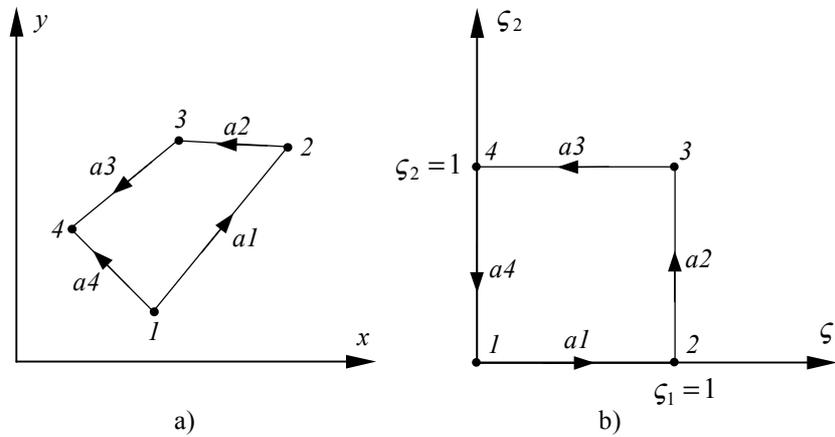


Figura A4.9. Elemento cuadrilátero de arista de primer orden: a) real, b) canónico

Se toman como funciones de forma asociadas a las aristas del cuadrilátero canónico las siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1^e &= (1 - \zeta_2) \nabla_{xy} \zeta_1 \\ \bar{\psi}_2^e &= \zeta_1 \nabla_{xy} \zeta_2 \\ \bar{\psi}_3^e &= \zeta_2 \nabla_{xy} \zeta_1 \\ \bar{\psi}_4^e &= (1 - \zeta_1) \nabla_{xy} \zeta_2 \end{aligned} \quad (\text{A4.55})$$

donde

$$\nabla_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A4.56})$$

Teniendo en cuenta que

$$\nabla_{xy} f = J^{-1} \nabla_{\zeta_1 \zeta_2} f \quad (\text{A4.57})$$

donde f es una función cualquiera y

$$\nabla_{\zeta_1 \zeta_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A4.58})$$

$$J^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} J_{22}(\zeta_1) & -J_{12}(\zeta_2) \\ -J_{21}(\zeta_1) & J_{11}(\zeta_2) \end{bmatrix}}{|J|} \quad (\text{A4.59})$$

se puede obtener el gradiente en el dominio real de las coordenadas canónicas:

$$\begin{aligned} \nabla_{xy} \zeta_1 &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22}(\zeta_1) \\ -J_{21}(\zeta_1) \end{bmatrix} \\ \nabla_{xy} \zeta_2 &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} -J_{12}(\zeta_2) \\ J_{11}(\zeta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A4.60})$$

donde $|J|$ es el determinante jacobiano, y las funciones de forma resultan:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1^e &= (1 - \zeta_2) \frac{J_{22}(\zeta_1)}{|J|} \hat{x} - (1 - \zeta_2) \frac{J_{21}(\zeta_1)}{|J|} \hat{y} \\ \bar{\psi}_2^e &= -\zeta_1 \frac{J_{12}(\zeta_2)}{|J|} \hat{x} + \zeta_1 \frac{J_{11}(\zeta_2)}{|J|} \hat{y} \\ \bar{\psi}_3^e &= \zeta_2 \frac{J_{22}(\zeta_1)}{|J|} \hat{x} - \zeta_2 \frac{J_{21}(\zeta_1)}{|J|} \hat{y} \\ \bar{\psi}_4^e &= -(1 - \zeta_1) \frac{J_{12}(\zeta_2)}{|J|} \hat{x} + (1 - \zeta_1) \frac{J_{11}(\zeta_2)}{|J|} \hat{y} \end{aligned} \quad (\text{A4.61})$$

Con estas funciones de forma se puede interpolar la función solución en el dominio canónico:

$$\bar{u}^e(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e \bar{\psi}_i^e(\zeta_1, \zeta_2) \quad (\text{A4.62})$$

o, separando las componentes \hat{x} e \hat{y} :

$$\bar{u}^e(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e U_i^e(\zeta_1, \zeta_2) \hat{x} + \sum_{i=1}^4 \bar{u}_i^e V_i^e(\zeta_1, \zeta_2) \hat{y} \quad (\text{A4.63})$$

donde:

$$\begin{aligned}
 U_1^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_2) \frac{J_{22}(\zeta_1)}{|J|} \\
 U_2^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= -\zeta_1 \frac{J_{12}(\zeta_2)}{|J|} \\
 U_3^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= \zeta_2 \frac{J_{22}(\zeta_1)}{|J|} \\
 U_4^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= -(1 - \zeta_1) \frac{J_{12}(\zeta_2)}{|J|}
 \end{aligned} \tag{A4.64}$$

$$\begin{aligned}
 V_1^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= -(1 - \zeta_2) \frac{J_{21}(\zeta_1)}{|J|} \\
 V_2^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= -\zeta_1 \frac{J_{11}(\zeta_2)}{|J|} \\
 V_3^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= -\zeta_2 \frac{J_{21}(\zeta_1)}{|J|} \\
 V_4^\zeta(\zeta_1, \zeta_2) &= (1 - \zeta_1) \frac{J_{11}(\zeta_2)}{|J|}
 \end{aligned} \tag{A4.65}$$

Con estas funciones de forma, las funciones interpoladas en (A4.63) son continuas y tienen derivadas continuas en el interior del elemento; las componentes tangenciales a las aristas son continuas, pero no las normales, al igual que en el elemento triangular.

A4.6. Interpolación Vectorial Conforme en Rotacional de Primer Orden en Tetraedros

Para interpolar funciones vectoriales tridimensionales de la forma:

$$\vec{u}(x, y, z) = u_x(x, y, z)\hat{x} + u_y(x, y, z)\hat{y} + u_z(x, y, z)\hat{z} \tag{A4.66}$$

en elementos tetraédricos, de forma que se eluda el problema de los modos espurios y de las singularidades de campo, se utilizan funciones base vectoriales $\vec{\psi}_i^e$ asociadas a cada arista del tetraedro, quedando la solución aproximada como:

$$\vec{u}^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 \bar{u}_i^e \vec{\psi}_i^e(x, y, z) \tag{A4.67}$$

Las funciones base propuestas son una generalización tridimensional de las utilizadas en el caso bidimensional para elementos triangulares:

$$\vec{\psi}_i^e(x, y, z) = l_i \left[\psi_{i-}^e(x, y, z) \nabla \psi_{i+}^e(x, y, z) - \psi_{i+}^e(x, y, z) \nabla \psi_{i-}^e(x, y, z) \right] \tag{A4.68}$$

donde l_i es la longitud de la arista i , es decir, la que une los nodos $i-$ e $i+$, y ψ_i^e , para elementos lineales, la función de forma nodal descrita en A4.3 correspondiente al nodo i , es decir:

$$\psi_i^e(x, y, z) = \frac{a_i x + b_i y + c_i z + d_i}{\Delta_\zeta} \quad (\text{A4.69})$$

Sustituyendo (A4.69) en los gradientes de (A4.68) se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_i^e(x, y, z) &= \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [\psi_{i-}^e(x, y, z)[a_{i+}\hat{x} + b_{i+}\hat{y} + c_{i+}\hat{z}] - \psi_{i+}^e(x, y, z)[a_{i-}\hat{x} + b_{i-}\hat{y} + c_{i-}\hat{z}]] = \\ &= U_i^e(x, y, z)\hat{x} + V_i^e(x, y, z)\hat{y} + W_i^e(x, y, z)\hat{z} \end{aligned} \quad (\text{A4.70})$$

donde:

$$U_i^e(x, y, z) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [a_{i+}\psi_{i-}^e(x, y, z) - a_{i-}\psi_{i+}^e(x, y, z)] \quad (\text{A4.71})$$

$$V_i^e(x, y, z) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [b_{i+}\psi_{i-}^e(x, y, z) - b_{i-}\psi_{i+}^e(x, y, z)] \quad (\text{A4.72})$$

$$W_i^e(x, y, z) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [c_{i+}\psi_{i-}^e(x, y, z) - c_{i-}\psi_{i+}^e(x, y, z)] \quad (\text{A4.73})$$

y los signos $-$ y $+$ de los subíndices indican el nodo inicial y el final, respectivamente, de la arista i .

En el elemento de referencia:

$$\bar{\psi}_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = U_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\hat{x} + V_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\hat{y} + W_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\hat{z} \quad (\text{A4.74})$$

con

$$U_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [a_{i+}\zeta_{i-} - a_{i-}\zeta_{i+}] \quad (\text{A4.75})$$

$$V_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [b_{i+}\zeta_{i-} - b_{i-}\zeta_{i+}] \quad (\text{A4.76})$$

$$W_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{l_i}{\Delta_\zeta} [c_{i+}\zeta_{i-} - c_{i-}\zeta_{i+}] \quad (\text{A4.77})$$

Por tanto, la función solución queda interpolada en el elemento real como:

$$\bar{u}^e(x, y) = \sum_{i=1}^6 \bar{u}_i^e U_i^e(x, y, z)\hat{x} + \sum_{i=1}^6 \bar{u}_i^e V_i^e(x, y, z)\hat{y} + \sum_{i=1}^6 \bar{u}_i^e W_i^e(x, y, z)\hat{z} \quad (\text{A4.78})$$

Y en el elemento canónico:

$$\bar{u}^e(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i=1}^6 \bar{u}_i^e U_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\hat{x} + \sum_{i=1}^6 \bar{u}_i^e V_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\hat{y} + \sum_{i=1}^6 \bar{u}_i^e W_i^\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\hat{z} \quad (\text{A4.79})$$

La figura A4.10 muestra este tipo de elemento y la numeración de sus aristas y nodos, así como el elemento de referencia correspondiente. Se puede comprobar fácilmente que estas funciones de forma cumplen (A4.38) y (A4.39).

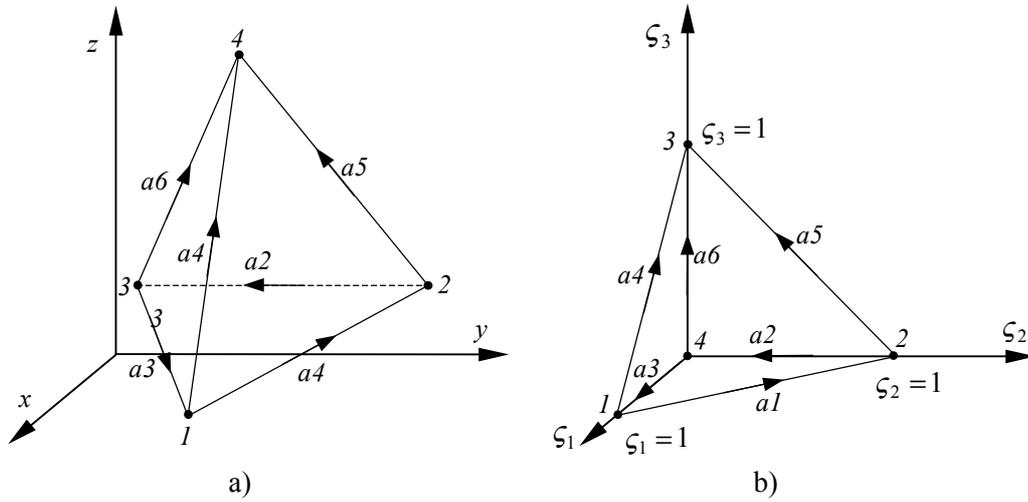


Figura A4.10. Elemento tetraédrico de arista de primer orden: a) real, b) canónico

Las funciones interpoladas en (A4.78) son continuas y tienen derivadas continuas en el interior del elemento; las componentes tangenciales a las aristas son continuas, pero no las normales.

Apéndice 5.

DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE MODELADO DE GEOMETRÍA Y GENERACIÓN DE MALLA DESARROLLADO

En este apéndice se describe brevemente el programa de definición de geometría y generación de malla desarrollado en paralelo a la realización de la tesis. En él se recogen las formas fundamentales de definición de componentes de geometría y los principales métodos de discretización descritos en los capítulos 2, 3 y 4. Ha sido implementado en lenguaje C (ANSI) y hace uso de la librería de funciones gráficas X11. Aunque se ha desarrollado en una estación de trabajo HP, el uso de estas dos herramientas de programación estándar permite su transporte a cualquier estación u ordenador personal que trabaje bajo entorno X-Window.

La selección de las distintas posibilidades que ofrece el programa se realiza a través de un sistema de menús de 4 niveles, como muestra la figura A5.1. Estas posibilidades dependen del número de dimensiones en que se esté trabajando. A continuación se enumeran los pasos fundamentales en la generación de la malla y asignación de propiedades para un problema tridimensional. En problemas unidimensionales y bidimensionales la filosofía de trabajo es similar, aunque en estos casos el número de tipos de componentes de geometría y malla es menor y, por tanto, la introducción de datos es más sencilla. La nomenclatura utilizada es la descrita en el apéndice 1.

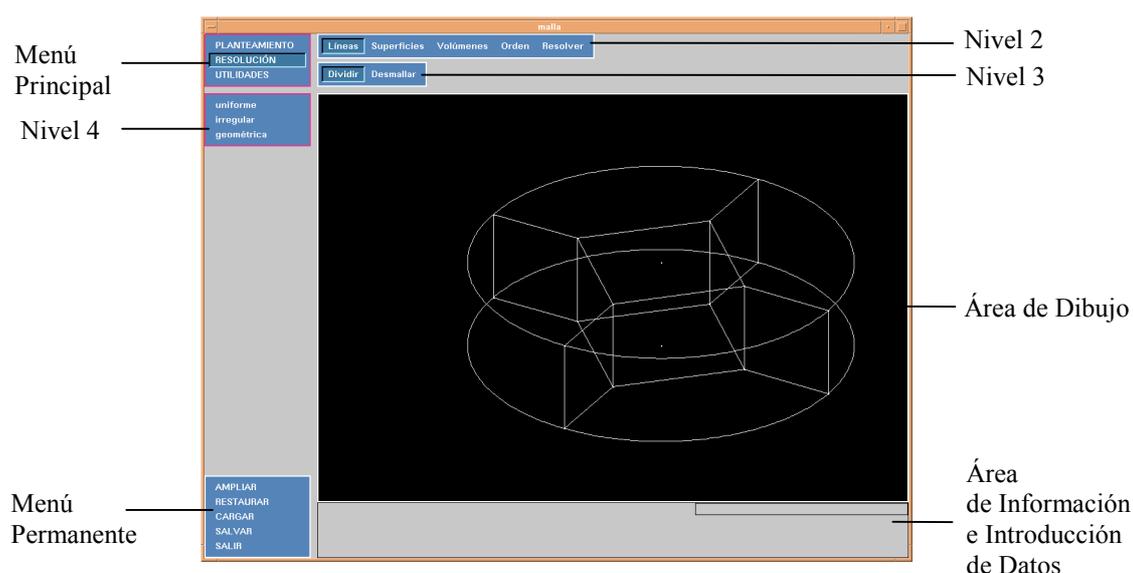


Figura A5.1. Sistema de menús del programa

1. Definición de la geometría

- 1.1. Creación de puntos (normales o focos)
- 1.2. Creación de líneas (rectas o arcos cónicos)
- 1.3. Creación de polilíneas (cuando así se requiera)
- 1.4. Creación de superficies. En el caso de superficies definidas por su contorno, éstas se crean a partir de las líneas o polilíneas que las definen o a partir de sus puntos. En este último caso, las líneas son creadas automáticamente (como rectas) si no existen previamente. En el caso de superficies cuádricas o de revolución son necesarios otros parámetros, indicados en el apéndice 1, para su completa definición.
- 1.5. Creación de polisuperficies (cuando así se requiera).
- 1.6. Creación de volúmenes, bien a partir de sus puntos o bien de sus superficies y polisuperficies. En el primer caso, si no existen las líneas y superficies que delimitan el volumen, éstas se crean automáticamente como rectas y como superficies definidas por su contorno, respectivamente. La figura A5.2 muestra una geometría multibloque definida a partir de volúmenes hexaédricos.

2. Generación de la malla

- 2.1 Discretización de líneas (uniforme, irregular o geométrica).
- 2.2. Discretización de superficies, bien triangular, bien cuadrilátera (cuando la discretización de su contorno lo permita) o bien mixta.
- 2.3 Discretización volumétrica. Cuando la discretización del contorno del volumen permite la generación de una malla estructurada se emplea el método de interpolación por proyectores transfinitos, en su versión tetraédrica o en la hexaédrica. Si esto no es posible, se aplica el método de frente de avance y la malla resultante es tetraédrica. La figura A5.3 muestra la malla tetraédrica generada a partir de la geometría definida en la figura A5.2.

3. Asignación de propiedades

Las propiedades pueden ser de dos tipos:

- Condiciones de contorno, como las condiciones de pared eléctrica o magnética.
- Materiales, definidos por su permitividad eléctrica y su permeabilidad magnética.

Estas propiedades se pueden asignar a los componentes de la geometría, que las transfieren a los componentes de la malla que contienen, o directamente a los componentes de la malla. En el primer caso, esta asignación puede ser anterior a la discretización del dominio.

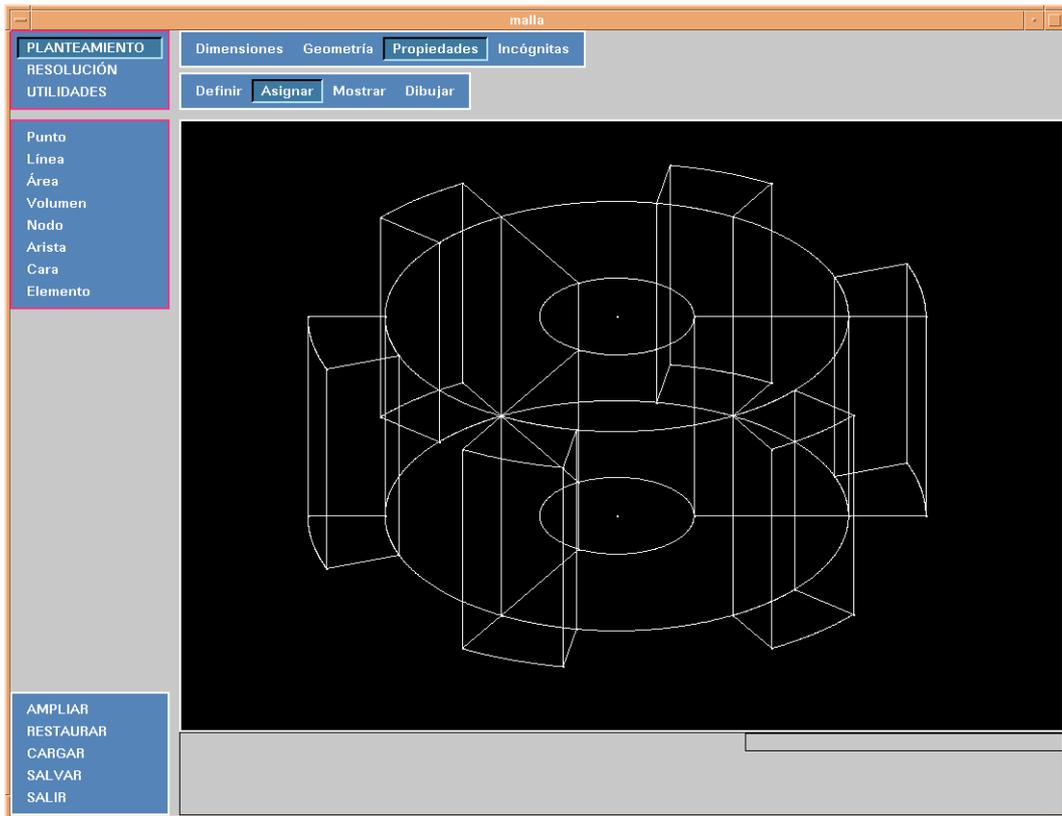


Figura A5.2. Geometría multibloque formada por 9 volúmenes

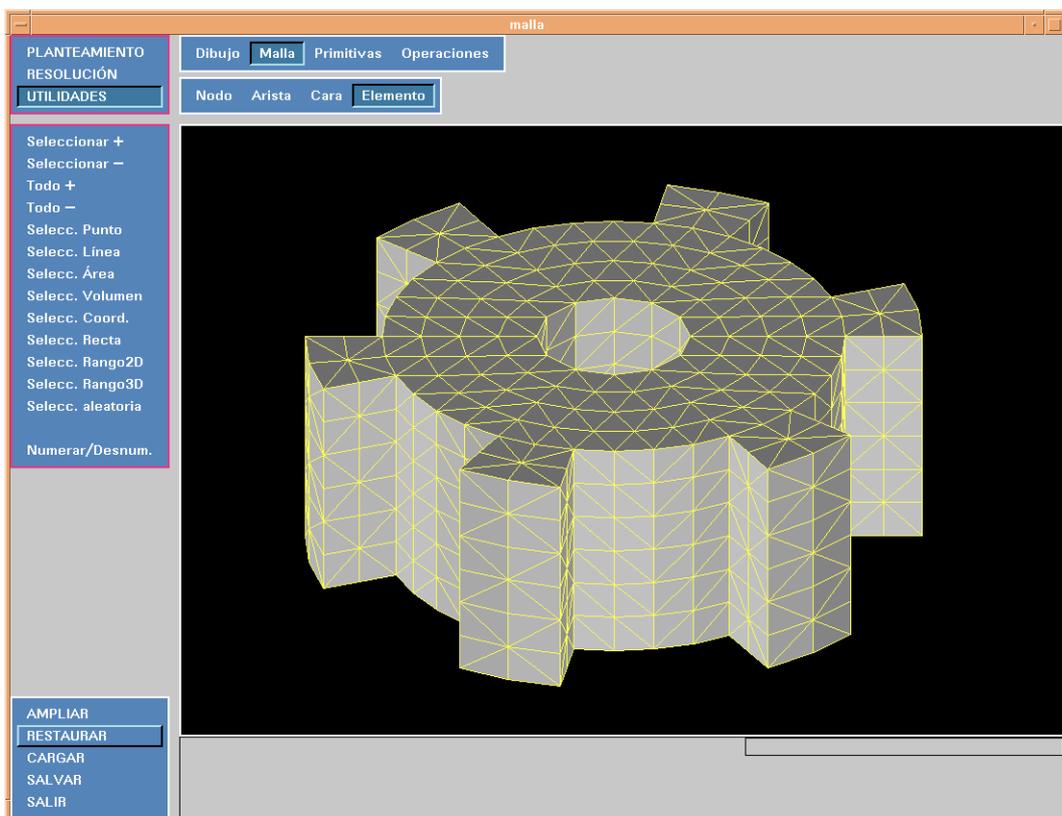


Figura A5.3. Malla tetraédrica de la geometría de la figura A5.2

Complementando estas funciones básicas, el programa presenta otras opciones que facilitan las anteriores y permiten un mayor control sobre la geometría y la malla. Algunas de estas opciones son:

- Generación de retícula de puntos (cartesiana o polar).
- Selección de componentes geométricos o de malla. En este último caso, la selección puede ser directa, por pertenencia a uno o varios componentes de geometría, por pertenencia a un intervalo n -dimensional (por ejemplo, la selección de todos los elementos que se encuentren en el interior de un cubo) o de modo aleatorio. Este último caso puede ser interesante, por ejemplo, para el modelado de un producto granulado, que se puede definir como una mezcla de granos del producto, con una permitividad y permeabilidad características, y aire.
- Eliminación de componentes. En este caso, sólo se permiten aquellas eliminaciones que no producen incoherencias en la geometría o en la malla. Por ejemplo, no es posible eliminar una cara perteneciente a un elemento sin borrar previamente el elemento o elementos a los que pertenece.
- Eliminación de discretizaciones (de líneas, superficies o volúmenes), con las mismas restricciones comentadas en el punto anterior, esto es, no se puede, por ejemplo, eliminar la discretización de una línea (nodos y aristas) sin borrar la discretización de la superficie o superficies a las que pertenece.
- Desplazamiento o copia de componentes.
- Visualización u ocultación de la numeración de los distintos componentes. En la figura A5.4 se muestra un ejemplo de numeración de los elementos en una malla bidimensional.
- Reposicionamiento de nodos.
- Intercambio de aristas.
- Ampliación de zonas del dominio.
- Grabación en ficheros de los componentes generados. En el proceso de grabación se generan dos ficheros, uno de geometría y otro de malla. Este último es el requerido para resolver el problema mediante el MEF.

El formato de estos dos ficheros se muestra en las figuras A5.5 y A5.6. En el fichero de geometría, la columna *Orientación* indica el ángulo asociado a un foco, esto es, el que forma la cónica (o su eje mayor) generada por ese foco con el eje x . En el ejemplo mostrado no se han empleado focos y , por tanto, todas las orientaciones son 0. La columna *Tipo* en las líneas indica de qué clase de línea se trata: en las rectas este valor es 0 y en las cónicas es el foco que las genera. En las áreas, el *tipo* se identifica con el número de líneas del área. En el ejemplo, que todas las áreas sean de tipo 41 indica que son cuadriláteros. Respecto al fichero de mallado, la columna *Pertenencia* indica a qué componente geométrico pertenece un determinado componente de malla. Para evitar ambigüedades, se emplean unidades para la pertenencia a punto, millares para la pertenencia a línea y millones para la pertenencia a área. La columna *Tipo* en este fichero tiene el mismo significado que en el de geometría, de modo que el 31 de este campo indica que el elemento es triangular. La *propiedad* en nodos y aristas hace referencia a la condición de contorno aplicable a tales componentes. Así, un 0 indica que el componente es interior, un 1 indica condición de pared eléctrica y un 2 de pared magnética. En los elementos, la *propiedad* identifica el tipo de material. La descripción de estos materiales se realiza en la parte final de los ficheros de geometría y mallado. En el ejemplo mostrado, “E 1 0” indica que el material es dieléctrico isótropo con $\epsilon_r = 1 - j0$, es decir, el vacío.

- Carga de componentes desde ficheros.

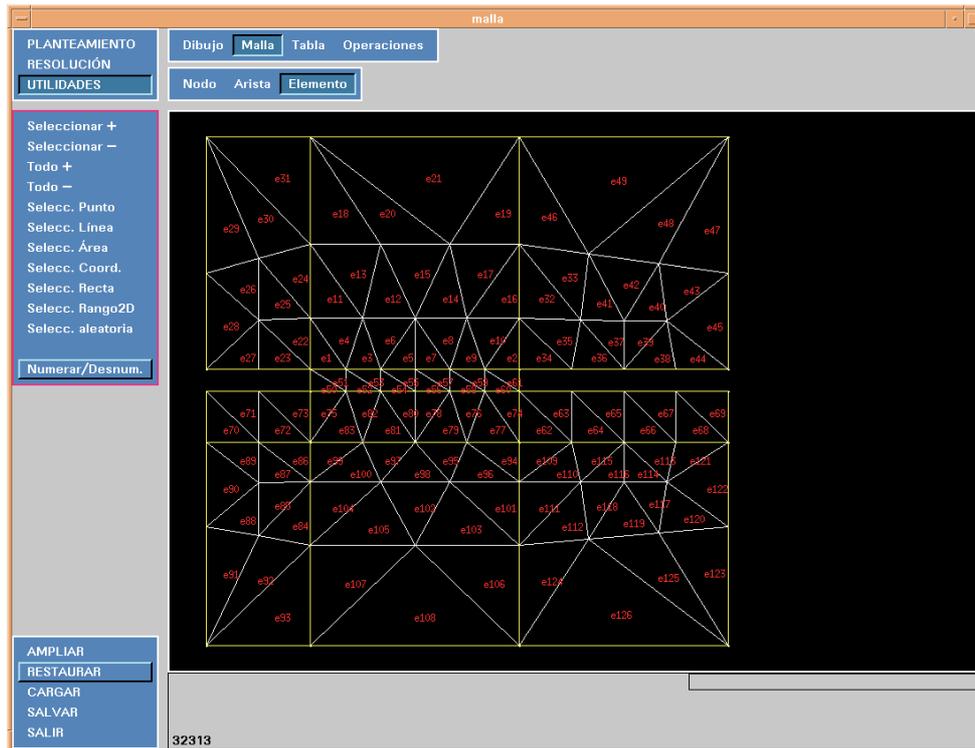


Figura A5.4. Numeración de elementos en una malla bidimensional

```

2D
8 PUNTOS
n Propiedad x y Orientacion nodo asociado
1 0 0 0 0 1
2 0 1.27 0 0 2
3 0 0.635 0 0 3
4 0 0 0.635 0 4
5 0 0.635 0.635 0 5
6 0 0 1.27 0 6
7 0 0.635 1.27 0 7
8 0 1.27 0.635 0 8

10 LINEAS
n Propiedad Tipo Punto inicial Punto final aristas
1 0 0 1 3 1 6
2 0 0 3 5 7 13
3 0 0 5 4 14 20
4 0 0 4 1 21 26
5 0 0 3 2 27 28
6 0 0 2 8 29 31
7 0 0 8 5 32 40
8 0 0 5 7 41 49
9 0 0 7 6 50 52
10 0 0 6 4 53 54

0 POLILINEAS
n Lineas

3 AREAS
n Propiedad Tipo Lineas elementos aristas nodos
1 0 41 1 2 3 4 1 130 55 236 53 105
2 0 41 5 6 7 2 131 203 237 335 106 132
3 0 41 3 8 9 10 204 276 336 434 133 159

1 PROPIEDADES
n Descripcion
1 E 1 0

```

Figura A5.5. Formato de fichero de geometría bidimensional

```

159  NODOS
n    Propiedad Pertenencia x          y
1    1          1          0          0
2    1          2          1.27       0
3    1          3          0.635      0
4    1          4          0          0.635
5    1          5          0.635     0.635
6    1          6          0          1.27
7    1          7          0.635     1.27
8    1          8          1.27     0.635
9    1          1000       0.3175  0
.....
159  0          3000000    0.615156  0.65484375

434  ARISTAS
n    Propiedad Pertenencia nodo inicial  nodo final
1    1          1000         1         12
2    1          1000         12        10
3    1          1000         10        11
4    1          1000         11        9
5    1          1000         9         13
6    1          1000         13        3
7    0          2000         3         19
8    0          2000         19        14
9    0          2000         14        15
.....
434  0          3000000         140        49

276  ELEMENTOS
n    Propiedad Tipo  Pertenencia arista1 arista2 arista3 arista4
1    1          31    1000000     62     66     55
2    1          31    1000000     67     58     63
3    1          31    1000000     62     18     68
4    1          31    1000000     57     67     68
5    1          31    1000000     69     58     59
6    1          31    1000000     64     70     56
7    1          31    1000000     71     61     65
8    1          31    1000000     64     9      72
9    1          31    1000000     60     71     72
.....
276  1          31    3000000     389    433    434

1  PROPIEDADES
n  Descripcion
1  E          1          0

```

Figura A5.6. Formato de fichero de mallado bidimensional

Apéndice 6.

PUBLICACIONES GENERADAS POR LA TESIS

- Díaz A., Nuño L., “Desarrollo de un Programa de Mallado Bidimensional para su Aplicación en la Resolución de Problemas Electromagnéticos Mediante el Método de los Elementos Finitos”, *Actas del X Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, pp. 663-666, 1995
- Balbastre J.V., Bort M., Nuño L., Díaz A., “Electromagnetic Susceptibility Analysis of Slotted Screens Using the Generalised Circuitual Analysis”, *Actas del Congreso “High Frequency Simulation: Part Two (Institution of Electrical Engineers Colloquium)*, 1997
- Díaz A., Nuño L., “Mallado de Superficies de Contorno Irregular para la Resolución de Problemas Electromagnéticos con el Método de los Elementos Finitos”, *Actas del XII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, pp. 251-254, 1997
- Díaz A., Nuño L., “Meshing of Arbitrary 2D-geometries in the Finite Element Method by Means of an Advancing Front / Interpolation Combined Technique”, *Computational Mechanics. New Trends and Applications (Proceedings on the Fourth World Congress on Computational Mechanics)*, 1998
- Díaz A., Nuño L., “Grid Generation of Arbitrary 2D-Geometries by Means of an Advancing Front / Interpolation Hybrid Technique”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations (Proceedings of the Sixth International Conference)*, pp. 403-410, 1998
- Díaz A., Nuño L., “2-D Grid Generation Program Based on Multi-block Methods for the Application of the Finite Element Method to Electromagnetics”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations (Proceedings of the Sixth International Conference)*, pp. 925-930, 1998
- Bernal A., Díaz A., Nuño L., Balbastre J.V., “Mallado Volumétrico y de Superficies Tridimensionales para la Resolución de Problemas Electromagnéticos mediante Elementos Finitos”, *Actas del XIII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, pp. 33-34, 1998
- Díaz A., Bernal A., Nuño L., “Mesh Generation Methods over Plane and Curved Surfaces”, *Proceedings of the Seventh International Meshing Round Table*, pp. 397-407, 1998
- Balbastre J.V., Nuño L., Díaz A., Muelas A., Crespo I., “Finite-Element Analysis of General Lossy Anisotropic Resonant Cavities Using Edge Elements”, *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 19, no. 4, pp. 304-307, 1998
- Balbastre J.V., Nuño L., Díaz A., “Study of Near Field Coupling Phenomena in Slotted Screens Using the Generalised Circuitual Analysis”, *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 20, no. 1, pp. 40-44, 1999

- Díaz A., Nuño L., “Resolución de Problemas Electromagnéticos en Guías de Onda mediante Técnicas de Mallado Adaptativo”, *Métodos Numéricos en Ingeniería (Actas del IV Congreso Nacional de Métodos Numéricos en Ingeniería)*, 1999
- Díaz A., Nuño L., “Generación de Malla no Estructurada en Superficies de Revolución, Regladas y Cuádricas”, *Métodos Numéricos en Ingeniería (Actas del IV Congreso Nacional de Métodos Numéricos en Ingeniería)*, 1999
- Díaz A., Nuño L., “A Simple Error Estimator for Adaptive Finite Element Analysis in Waveguiding Structures”, *IEEE Antennas & Propagation Society. International Symposium 1999*, pp. 2634-2637, 1999
- Díaz A., Nuño L., “Application of Adaptive Finite Element Methods to Electromagnetic Problems in Transmission Lines”, *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics*, 1999
- Díaz A., Nuño L., Balbastre J.V., “Método de Elementos Finitos Adaptativo para Problemas en Guías de Onda”, *Actas del XIV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, 1999
- Balbastre J.V., Nuño L., Díaz A., Muelas A., Crespo I., “Finite Element Analysis of General Bi-anisotropic Resonant Cavities Using Edge Elements”, *Seventh International Conference on Microwave and High Frequency Heating*, pp. 23-26, 1999
- Díaz A., Nuño L., Balbastre J.V., “Adaptive Finite Element Method for Low Cost Analysis of Waveguiding Structures”, *Seventh International Conference on Microwave and High Frequency Heating*, pp. 183-186, 1999
- Díaz A., Nuño L., Balbastre J.V., “A Residual Error Estimator for Adaptive Finite Element Analysis in Lossy and Anisotropic Waveguiding Structures”, *20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods In Engineering*, 1999
- Nuño L., Balbastre J.V., Díaz A., “Analysis of Inter- and Intra-System Interference Problems by Generalized Circuital Techniques”, *20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods In Engineering*, 1999

BIBLIOGRAFÍA

- [Ada92] Adamiak K., “Local Error Indicator in Finite Element Analysis of Laplacian Fields Based on the Green Integration Formula”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1625-1642, 1992
- [Aga98] Agarwal R.K., “A Comparative Study of Two Algebraic Moving Mesh Strategies for Adaptive Grid Generation”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 79-88, Greenwich, 1998
- [Ahm98] Ahmad N., Dunn T., Mays D., Bacon D., Hall M., Sarma R.A., Boybeyi Z., Lee P., Turner M., “A Solution-Adaptive Grid Generation Scheme for Atmospheric Flow Simulations”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 327-335, Greenwich, 1998
- [Ain89] Ainsworth M., Zhu J.Z., Craig A.W., Zienkiewicz O.C., “Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A-Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 2161-2174, 1989
- [Ain92a] Ainsworth M., Craig, A., “A Posteriori Error Estimators in the Finite Element Method”, *Numerische Mathematik*, vol. 60, pp. 429-463, 1992
- [Ain92b] Ainsworth M., Oden J.T., “A Procedure for A Posteriori Error Estimation for h-p Finite Element Methods”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 101, pp. 73-96, 1992
- [Ain93] Ainsworth M., Oden J.T., “A Unified Approach to A Posteriori Error Estimation Using Element Residual Methods”, *Numerische Mathematik*, vol. 65, pp. 23-50, 1993
- [Alf96] Alfonzetti S., Coco S., Cavalieri S., Malgeri M., “Automatic Mesh Generation by Let-It-Grow Neural Network”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n. 3, pp. 1349-1352, 1996
- [Alo96] Alotto P., Girdinio P., Nervi M., Fernandes P., “Mesh Adaptation in Finite Element Analysis of 2D Steady State Time Harmonic Eddy Current Problems”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n. 3, pp. 1361-1364, 1996
- [Aur91] Aurenhammer F., “Voronoi Diagrams - A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure”, *ACM Computing Surveys*, vol. 23, n. 3, pp. 345-405, 1991
- [Aya99] Ayala C.M.A., Devloo P.R.B., Pavanello R., “Sobre a Implementação de um Refinamento h-p”, *Computational Methods in Engineering'99 (XX CILAMCE)*, Sao Paulo, 1999
- [Bab78] Babuska I., Rheinboldt W.C., “A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, pp. 1597-1615, 1978
- [Bab79] Babuska I., Rheinboldt W.C., “On the Reliability and Optimality of the Finite Element Method”, *Computers & Structures*, vol. 10, pp. 87-94, 1979
- [Bab92] Babuska I., Plank L., Rodríguez R., “Quality Assessment of the A-Posteriori Error Estimation in Finite Elements”, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 11, pp. 285-306, 1992

- [Bab93] Babuska I.M., Rodriguez R., “The Problem of the Selection of an A Posteriori Error Indicator Based on Smoothing Techniques”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 539-567, 1993
- [Bab97a] Babuska I., Ihlenburg F., Strouboulis T., Gangaraj S.K., “A Posteriori Error Estimation for Finite Element Solutions of Helmholtz Equation. Part I: The Quality of Local Indicators and Estimators”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 3443-3462, 1997
- [Bab97b] Babuska I., Ihlenburg F., Strouboulis T., Gangaraj S.K., “A Posteriori Error Estimation for Finite Element Solutions of Helmholtz Equation. Part II: Estimation of the Pollution Error”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 3883-3900, 1997
- [Bae87] Baehmann P.L., Wittchen S.L., Shephard M.S., Grice K.R., Yerry M.A., “Robust, Geometrically Based, Automatic Two-Dimensional Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 1043-1078, 1987
- [Bae89] Baehmann P.L., Shephard M.S., “Adaptive Multiple-Level h-Refinement in Automated Finite Element Analysis”, *Engineering with Computers*, vol. 5, pp. 235-247, 1989
- [Bak98] Baker T.J., “Tetrahedral Mesh Generation and Optimization”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 337-349, Greenwich, 1998
- [Bal96] Balbastre Tejedor, J.V., *Solución de Problemas Electromagnéticos Cerrados y Abiertos Mediante el Método de los Elementos Finitos, Incluyendo Materiales Anisótropos e Inhomogéneos*, Tesis Doctoral, Valencia, 1996
- [Bal98] Balu R., Unnikrishnan C., “Application of an Adaptive Mesh Method to Complex Flow Simulations”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 89-98, Greenwich, 1998
- [Ban85] Bank R.E., Weiser A., “Some A Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations”, *Mathematics of Computation*, vol. 44, n. 170, pp. 283-301, 1985
- [Ban97] Bank R.E., Smith R.K., “Mesh Smoothing Using A Posteriori Error Estimates”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 34, n. 3, pp. 979-997, 1997
- [Bar73] Barnhill R.E., Birkhoff G., Gordon W.J., “Smooth Interpolation in Triangles”, *Journal of Approximation Theory*, vol. 8, pp. 114-128, 1973
- [Bel93] Belytschko T., Tabbara M., “H-Adaptive Finite Element Methods for Dynamic Problems, with Emphasis on Localization”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 4245-4265, 1993
- [Ber97] Bern M., Eppstein D., “Quadrilateral Meshing by Circle Packing”, *Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, pp. 7-20, 1997
- [Bid86] Biddlecombe C.S., Simkin J., Trowbridge C.W., “Error Analysis in Finite Element Models of Electromagnetic Fields”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 22, n. 5, pp. 811-813, 1986
- [Bla91] Blacker T.D., Stephenson M.B., “Paving: A New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, pp. 811-847, 1991
- [Bla93] Blacker T.D., Meyers R.J., “Seams and Wedges in Plastering: A 3-D Hexahedral Mesh Generation Algorithm”, *Engineering with Computers*, vol. 9, pp. 83-93, 1993
- [Bon91] Bonet J., Peraire J., “An Alternating Digital Tree (ADT) Algorithm for 3D Geometric Searching and Intersection Problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, pp. 1-17, 1991
- [Bor97] Borouchaki H., Hecht F., Frey P.J., “Mesh Gradation Control”, *Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, pp. 131-141, 1997

- [Can98] Canann S.A., Tristano J.R., Staten M.L., "An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes", *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 479-494, Dearborn, 1998
- [Car88] Carey G.F., Sharma M., Wang K.C., "A Class of Data Structures for 2-D and 3-D Adaptive Mesh Refinement", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 2607-2622, 1988
- [Cas96] Cass R.J., Benzley S.E., "Generalized 3-D Paving: An Automated Quadrilateral Surface Mesh Generation Algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 1475-1489, 1996
- [Cav85] Cavendish J.C., Field D.A., Frey W.H., "An Approach to Automatic Three-Dimensional Finite Element Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, pp. 329-347, 1985
- [Cav99] Cavalcante J.B., Martha L.F., "Um Protótipo para um Sistema de Análise Adaptativa em Três Dimensões", *Computational Methods in Engineering'99 (XX CILAMCE)*, Sao Paulo, 1999
- [Cen85] Cendes Z.J., Shenton D.N., "Adaptive Mesh Refinement in the Finite Element Computation of Magnetic Fields", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, n. 5, pp. 1811-1816, 1985
- [Col97] Colyer B., Simkin J., Trowbridge C.W., Barberis U., Picco E., Gutierrez T., Longo A., Greenough C., Thomas D., Alotto P., Molfino P., Molinari G., Jared G., Sormaz N., "Project MIDAS: Magnet Integrated Design and Analysis System", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, n. 2, pp. 1143-1148, 1997
- [Coo74] Cook W.A., "Body Oriented (Natural) Co-ordinates for Generating Three-Dimensional Meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, pp. 27-43, 1974
- [Coo82] Cook W.A., Oakes W.R., "Mapping Methods for Generating Three-Dimensional Meshes", *Computers in Mechanical Engineering*, vol. August, pp. 67-72, 1982
- [Cou98] Coupez T., "Adaptive Meshing for Forming Processes", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 3-19, Greenwich, 1998
- [Cui98] Cuillière J.C., "An Adaptive Method for the Automatic Triangulation of 3D Parametric Surfaces", *Computer-Aided Design*, vol. 30, n. 2, pp. 139-149, 1998
- [Cun97] Cunha A., Canann S., Saigal S., "Automatic Boundary Sizing for 2D and 3D Meshes", *AMD-Vol. 220. Trends in Unstructured Mesh Generation*, ASME, pp. 65-72, 1997
- [Cha97] Chan C.T., Anastasiou K., "An Automatic Tetrahedral Mesh Generation Scheme by the Advancing Front Method", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 13, pp. 33-46, 1997
- [Cha98] Chappell J.A., Bull P.W., "Multi-zonal Multi-block Grids for Hydrodynamic Simulations", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 141-150, Greenwich, 1998
- [Che94] Chellamuthu K.C., Ida N., "A Posteriori Element by Element Local Error Estimation Technique and 2D & 3D Adaptive Finite Element Mesh Refinement", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, n. 5, pp. 3527-3530, 1994
- [Che96] Chedid R., Najjar N., "Automatic Finite-Element Mesh Generation Using Artificial Neural Networks — Part I: Prediction of Mesh Density", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n. 5, pp. 5173-5178, 1996
- [Che98] Chew S.C., Jiang Y.T., Tsai H.M., "An Automatic 3-D Multi-Block Grid Generator Using Hyperbolic-Elliptic Method", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 197-207, Greenwich, 1998

- [Dan90] Dannelongue H.H., Tanguy P.A., “Efficient Data Structures for Adaptive Remeshing with the FEM”, *Journal of Computational Physics*, vol. 91, pp. 94-109, 1990
- [Deg98] Degtyarev L.M., Ivanova T.S., Martynov A.A., Medvedev S.Y., “Generation of Solution Adaptive Quasi Orthogonal Moving Grids for Complex Structure Flows”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 99-108, Greenwich, 1998
- [Dem89] Demkowicz L., Oden J.T., Rachowicz W., Hardy O., “Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 1. Constrained Approximation and Data Structure”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 77, pp. 79-112, 1989
- [Dho99] Dhondt G.D., “Automatic Hexahedral Meshing Technique Based on a Cutting Procedure”, *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics (ECCM'99)*, Munich, 1999
- [Dom98] Dompierre J., Labbé P., Guibault F., Camarero R., “Proposal of Benchmarks for 3D Unstructured Tetrahedral Mesh Optimization”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 459-478, Dearborn, 1998
- [Dra92] Drago G., Molfino P., Nervi M., Repetto M., “A “Local Error Problem” Approach for Error Estimation in Finite Element Analysis”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, n. 2, pp. 1743-1746, 1992
- [Dur91] Durán R., Muschietti M.A., Rodríguez R., “On the Asymptotic Exactness of Error Estimators for Linear Triangular Finite Elements”, *Numerische Mathematik*, vol. 59, pp. 107-127, 1991
- [Ecc98] Eccles N.C., Priddin C.H., “Issues in Structured Grid Generation for Gas Turbine Combustion Systems”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 209-218, Greenwich, 1998
- [Eri88] Eriksson K., Johnson C., “An Adaptive Finite Element Method for Linear Elliptic Problems”, *Mathematics of Computation*, vol. 50, pp. 361-383, 1988
- [Far93] Farestam S., *Génération de Maillages Non-Structurés Anisotropes sur des Variétés Bidimensionnelles*, Thèse, Toulouse, 1993
- [Fer88] Fernandes P., Girdinio P., Molfino P., Repetto M., “Local Error Estimates for Adaptive Mesh Refinement”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, n. 1, pp. 299-302, 1988
- [Fer90] Fernandes P., Girdinio P., Molfino P., Molinari G., Repetto M., “A Comparison of Adaptive Strategies for Mesh Refinement Based on “A posteriori” Local Error Estimation Procedures”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26, n. 2, pp. 795-798, 1990
- [Fer92] Fernandes P., Girdinio P., Repetto M., Secondo G., “Refinement Strategies in Adaptive Meshing”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, n. 2, pp. 1739-1742, 1992
- [Fre87] Frey W.H., “Selective Refinement: A New Strategy for Automatic Node Replacement in Graded Triangular Meshes”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 2183-2200, 1987
- [Fuc98] Fuchs A., “Automatic Grid Generation with Almost Regular Delaunay Tetrahedra”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 133-147, Dearborn, 1998
- [Gag83] Gago J.P.S.R., Kelly D.W., Zienkiewicz O.C., “A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II — Adaptive Mesh Refinement”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 1621-1656, 1983
- [Geo91] George P.L., *Automatic Mesh Generation. Application to Finite Element Methods*, Ed. John Wiley & Sons - Masson, 1991

- [Geo92] George P.L., Hermeline F., “Delaunay’s Mesh of a Convex Polyhedrom in Dimension d. Application to Arbitrary Polyhedra”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 975-995, 1992
- [Geo98] George P.L., “Automatic 3D Mesh Generation Conforming a Prescribed Size Map”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 21-32, Greenwich, 1998
- [Gia94] Giannacopoulos D., McFee S., “Towards Optimal h-p Adaption Near Singularities in Finite Element Electromagnetics”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, n. 5, pp. 3523-3526, 1994
- [Gil97] Gil J.M., Webb J.P., “A New Edge Element for the Modeling of Field Singularities in Transmission Lines and Waveguides”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, n. 12, 2125-2130, 1997
- [Gir96] Girdinio P., Molfino P., Nervi M., Manella A., “Non-Linear Magnetostatic Adaption Using a “Local Field Error” Approach”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n. 3, pp. 1365-1368, 1996
- [Gol92] Golias N.A., Tsiboukis T.D., “Three-Dimensional Automatic Adaptive Mesh Generation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, n. 2, pp.1700-1703, 1992
- [Gol93] Golias N.A., Tsiboukis T.D., “Adaptive Refinement Strategies in Three Dimensions”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, n. 2, pp.1886-1889, 1993
- [Gor73] Gordon W.J., Hall C.A., “Construction of Curvilinear Co-ordinate Systems and Applications to Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 461-477, 1973
- [Hab81] Haber R., Shephard M.S., Abel J.F., Gallagher R.H., Greenberg D.P., “A General Two-Dimensional, Graphical Finite Element Preprocessor Utilizing Discrete Transfinite Mappings”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 1015-1044, 1981
- [Hab82] Haber R., Abel J.F., “Discrete Transfinite Mappings for the Description and Meshing of Three-Dimensional Surfaces Using Interactive Computer Graphics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, pp. 41-66, 1982
- [Has96] Hassan O., Morgan K., “Unstructured Tetrahedral Mesh Generation for Three-Dimensional Viscous Flows”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 549-567, 1996
- [Hin91] Hinton E., Rao N.V.R., Özakça M., “Mesh Generation with Adaptive Finite Element Analysis”, *Advances in Engineering Software*, vol. 13, n. 5/6, pp. 238-262, 1991
- [Ho88] Ho-Le K., “Finite Element Mesh Generation Methods: A Review and Classification”, *Computer-Aided Design*, vol. 20, n. 1, pp. 27-38, 1988
- [Jän96] Jänicke L., Kost A., “Error Estimation and Adaptive Mesh Generation in the 2D and 3D Finite Element Method”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n.3, pp. 1334-1337, 1996
- [Jia98] Jiang Y.T., Tsai H.M., “A Hyperbolic-Elliptic Method for Grid Generation”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 229-238, Greenwich, 1998
- [Jin93] Jin J., *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Ed. John Wiley & Sons, 1993
- [Jon97] Jones M.T., Plassmann P.E., “Adaptive Refinement of Unstructured Finite-Element Meshes”, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 25, pp. 41-60, 1997
- [Jon98] Jones W.T., “Efficient Smoothing and Deformation of Structured Volume Grids”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 239-248, Greenwich, 1998
- [Kar97] Karamete B.K., Tokdemir T., Ger M., “Unstructured Grid Generation and a Simple Triangulation Algorithm for Arbitrary 2-D Geometries Using Object Oriented Programming”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 251-268, 1997

- [Kel83] Kelly D.W., Gago J.P.S.R., Zienkiewicz O.C., Babuska I., “A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method : Part I - Error Analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 1593-1619, 1983
- [Kel84] Kelly D.W., “The Self-Equilibration of Residuals and Complementary A Posteriori Error Estimates in the Finite Element Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 1491-1506, 1984
- [Kel87] Kelly D.W., Mills R.J., Reizes J.A., “A Posteriori Estimates of the Solution Error Caused by Discretization in the Finite Element, Finite Difference and Boundary Element Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 1921-1939, 1987
- [Kik86] Kikuchi N., “Adaptive Grid-Design Methods for Finite Element Analysis”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 55, pp. 129-160, 1986
- [Knu98a] Knupp P.M., “Next-Generation Sweep Tool: A Method for Generating All-Hex Meshes on Two-And-One-Half Dimensional Geometries”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 505-513, Dearborn, 1998
- [Knu98b] Knupp P.M., “Winslow Smoothing on Two-Dimensional Unstructured Meshes”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 449-457, Dearborn, 1998
- [Koo98] Koomullil R.P., Soni B.K., “Generalized Grid Techniques in Computational Field Simulation”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 521-531, Greenwich, 1998
- [Kry98] Krysl P., Ortiz M., “Generation of Tetrahedral Finite Element Meshes: Variational Delaunay Approach”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 273-284, Dearborn, 1998
- [Kup98] Kuprat A., George D., “Maintaining Tetrahedral Mesh Quality in Response to Time-dependent Topological and Geometrical Deformation”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 589-598, Greenwich, 1998
- [Lad83] Ladevece P., Leguillon D., “Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications”, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 20, pp. 485-509, 1983
- [Lad98] Ladeinde F., Alabi K., “A High-Quality Advancing Front Technique Using Recursive Domain Sub-Division”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 431-446, Greenwich, 1998
- [Laf98] Laflin R., McRae D.S., “Solver-Independent Efficient r-Refinement Algorithm (SIERRA)”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 109-118, Greenwich, 1998
- [Lea98a] Leatham M., “The Generation on 3D Delaunay Grids Without Boundary Modification”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 447-456, Greenwich, 1998
- [Lea98b] Leatham M., Chappell J.A., “On the Rapid Regeneration of Hybrid Grids Due to Design Driven Geometry Perturbation”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 533-542, Greenwich, 1998
- [Lee98] Lee M.C., Joun M.S., “General Approach to Automatic Generation of Quadrilaterals on Three-Dimensional Surfaces”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 609-620, 1998
- [Lel98] Leland R.W., Melander D.J., Meyers R.W., Mitchell S.A., Tautges T.J., “The Geode Algorithm: Combining Hex/Tet Plastering, Dicing and Transition Elements for Automatic, All-Hex Mesh Generation”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 515-521, Dearborn, 1998

- [Lew96] Lewis R.W., Zheng Y., Gethin D.T., “Three-Dimensional Unstructured Mesh Generation: Part 3. Volume Meshes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 134, pp. 285-310, 1996
- [Li94] Li X.D., Wiberg N.E., “A Posteriori Error Estimate by Element Patch Post-Processing, Adaptive Analysis in Energy and L_2 Norms”, *Computers & Structures*, vol. 53, n. 4, pp. 907-919, 1994
- [Li98] Li X.Y., Teng S.H., Üngör A., “Simultaneous Refinement and Coarsening: Adaptive Meshing with Moving Boundaries”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 201-210, Dearborn, 1998
- [Lo85] Lo S.H., “A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, pp. 1403-1426, 1985
- [Lo88] Lo S.H., “Finite Element Mesh Generation over Curved Surfaces”, *Computers & Structures*, vol. 29, n. 5, pp. 731-742, 1988
- [Lo89] Lo S.H., “Generating Quadrilateral Elements on Plane and over Curved Surfaces”, *Computers & Structures*, vol. 31, n. 3, pp. 421-426, 1989
- [Lo97] Lo S.H., “Optimization of Tetrahedral Meshes Based on Element Shape Measures”, *Computers & Structures*, vol. 63, n. 5., pp. 951-961, 1997
- [Lob95] Lober R.R., Tautges T.J., Cairncross R.A., “The Parallelization of an Advancing-Front, All-Quadrilateral Meshing Algorithm for Adaptive Analysis”, *Proceedings of the 4th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, pp. 59-70, 1995
- [Löh88] Löhner R., “Some Useful Data Structures for the Generation of Unstructured Grids”, *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 4, pp. 123-135, 1988
- [Löh97] Löhner R., “Automatic Unstructured Grid Generators”, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 25, pp. 111-134, 1997
- [Low93] Lowther D.A., Rong R., Forghani B., “Field Smoothing and Adaptive Mesh Generation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, n. 2, pp.1890-1893, 1993
- [Loz93] Loze M.K., Saunders R., “Two Simple Algorithms for Constructing a Two-Dimensional Constrained Delaunay Triangulation”, *Applied Numerical Mathematics*, vol. 11, pp. 403-318, 1993
- [Lyr98] Lyra P.R.M., de Carvalho D.K.E., Willmersdorf R.B., “Adaptive Triangular, Quadrilateral and Hybrid Unstructured Mesh Generation with Classical Resequencing Techniques”, *Computational Mechanics. New Trends and Applications*, CIMNE, Barcelona, 1998
- [Mar98] Martyushov S.N., “The 2-D and 3-D Grids Construction as Poisson Equation Decision”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 249-256, Greenwich, 1998
- [McF92] McFee S., Webb J.P., “Adaptive Finite Element Analysis of Microwave and Optical Devices Using Hierarchal Triangles”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, pp. 1708-1711, 1992
- [McF96] McFee S., Giannacopoulos D., “Optimal Discretization based Refinement Criteria for Finite Element Adaption”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n. 3, pp. 1357-1360, 1996
- [McR98] McRae D.S., “r-Refinement Grid Adaptation Issues”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 33-52, Greenwich, 1998
- [Mer98] Merrouche A., Selman A., Knopf-Lenoir C., “3D Adaptive Mesh Refinement”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 397-407, 1998
- [Mey98] Meyers R.J., Tautges T.J., Tuchinsky P.M., “The “Hex-Tet” Hex-Dominant Meshing Algorithm as Implemented in CUBIT”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 151-158, Dearborn, 1998

- [Min97] Min W., "Generating Hexahedron-Dominant Mesh Based on Shrinking-Mapping Method", *Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, pp. 171-182, 1997
- [Mit91] Mitchell W.F., "Adaptive Refinement for Arbitrary Finite-Element Spaces with Hierarchical Bases", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 36, pp. 65-78, 1991
- [Mit92] Mitchell K.G., Penman J., "Self Adaptive Mesh Generation for 3-D Finite Element Calculation", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, n. 2, pp.1751-1754, 1992
- [Mit98] Mitchell S.A., "The All-Hex Geode-Template for Conforming a Diced Tetrahedral Mesh to any Diced Hexahedral Mesh", *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 295-305, Dearborn, 1998
- [Möl95] Möller P., Hansbo P., "On Advancing Front Mesh Generation in Three Dimensions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 3551-3569, 1995
- [Mül98] Müller-Hannemann M., "Hexaedral Mesh Generation by Successive Dual Cycle Elimination", *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 379-393, Dearborn, 1998
- [Mur98] Murphy M., Gable C.W., "Strategies for Nonobtuse Boundary Delaunay Triangulations", *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 309-320, Dearborn, 1998
- [Nie98] Niederdrenk P., "On the Control of Elliptic Grid Generation", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 257-266, Greenwich, 1998
- [Ode89] Oden J.T., Demkowicz L., Rachowicz W., Westermann T.A., "Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A Posteriori Error Estimation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 77, pp. 113-180, 1989
- [Oh96] Oh H.S., Lim J.K., "A Simple Error Estimator for Size and Distortion of 2D Isoparametric Finite Elements", *Computers & Structures*, vol. 59, n. 6, pp. 989-999, 1996
- [Owe97] Owen S.J., Saigal S., "Neighborhood-Based Element Sizing Control for Finite Element Surface Meshing", *Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, pp. 143-154, 1997
- [Owe98a] Owen S.J., "A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology", *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 239-267, Dearborn, 1998
- [Owe98b] Owen S.J., Staten M.L., Canann S.A., Saigal S., "Advancing Front Quadrilateral Meshing Using Triangle Transformations", *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 409-428, Dearborn, 1998
- [Pan98] Pantic-Tanner Z., Savage J.S., Tanner D.R., Peterson A.F., "Two-Dimensional Singular Vector Elements for Finite Element Analysis", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, n. 2, 178-184, 1998
- [Per98] Perronnet A., "Triangle, Tetrahedron, Pentahedron Transfinite Interpolations. Application to the Generation of C^0 or G^1 -Continuous Algebraic Meshes", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 467-476, Greenwich, 1998
- [Pet97] Petersen S.B., Martins P.A.F., "Finite Element Remeshing: A Metal Forming Approach for Quadrilateral Mesh Generation and Refinement", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 1449-1464, 1997
- [Pie98] Piegl L.A., Tiller W., "Geometry-based Triangulation of Trimmed NURBS Surfaces", *Computer-Aided Design*, vol. 30, n. 1, pp. 11-18, 1998
- [Pip98] Piperni P., "New Elliptic Grid Generation Equations with Exact Curvature Control", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 267-276, Greenwich, 1998

- [Pla98] Plaza A., Suárez J.P., Padrón M.A., “Mesh Graph Structure for Longest-Edge Refinement Algorithms”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 335-344, Dearborn, 1998
- [Pre96] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., *Numerical Recipes in Fortran 77. Second Edition. The Art of Scientific Computing*, Ed. Cambridge University Press, 1996.
- [Pri95] Price M.A., Armstrong C.G., “Hexahedral Mesh Generation by Medial Surface Subdivision : Part I. Solids with Convex Edges”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 3335-3359, 1995
- [Pri97] Price M.A., Armstrong C.G., “Hexahedral Mesh Generation by Medial Surface Subdivision : Part II. Solids with Flat and Concave Edges”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 111-136, 1997
- [Rac89] Rachowicz W., Oden J.T., Demkowicz L., “Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 3. Design of h-p Meshes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 77, pp. 181-212, 1989
- [Rai94] Raizer A., “A 3D Autoadaptive Mesh Generator for Magnetostatic and Magnetodynamic Problems”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, n. 5, pp. 3531-3534, 1994
- [Ras97] Rassineux A., “3D Mesh Adaptation. Optimization of Tetrahedral Meshes by Advancing Front Technique”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 141, pp. 335-354, 1997
- [Ree97] Rees M., “Combining Quadrilateral and Triangular Meshing Using the Advancing Front Approach”, *Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, pp. 337-348, 1997
- [Rem96] Remacle J.F., Dular P., Genon A., Legros W., “A Posteriori Error Estimation and Adaptive Meshing Using Error in Constitutive Relation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n. 3, pp. 1369-1372, 1996
- [Riv91] Rivara M.C., “Local Modification of Meshes for Adaptive and/or Multigrid Finite-Element Methods”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 36, pp. 79-89, 1991
- [Sak98] Sakovich V.S., Sorokin A.M., Wolkov A.V., Lyapunov S.V., “Anisotropic Unstructured Grid Generation for 3D Flow Simulation Problems”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 487-496, Greenwich, 1998
- [Sal95] Salazar Palma M., *Aplicación del Método de los Elementos Finitos al Análisis de Estructuras de Microondas y Ondas Milimétricas Empleando un Algoritmo de Mallado Adaptativo*, Tesis Doctoral, Madrid, 1995
- [Sal98] Salazar-Palma M., Sarkar T.K., García-Castillo L.E., Roy T., Djordjevic A., *Iterative and Self-Adaptive Finite Elements in Electromagnetic Modeling*, Ed. Artech House, 1998
- [Sch90] Schroeder W.J., Shephard M.S., “A Combined Octree/Delaunay Method for Fully Automatic 3-D Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, pp. 37-55, 1990
- [Sem98] Semenov A.Y., “Application of the Generalized Harmonic Functional for Grid Modification”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 287-292, Greenwich, 1998
- [Sev97] Seveno E., “Towards an Adaptive Advancing Front Method”, *6th International Meshing Round Table*, Sandia National Laboratories, 1997
- [Sha92] Shaw J.A., Weatherill N.P., “Automatic Topology Generation for Multiblock Grids”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 52, pp. 355-388, 1992

-
- [Sha98a] Sharov D., Nakahashi K., “Curvature Adapted Triangulation of Surface Models via Incremental Insertion Algorithm”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 695-704, Greenwich, 1998
- [Sha98b] Shaw J.A., Lovell C., Chappell J.A., “Topology and Surface Grid Generation for Block-Structured Grids”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 151-160, Greenwich, 1998
- [She85] Shephard M.S., “Automatic and Adaptive Mesh Generation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, n. 6, pp. 2484-2489, 1985
- [She86] Shephard M.S., Yerry M.A., Baehmann P.L., “Automatic Mesh Generation Allowing for Efficient A Priori and A Posteriori Mesh Refinement”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 55, pp. 161-180, 1986
- [She88] Shephard M.S., “Approaches to the Automatic Generation and Control of Finite Element Meshes”, *Applied Mechanics Review*, vol. 41, n. 4, pp. 169-185, 1988
- [She98] Sheffer A., Etzion M., Rappoport A., Bercovier M., “Hexahedral Mesh Generation Using the Embedded Voronoi Graph”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 347-364, Dearborn, 1998
- [Shi98] Shimada K., Liao J.H., Itoh T., “Quadrilateral Meshing with Directionality Control through the Packing of Square Cells”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 61-76, Dearborn, 1998
- [Sid98] Sidorov A.F., Khairullina O.B., Khairullin A.F., “Parallel Algorithms of Generation of Optimal Multi-Block-Structured Two-Dimensional and Three-Dimensional Grids of Large Size”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 759-768, Greenwich, 1998
- [Sin98] Singh S., Shastri R.R.T., Yelwatkar S., Shevare G.R., “Three Dimensional Unstructured Grid Generation”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 477-486, Greenwich, 1998
- [Siv97] Siva Prasad N., Rajagopal C.J., “Effect of Node Placement Algorithm on Adaptive Mesh Generation”, *Computers & Structures*, vol. 62, n. 5, pp. 909-917, 1997
- [Son98] Soni B.K., Thornburg H., Koomulil R., Apte M., Madhavan A., “PMAG: Parallel Multiblock Adaptive Grid System”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 769-779, Greenwich, 1998
- [Sou99] Sousa J.B., Vaz L.E., Hinton E., “Adaptive Analysis of Shells on Trimmed NURBS Surfaces”, *Computational Methods in Engineering '99 (XX CILAMCE)*, Sao Paulo, 1999
- [Spe98] Spekrijse S.P., Boerstoel J.W., “An Algorithm to Check the Topological Validity of Multi-Block Domain Decompositions”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 161-170, Greenwich, 1998
- [Spi98] Spitaleri R.M., Manzi C., Formaggia L., “A Hybrid Grid Generation Algorithm”, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 543-552, Greenwich, 1998
- [Sta98] Staten M.L., Canann S.A., Owen S.J., “BMSweep: Locating Interior Nodes During Sweeping”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 7-18, Dearborn, 1998
- [Ste97] Stewart J.R., Hughes T.J.R., “An A Posteriori Error Estimator and hp-Adaptive Strategy for Finite Element Discretizations of the Helmholtz Equation in Exterior Domains”, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 25, pp. 1-26, 1997
- [Sun95] Sun D., Manges J., Yuan X., “Spurious Modes in Finite-Element Methods”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 37, n. 5, pp. 12-24, 1995
- [Tau96] Tautges T.J., “The Whisker Weaving Algorithm: A Connectivity-based Method for Constructing All-Hexahedral Finite Element Meshes”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3327-3349, 1996
-

- [Tez96] Tezuka A., "2D Mesh Generation Scheme for Adaptive Remeshing Process in Finite Element Method", *JSME International Journal. Series A*, vol. 39, n. 2, pp. 204-215, 1996
- [Tha80] Thacker W.C., "A Brief Review of Techniques for Generating Irregular Computational Grids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pp. 1335-1341, 1980
- [Tho85] Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W., *Numerical Grid Generation. Foundations and Applications*, Ed. North-Holland, 1985
- [Tho92] Thompson J.F., "Structured and Unstructured Grid Generation", *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 20, n. 1, pp. 73-120, 1992
- [Tin98] Tinoco-Ruiz J.G., Barrera-Sánchez P., "Area Functionals in Plane Grid Generation", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 293-302, Greenwich, 1998
- [Tri98] Tristano J.R., Owen S.J., Canann S.A., "Advancing Front Surface Mesh Generation in Parametric Space Using a Riemannian Surface Definition", *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 429-445, Dearborn, 1998
- [Tys98] Tysell L., Berglind T., Eneroth P., "Adaptive Grid Generation for 3D Unstructured Grids", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 391-400, Greenwich, 1998
- [Ver96] Verfürth, R., *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Ed. Wiley-Teubner, 1996
- [Wan98] Wang Z.J., Bayyuk S.A., "An Automated, Adaptive, Unstructured, Cartesian-Prism-Based Technique for Moving-Boundary Simulations", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 619-628, Greenwich, 1998
- [Wea98] Weatherill N.P., Said R., Morgan K., "The Construction of Large Unstructured Grids by Parallel Delaunay Grid Generation", *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, pp. 53-73, Greenwich, 1998
- [Wib93] Wiberg N.E., Abdulwahab F., "Patch Recovery based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 2703-2724, 1993
- [Wit96] Witting M., Burkhardt S., "Automatic Generation of Finite Difference Meshes by an Evolutionary Algorithm", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n. 3, pp. 1338-1340, 1996
- [Yam96] Yamashita H., Yamaji A., Cingoski V., Kaneda K., "A Novel Tetrahedral Mesh Generation Method for Rotating Machines Including End-Coil Region", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n. 3, pp. 1353-1356, 1996
- [Yek95] Yeker C., Zeid I., "Automatic Three-Dimensional Finite Element Mesh Generation Via Modified Ray Casting", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 2573-2601, 1995
- [Yer84] Yerry M.A., Shephard M.S., "Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Modified-Octree Technique", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 1965-1990, 1984
- [Zav96] Zavattieri P.D., Dari E.A., Buscaglia G.C., "Optimization Strategies in Unstructured Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 2055-2071, 1996
- [Zga96] Zgainski F.X., Coulomb J.L., Maréchal Y., "A Tool Box for 3-D Generation in Electromagnetism and Electromechanical Engineering", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, n. 3, pp. 1341-1344, 1996

-
- [Zhe96a] Zheng Y., Lewis R.W., Gethin D.T., “Three-Dimensional Unstructured Mesh Generation: Part 1. Fundamental Aspects of Triangulation and Point Creation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 134, pp. 249-268, 1996
- [Zhe96b] Zheng Y., Lewis R.W., Gethin D.T., “Three-Dimensional Unstructured Mesh Generation: Part 2. Surface Meshes”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 134, pp. 269-284, 1996
- [Zhu90] Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C., “Superconvergence Recovery Technique and A Posteriori Error Estimators”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, pp. 1321-1339, 1990
- [Zhu91a] Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C., Hinton E., Wu J., “A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, pp. 849-866, 1991
- [Zhu91b] Zhu J.Z., Hinton E., Zienkiewicz O.C., “Adaptive Finite Element Analysis with Quadrilaterals”, *Computers & Structures*, vol. 40, n. 5, pp. 1097-1104, 1991
- [Zie71] Zienkiewicz O.C., Phillips D.V., “An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surfaces by “Isoparametric” Co-ordinates”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, pp. 519-528, 1971
- [Zie87] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., “A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 337-357, 1987
- [Zie89] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., Gong N.G., “Effective and Practical h-p Version Adaptive Analysis Procedures for the Finite Element Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 879-891, 1989
- [Zie91] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., “Adaptivity and Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, pp. 783-810, 1991
- [Zie92a] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., “The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates. Part 1 : The Recovery Technique”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1331-1364, 1992
- [Zie92b] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., “The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates. Part 2 : Error Estimates and Adaptivity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1365-1382, 1992
- [Zwa98] Zwart P.J., Raithby G.D., “Space-Time Meshing for Two-Dimensional Moving Boundary Problems”, *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 187-200, Dearborn, 1998